

De Dido a Penrose, pasando por Minkowski. Un viaje para explorar las leyes geométricas del universo

por

José Rojo Montijano, Universidad San Pablo CEU

Considérense estas dos proposiciones:

- (1) “De entre todas las regiones (abiertas y acotadas) de un plano que tienen un mismo perímetro L , los círculos son las que poseen mayor área”.
- (2) “De entre todos los espaciotiempos que incluyen algún agujero negro cuyo horizonte de sucesos tenga área A , la métrica de Schwarzschild es la que encierra menor masa”.

La afirmación (1) constituye el germen de los célebres problemas isoperimétricos. Expresa una relación geométrica muy intuitiva, que ya aparecía en la leyenda de la fundación de Cartago por su primera reina, Dido. Ha sido demostrada de varios modos en el pasado siglo -y son bien conocidas diversas “demostraciones”, ingeniosas aunque incompletas, de épocas anteriores-.

La proposición (2), que se podría haber precisado con un lenguaje para “iniciados” (en relatividad general), proviene de una conjetura de Penrose de los años setenta. Ha sido demostrada recientemente (y se conocen algunas demostraciones “parciales”, aparecidas en los años noventa).

El propósito de esta charla es evidenciar que el uso de flujos geométricos -tan de actualidad, gracias a los resultados de Perelman, Hamilton y tantos

otros- proporciona una metodología común con la que tratar con éxito este tipo de relaciones.

Se comenzará analizando esta “inocente” cuestión: si C es una curva (simple, cerrada, regular) de un plano, y se la deja evolucionar tomando como campo de velocidades su curvatura, ¿qué va a suceder? Lo que va a ocurrir permite dar una prueba más de las desigualdades citadas.

1. La leyenda de Dido y el problema isoperimétrico

Cartago había sido fundado por Dido, hija del rey Muto de Tiro y esposa de Sicarbas, rico sacerdote que murió asesinado por Pigmalión, el hermano de Dido, que deseaba atesorar las riquezas de su cuñado.



Durante un sueño, el fantasma de Sicarbas advirtió a su viuda de las funestas intenciones que Pigmalión proyectaba para ella. Dido se sintió obligada a armar una pequeña flota e iniciar un viaje por mar, huyendo de Tiro en busca de nuevas tierras.

Tras diversas peripecias, llegaría a las costas de África, donde negoció con los lugareños establecerse en el pedazo de tierra que pudiera ser cubierto con la piel de un buey.

Dido supo cortar la piel en finísimas tiras, formar con ellas una larga cuerda y encerrar con la cuerda una modesta superficie, en la que se levantó la ciudad de Birsa, origen de la que luego sería conocida como Cartago.

Aunque la grandeza matemática de Dido está ligada a que su comprensible ambición dio lugar al nacimiento del problema isoperimétrico,

“De entre todas las regiones abiertas y acotadas del plano con un mismo perímetro L , ¿cuál es la de mayor tamaño?”,

su universal fama proviene, más bien, de su belleza, inteligencia y aportación a los orígenes míticos de Roma.

Virgilio quiso relatar en la Eneida la llegada de Eneas, hijo de Afrodita, a las costas del norte de África, tras haber resultado herido en la guerra de Troya. Recaló precisamente en Cartago, donde, así lo quisieron los dioses, se enamoró perdidamente de Dido. Pero estos mismos dioses no permitieron que Eneas quedara retenido en este lugar y le enviaron hacia Italia para que cumpliera allí la alta misión que el destino le tenía encomendada: en el Lazio fundaría la ciudad de Lavinio, origen de la actual Roma. Se cuenta que el mismo Julio César presumía de proceder de la descendencia de Eneas y, de esa manera, de estar emparentado con la propia Venus, diosa romana del Amor, versión latina de Afrodita.

Lamentablemente, el trabajo que sigue no se va a centrar en la rica y compleja historia de Roma, sino en la *desigualdad isoperimétrica*, que se va a formular del siguiente modo:

Si D es una región abierta y acotada del plano y C , la frontera de D , es una curva simple, regular y cerrada de longitud L , entonces

$$A \leq \frac{1}{4\pi} L^2 \quad (8.1)$$

donde A es el área de D .

