

El arte y la ciencia de la paradoja

por

Marta Macho Stadler, Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Las paradojas han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentando los desarrollos revolucionarios de las ciencias, de las matemáticas y de la lógica. Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva. Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas.

Anatol Rapoport

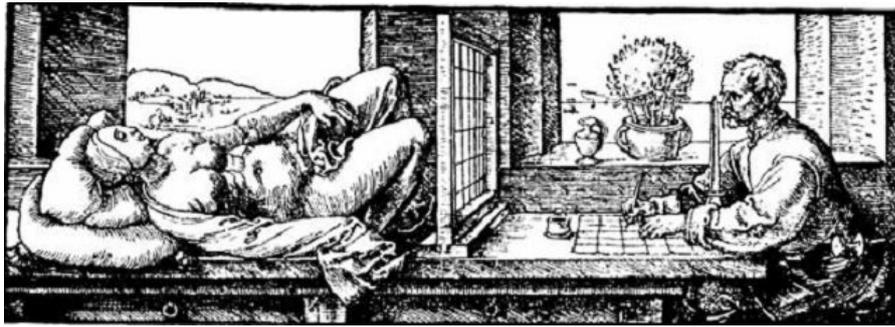
En este escrito sigo el mismo orden que en la conferencia del ciclo *Un Paseo por la Geometría*. Por razones de espacio, no puedo incluir todas las imágenes, pero pueden verse en la presentación accesible en este enlace

http://www.ehu.es/~mtwmastm/Paradojas_8febrero2012.pdf

1. Anamorfosis

Una anamorfosis es una deformación reversible de una imagen a través de procedimientos matemáticos u ópticos.

En el siguiente grabado de Durero, el artista usa un retículo –el velo de Alberti– para guardar las proporciones de la modelo.



¿Y si no se coloca el enrejado de forma perpendicular a la modelo? Entonces, la figura aparece distorsionada, formando lo que se denomina una *anamorfosis oblicua*.

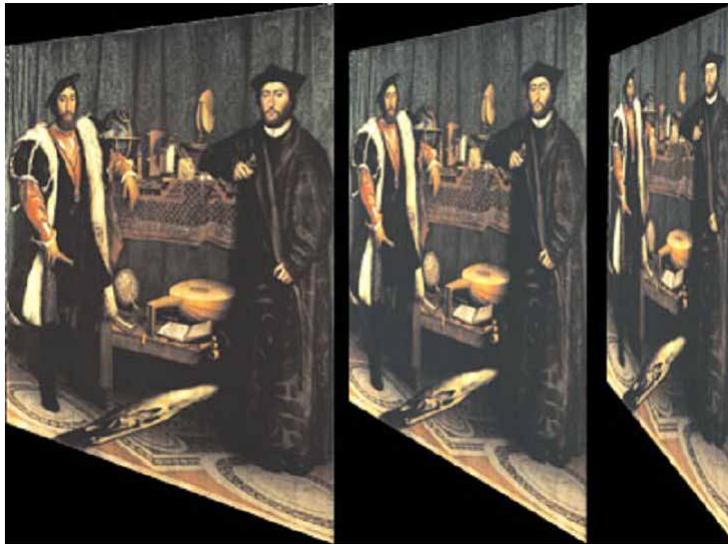
Un bellissimo ejemplo de este tipo de anamorfosis viene dado por el cuadro *Los Embajadores* de Holbein el joven (1497-1543). ¿Qué es esa sombra blanca en el suelo?



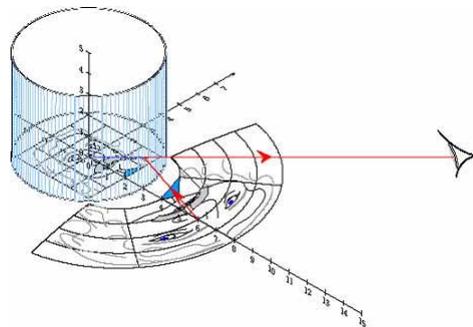
La escena transcurre el 11 de abril de 1533. Poco tiempo antes, Enrique VIII solicitaba al papa Clemente VII anular su matrimonio con Catalina de Aragón, ya que de su unión no había nacido ningún heredero varón. El papa no accede a este favor, lo que no impide al monarca desposar en secreto a Ana Bolena el 25 de enero de 1533. A principios de abril, Thomas Cranmer, el arzobispo de Canterbury, anula el matrimonio con Catalina y declara a Ana Bolena Reina de Inglaterra.