Puesto que en (8.1) se alcanza obviamente la igualdad cuando D es un círculo, esta desigualdad manifiesta que precisamente una circunferencia de longitud L resuelve el problema isoperimétrico.

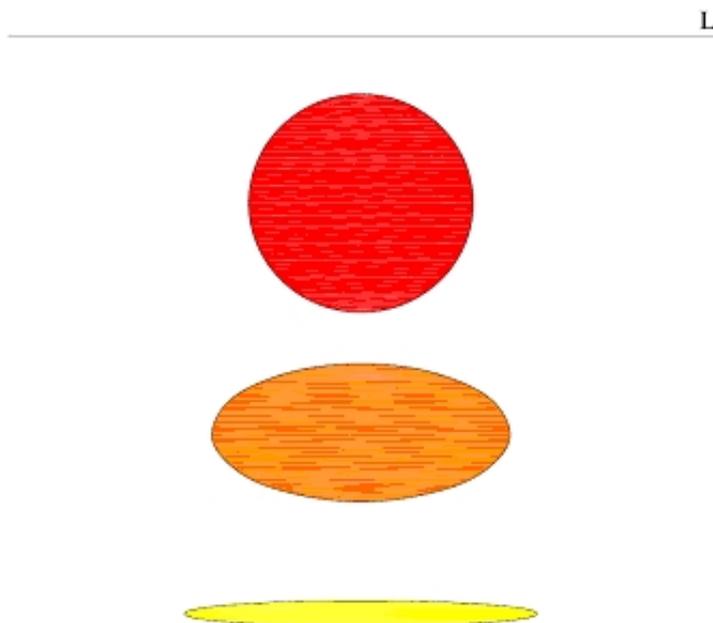
Con este trabajo se pretende:

- Demostrar la desigualdad (8.1), es decir,

$$L^2 - 4\pi A \leq 0 \quad (8.2)$$

- Obtener tal demostración adoptando una perspectiva dinámica: como consecuencia de las propiedades del “flujo por la curvatura”.

- Comentar, al concluir, alguna de las generalizaciones (tanto en el mundo de los flujos geométricos, como en el de las desigualdades) que afectan a investigaciones en relatividad general.



Algunas regiones planas con el mismo perímetro L .

2. El flujo por la curvatura

En 1986, Hamilton se propuso estudiar el siguiente sistema dinámico, al que vamos a denominar “CSF”:

En el espacio E , formado por las curvas regulares y simples del plano A , elegimos una de ellas como dato inicial y la dejamos evolucionar tomando como velocidad inicial su campo de vectores de curvatura, ($\vec{k} = k\vec{n}$, donde \vec{n} es la normal principal y k es la curvatura).

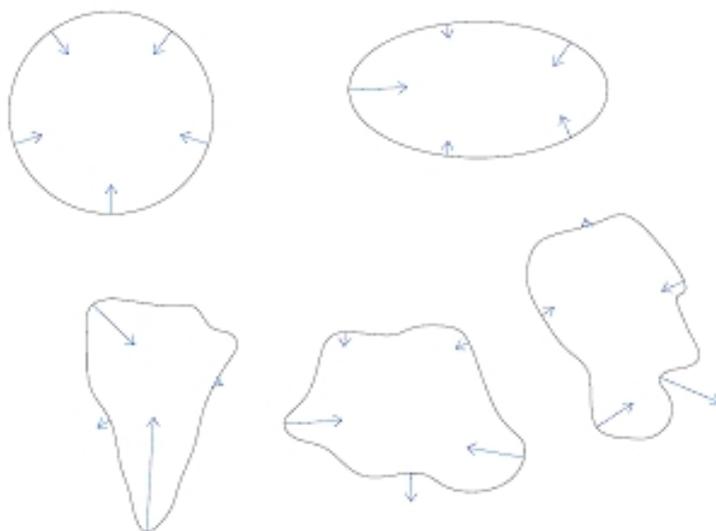
Nos proponemos explorar el futuro de C durante el movimiento que se produzca bajo el CSF.