El hecho no tiene precedentes, y se envía una embajada francesa para intentar una reconciliación con el papa: dos de estos embajadores están representados en el cuadro. Son Jean de Dinteville (1504-1555), el embajador francés en Inglaterra y Georges de Selve (1508-1541), el obispo de Lavaur.

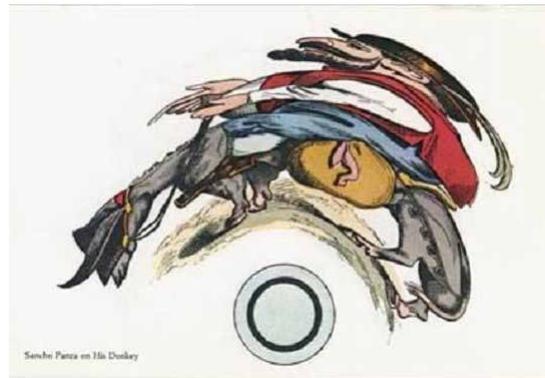
La pintura se encuentra expuesta en la National Gallery de Londres: al entrar en la sala, el cuadro aparece frente a el o la visitante, que debe salir por una puerta lateral. Al girar la cabeza, se descubre la anamorfosis: al pie del cuadro, esa mancha blanca resulta ser una calavera. ¿Y qué significado tiene? No se sabe a ciencia cierta, pero podría representar la firma del pintor –Holbein significa hueso (bein) hueco (hohl)– o quizás aludiría a la muerte de la dinastía de Los Tudor, al no tener heredero varón.



Otro tipo de anamorfosis –entre las muchas existentes– son las cilíndricas. Mediante procedimientos como los mostrados en la imagen de debajo, se deforma un dibujo que aparece irreconocible a simple vista. Si se coloca un espejo cilíndrico en el lugar adecuado, se verá en él reflejada la figura en sus buenas proporciones.



Ver <http://members.aol.com/ManuelLuque3/miroirs.htm>

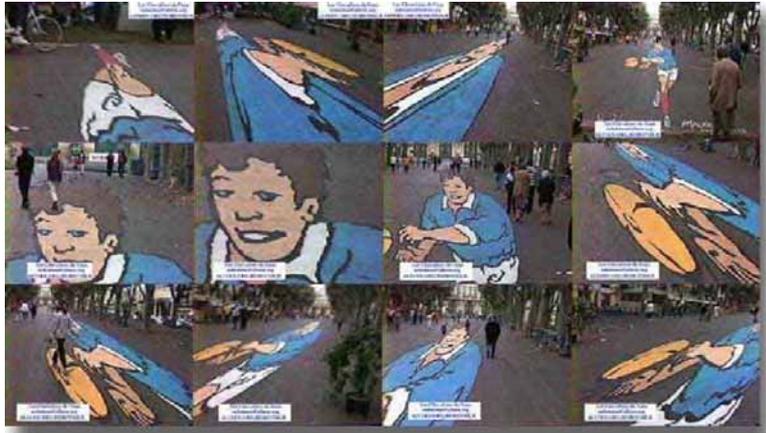


Sancho Panza aparecería si se colocara el espejo cilíndrico en la posición indicada

István Orosz (1951-) es un maestro de la anamorfosis. Un ejemplo es *La isla misteriosa y el retrato de Julio Verne*: en este paisaje helado –de la isla misteriosa– con montes, barcos y caminantes, aparece Julio Verne al colocar un espejo cilíndrico en el lugar ocupado por el Sol.



Les Chevaliers de l'eau (ver <http://jourdain.ifrance.com/sommaire.htm>) son los creadores de esta gigantesca anamorfosis realizada para la apertura de la Copa del Mundo de Rugby de 1999: el jugador de rugby mide 134,20 metros de largo, pero dependiendo de punto de vista parece tener el tamaño de una persona.



Otras impresionantes imágenes de anamorfosis se deben a conocidos artistas callejeros, como Kurt Wenner, Julian Beever o Eduardo Relero, entre otros.

Pero esta técnica es también de gran utilidad en la vida cotidiana; por ejemplo, en la señalización de la carretera, permitiendo una correcta interpretación de las indicaciones por parte de las conductoras y conductores.



2. Una paradoja lógica: la paradoja del barbero

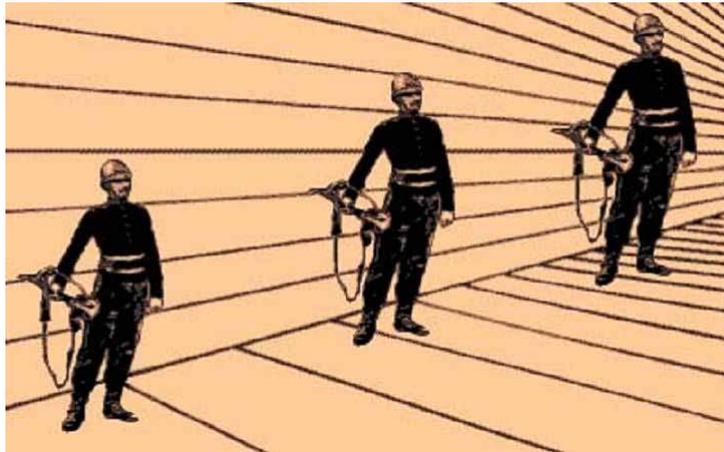
En *Aveinte* –en la presentación puedes averiguar porque se llama de este modo el pueblo–, el barbero, Jon, afeita a los que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero de Aveinte?

Vamos a pensar un poco: si Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de *Aveinte* que no se afeitan a sí mismas, con lo cual Jon debería de afeitarse,

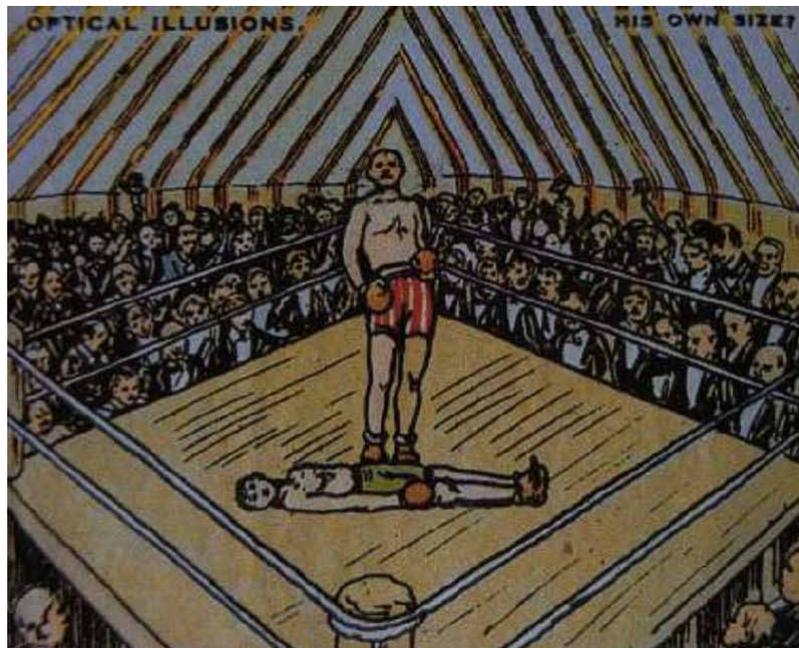
siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas y no debiendo por tanto afeitarse... ¿Cómo salir de este embrollo?