Formalicemos un poco este proceso:

- Se toma una trayectoria, simple y regular, γ_0 , tal que $\gamma_0(\mathbb{S}^1) = C$ y se la deja evolucionar con el tiempo t , donde \mathbb{S}^1 es una circunferencia,
- Con las sucesivas trayectorias, γ_t , de este proceso, se construye la función $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow A$ tal que $\gamma(u, t) = \gamma_t(u)$.

- Con estas notaciones, es nuestra intención estudiar la solución del problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \vec{k} \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0. \end{cases} \quad (8.3)$$

Algunos elementos de E .

Nos encontramos con una EDP de tipo “parabólico” que plantea un problema bien propuesto. Hamilton pudo probar que para toda inmersión de clase C^2 , $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow A$, hay una única solución de (8.3),

$$\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow}0)) \rightarrow A \dashv$$

donde a

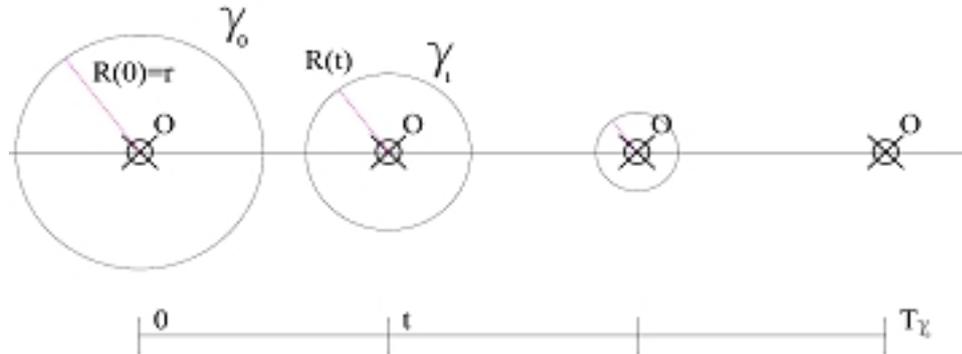
$$T_{\downarrow}(\gamma_{\downarrow}0) = \sup\{T : \gamma(u, t) \text{ existe y es suficientemente derivable para } t \in [0, T) \dashv\}$$

lo llamaremos “el tiempo de vida de γ_0 ”.

Nuestra ecuación, de la forma, $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2}$ (con s el parámetro arco), recuerda la ecuación del calor $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$. Como ella, también nuestro proceso tiene un efecto regularizante sobre sus soluciones: aún cuando la trayectoria inicial γ_0 sea sólo de clase C^2 , en cuanto comienza a deformarse se hace

de clase infinito (e, incluso, analítica). Como se sabe, estas ecuaciones verifican el principio del máximo y durante su evolución se va repartiendo la curvatura, promediándose.

Consideremos un ejemplo elemental: elijamos como dato inicial una circunferencia $C = \gamma_0(\mathbb{S}^1)$ de radio r . El flujo preserva la simetría de C



y resulta sencillo resolver explícitamente la ecuación de su movimiento:

- En el instante 0, $\gamma_0(u) = r(\cos(u), \sin(u))$.
- El movimiento contrae a γ_0 sobre otras circunferencias

$$\gamma(u, t) = R(t)(\cos(u), \sin(u)).$$

- Como la normal principal está dirigida hacia el centro y $\vec{k} = \frac{1}{R}\vec{n}$, para estudiar la evolución resolvemos la EDO

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{R}, \quad R(0) = r;$$

la solución se puede escribir $R(t) = \sqrt{r^2 - 2t}$.

- Así, en el caso de este ejemplo particular, se puede describir explícitamente la solución del problema (8.3), como

$$\gamma(u, t) = \sqrt{r^2 - 2t}(\cos(u), \sin(u)).$$

- Obsérvese que al llegar al instante $t = \frac{r^2}{2}$ la circunferencia colapsa a un punto y se hace “singular”. Este instante es el tiempo de vida de γ_0 . En este instante, la curvatura “explota” y se hace “infinita”. El propio proceso pierde su sentido.