Una solución puede venir a través de la *teoría de tipos* de Bertrand Russel, en la que se eliminan los conjuntos auto-contradictorios. Según esta teoría, Jon, el barbero de *Aveinte*, ¡no existe!

3. Paradojas de la perspectiva



Paradoja de la perspectiva ascendente ¿Son los soldados del mismo tamaño?



¿Cuál de los boxeadores es más alto?

4. Una paradoja del infinito: el hotel de Hilbert

Érase una vez un hotel –*Hotel Infinito*– con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: *Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped.*

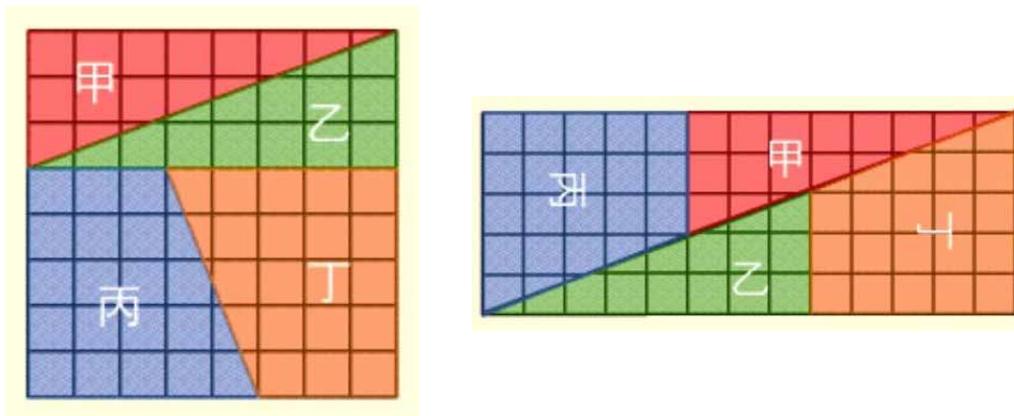
Llega un día al *Hotel Infinito* –que se encuentra lleno– un hombre. El recepcionista, fiel a su lema, avisa por megafonía a todos sus clientes, para que se cambien de la habitación que ocupan $-n-$ a la habitación $n + 1$: de este modo, la habitación número 1 queda libre para el nuevo huésped.

Pero... ¿qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación? No hay problema, ya que no existe la “última habitación”...

Al día siguiente, llega al *Hotel Infinito* –que está lleno–, una excursión con infinitos pensionistas (numerados). Esto es mucho más difícil todavía... pero el recepcionista es un profesional, y solicita por megafonía a todos sus clientes que se cambien de la habitación que ocupan –la número $n-$ a la habitación $2n$. De esa forma los huéspedes se mudan a las habitaciones pares, y todas las habitaciones impares quedan libres para los pensionistas. ¡Un hotel, sin duda, excepcional!

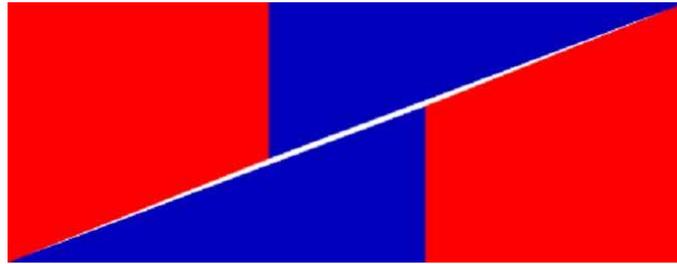
5. Desapariciones geométricas: ¡64 = 65!

En efecto, tomemos el cuadrado 8×8 de debajo –por lo tanto de área 64– y re Coloquemos las piezas como se muestra en la figura.



Queda un rectángulo de 5×13 cuadrados, es decir, de área 65... ¡Acabamos de probar que $64 = 65$!

No te preocupes, es sólo un truco: en realidad no se trata de un rectángulo... ¿Ves la parte blanca en la figura de abajo? Es un paralelogramo de área 1; los trazos gruesos de las primeras figuras esconden esta pequeña región.