¿Son significativos los resultados de este ejemplo para otras condiciones iniciales? Durante los años noventa, Gage, Grayson y Hamilton lograron probar que, bajo el impulso del flujo de curvatura, el futuro de cualquier curva C perteneciente a E es hacerse, en algún instante T_C , singular convergiendo hacia un punto, “el atractor de C ”. Durante estos años se demostraron estas afirmaciones:

- 1) Este flujo está libre de colisiones: dos curvas de E , inicialmente disjuntas, se deforman permaneciendo siempre disjuntas.
- 2) En un plazo de tiempo finito (precisamente $\frac{A}{2\pi}$ donde A es el área encerrada por la curva inicial), cada curva evoluciona hasta que emerge una singularidad.
- 3) Una curva inicial convexa permanece convexa durante todo su tiempo de vida. La singularidad a la que es atraída es un atractor puntual. Durante este proceso las curvas se van redondeando.
- 4) Bajo este flujo, curvas no convexas de E evolucionan a curvas convexas (y por tanto, se contraen hasta su atractor puntual).

Quedan, sin embargo, problemas abiertos, como el de la localización del atractor, que en numerosos casos no se sabe determinar.

Dos lemas interesantes aparecen como aplicación a este flujo de las fórmulas de la primera variación del área y de la longitud: si $A(t)$ y $L(t)$ son, respectivamente, el área encerrada por γ_t y su longitud ($0 < t < T_{\gamma_0}$), entonces:

$$1) A'(t) = \int_{\gamma_t} k \quad (8.4)$$

$$2) L'(t) = - \int_{\gamma_t} k^2 \quad (8.5)$$

donde k es la curvatura a lo largo de γ_t .

Usando el teorema de Gauss-Bonnet la fórmula (8.4) se puede concretar así: *el ritmo con el que decrece el área es una constante, $A'(t) = -2\pi$.*

Vamos a desvelar por fin el significado de las siglas CSF. Son los acrónimos de “Curve shortening flow”. No sólo durante este proceso se reduce la longitud (pues $L' \leq 0$), sino que además tal reducción se va alcanzando del modo más rápido posible: el CSF es el “gradiente” del funcional de longitud entre los flujos de E .

En efecto: usando la fórmula de la primera variación de la longitud para una perturbación \vec{v} ,

$$L'(t) = - \int_{\gamma_t} \langle \vec{k}, \vec{v} \rangle \geq - \left(\int_{\gamma_t} \langle \vec{k}, \vec{k} \rangle \right)^{1/2} \left(\int_{\gamma_t} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \right)^{1/2},$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz; la igualdad se alcanza precisamente cuando \vec{v} tiene la dirección de \vec{k} .

3. Demostración de la desigualdad isoperimétrica

Sea γ_0 una trayectoria regular, simple, que trace una curva C de E , de longitud $L(0) = L$, encerrando un área $A(0) = A$. Dejemos evolucionar γ_0 bajo nuestro CSF.

Lo que queremos probar (véase (8.2)) es que $f(0) \geq 0$, para

$$f(t) = L^2(t) - 4\pi A(t), \quad 0 \leq t \leq T_{\gamma_0}.$$

Demostración:

(i) $f' = 2LL' - 4\pi A'$.

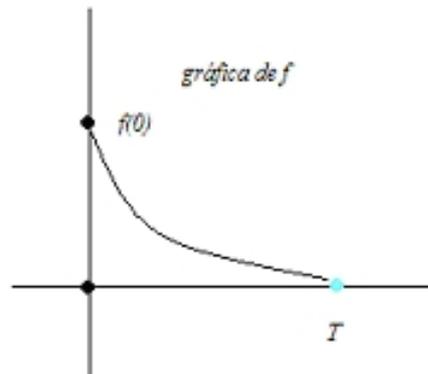
(ii) Como

$$\begin{aligned} 4\pi A' &= 2(2\pi) \int_{\gamma_t} k ds = -2 \left(\int_{\gamma_t} k ds \right)^2 \geq -2 \left(\int_{\gamma_t} ds \right) \left(\int_{\gamma_t} k^2 ds \right) = \\ &= 2L(t)L'(t), \end{aligned}$$

resulta que $f' \leq 0$, de modo que f es monótona no creciente.

(iii) Puesto que, para $t \rightarrow T_{\gamma_0}$, la región encerrada por C se deforma contrayéndose a un punto, $\lim_{t \rightarrow T_{\gamma_0}} f(t) = 0$.