6. Una paradoja de la predicción: la paradoja del condenado

En la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad, pronuncia su sentencia:

Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si esa será tu última sobre la Tierra...

En la soledad de su celda, el desdichado reo argumenta de este modo:

Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir... Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...

Continuando de esta manera, el prisionero concluye triunfalmente que la condena es de ejecución imposible, y comienza a dormir aliviado, aguardando que transcurra el mes para pedir su libertad.

Sin embargo, sorpresa, un día cualquiera -por ejemplo el fatídico día 13, que seguro que además era martes-, el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo, que instantes más tarde es decapitado. La sentencia se cumple *literalmente*. ¿Dónde ha fallado el razonamiento del condenado?

Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que el mes. Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes. El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es irreprochable... pero el defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto -este *mes*- las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes -cada *día*-, no advirtiendo que el conjunto mes ha incorporado algunas características: entre otras la de contener *días sorpresa*.

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba:

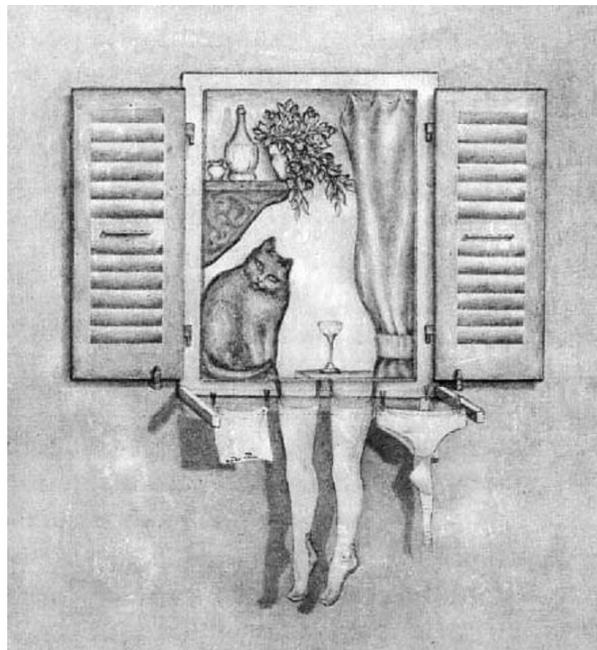
Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.

El razonamiento no es trivial, y es la esencia de la paradoja del condenado.

7. Figuras ambiguas



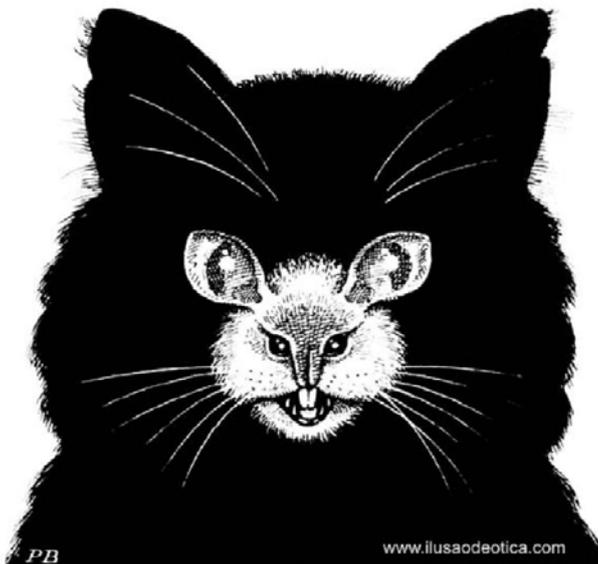
Roger N. Shepard (1929-): Sara Nader ¿Qué ves? ¿Un saxofonista o la cara de una mujer?



Sandro del Prete (1937-): ¿Qué ves? ¿El cuerpo de una mujer desnuda o ropa tendida?



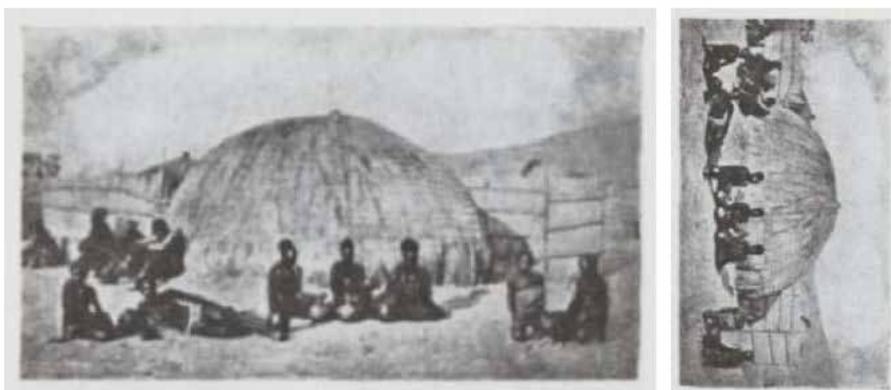
Lawrence Sterne Stevens: portada de junio de 1952 de la revista *Famous Fantastic Mysteries*. ¿Ves la calavera?



Peter Brookes: De cerca se ve el ratón y de lejos, ... el gato



Octavio Ocampo (1943-): La evolución del hombre



Salvador Dalí (1904-1989): *Rostro paranoico: la tarjeta postal transformada en Picasso*

ordinario de verdad es incoherente y debe ser rechazado y reemplazado por una serie de “conceptos de verdad”, jerárquicamente ordenados, y cada uno expresado en un lenguaje diferente de cada lenguaje natural –es decir, de cada lenguaje que evoluciona de manera natural–.

Mucha gente opina que esta solución es demasiado radical, y que es preciso recurrir a una respuesta que preserve más de nuestro pensamiento y lenguaje ordinario. Una de ellas se basa en la anterior noción, pero afirma que esta jerarquía está de hecho implícita en nuestro actual uso de “verdad”, y los defectos son tan solo una mera apariencia.

11. Ilusiones ópticas

¿Hacia dónde mira el caballo fotografiado por Jerry Downs?



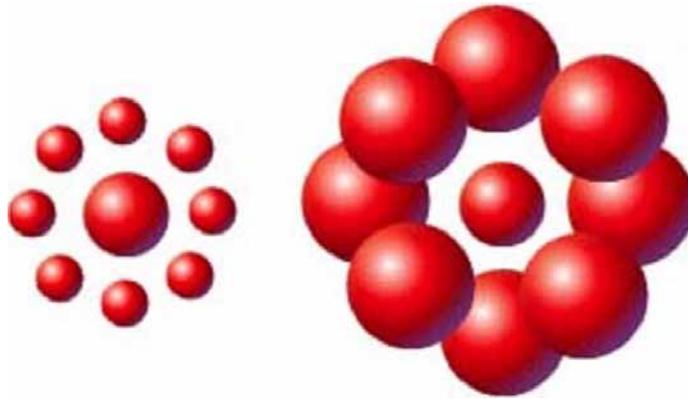
Hay cuatro posibilidades (ver <http://www.jerrydownsphoto.com/>):



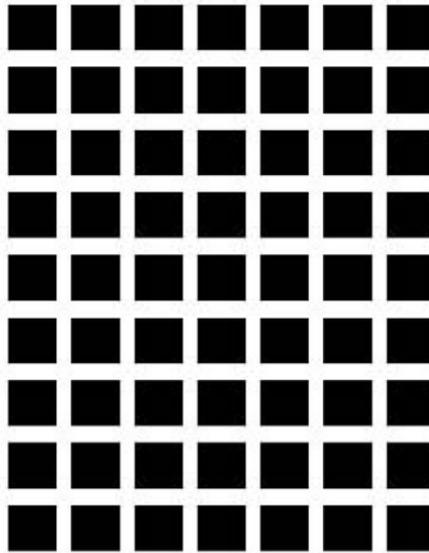
Cuerpo hacia atrás y cabeza mirando hacia atrás o hacia delante