(iv) De (ii) y (iii), se sigue que $f(0) \geq 0$.



4. La conjetura de Penrose

Los resultados descritos han sido generalizados en múltiples direcciones:

- La desigualdad isoperimétrica para curvas cerradas del plano ha dado lugar a resultados en dimensiones superiores (ver [3]). Se sabe, por ejemplo, que entre las superficies cerradas de área dada en el espacio euclídeo tridimensional, son precisamente las esferas las que encierran mayor volumen. Los avances en la teoría geométrica de la medida han permitido estudiar estas relaciones con conjuntos muy irregulares y medidas muy generales.
- Por otro lado, el CSF es sólo uno de los muchos hermanos de la gran familia de los flujos geométricos. Una familia que incluye a los flujos de curvas cerradas sobre una superficie movidos por la curvatura geodésica y flujos de superficies cerradas en el espacio euclídeo por la curvatura media, que están permitiendo obtener, respectivamente, resultados sobre geodésicas y superficies minimales. Quizás el más célebre de los flujos geométricos es el flujo de Ricci (ver [4]) por su papel relevante en la demostración reciente de la conjetura de Poincaré.

En el contexto de la teoría de la relatividad general, en los años setenta (ver [8]), Penrose consideró congruente con los resultados conocidos que la masa encerrada por el horizonte de sucesos de un agujero negro, debía estar relacionada con el área de la sección espacial de tal horizonte, de modo que, en unidades geométricas, $M \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$, donde la igualdad se alcanza precisamente en el caso estático y esférico de la métrica de Schwarzschild.

Es notorio que la demostración de esta “conjetura de Penrose” (a la que Gibbons llama “la desigualdad isoperimétrica de los agujeros negros”) pueda realizarse mediante el estudio de la evolución de la masa bajo cierto flujo geométrico que deforma métricas iniciales haciéndolas converger a la métrica estable de un agujero negro. Salvando las distancias, en la lúcida exposición de la demostración de esta conjetura que aparece en [2] se puede seguir el paralelismo con las ideas desarrolladas en los epígrafes 2 y 3.

En los últimos años, la expectativa de que, en escenarios con dimensiones extra, se puedan producir miniagujeros negros en grandes aceleradores de partículas, ha atraído un enorme interés sobre el estudio de espacio-tiempos con dimensiones superiores. En el caso pentadimensional Gibbons (ver [6])

conjetura la siguiente desigualdad isoperimétrica para 5-agujeros negros

$$M \geq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{A}{16\sqrt{\pi}}}.$$

Aún cuando se conoce esta desigualdad en varios casos, al no estar cerrada hoy en día la lista de posibles métricas de agujeros negros en esta dimensión, no se tiene un teorema general.

Bibliografía

- [1] C. Barrabes and V. Frolov, Geometric inequalities and trapped surfaces in higher dimensional space-times, *ArXiv:gr-qc/0402081v2* (2004).
- [2] H.L. Bray, Black holes, geometric flows and the Penrose inequality in general Relativity, *Notices AMS*, **49** (11), 1372–1381 (2002).
- [3] I. Chavel, *Isoperimetric inequalities*, Cambridge University Press, 2006.
- [4] B. Chow and P. Lu, *Hamilton's Ricci flow*, Graduate studies in mathematics **77**, AMS, 2006.
- [5] J. Corvino, *On isoperimetric surfaces in General Relativity*, Preprint, 2008.
- [6] G.W. Gibbons, The positive mass and isoperimetric inequalities for axisymmetric black holes in four and five dimensions, *ArXiv: gr-qc/0606116v1* (2006).
- [7] R.S. Hamilton, The formation of singularities in the Ricci flow, *Surveys in differential geometry*, **2** (1995).
- [8] R. Penrose, Naked singularities, *Ann. New York Acad. Sci.*, **224**, 125–134 (1973).

José Rojo Montijano
 Universidad CEU San Pablo Madrid
 Escuela Politécnica Superior
 Departamento de Métodos Cuantitativos
 Urbanización Monte Príncipe s/n
 28668 Boadilla del Monte (Madrid)
 e-mail: jrojo.eps@ceu.es