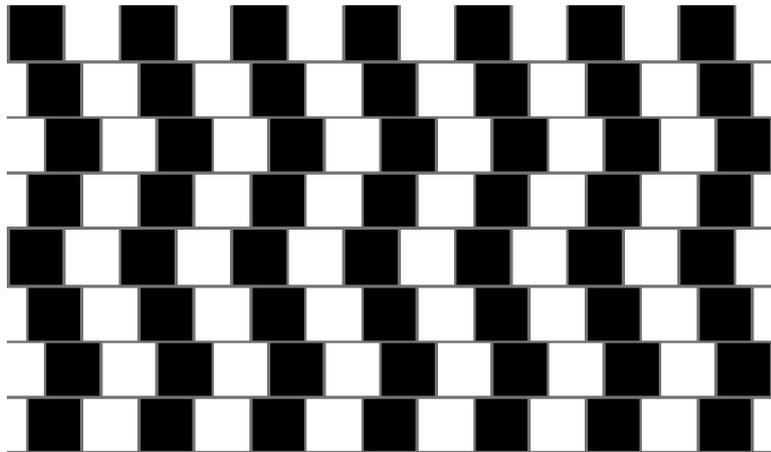
Cuerpo hacia delante y cabeza mirando hacia atrás o hacia delante



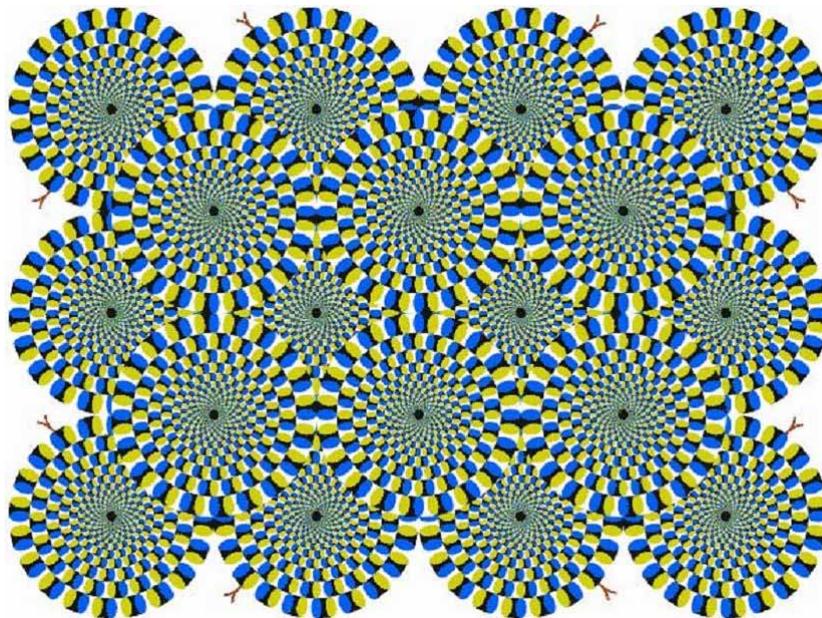
Ilusión de Titchener y Delboeuf: ¿Cuál de los dos círculos centrales es de mayor tamaño?



Ilusión del enrejado por contraste de colores



¿Son paralelas las líneas?



Akiyoshi Kitaoka: Serpientes rotando,
<http://www.ritsumei.ac.jp/~akitaoka/index-e.html>

El dragón que aparece en la siguiente imagen puede construirse siguiendo las instrucciones indicadas en el papel y puede descargarse desde la página web http://www.grand-illusions.com/opticalillusions/dragon_illusion/, donde también pueden verse varios videos describiendo lo que se explica a continuación. Una vez construido el dragón, si te mueves alrededor la figura de papel obtenida, parece que te sigue a lo largo de la habitación. ¿Por qué sucede esto? Cuando te desplazas alrededor de un objeto sólido, tu cerebro sabe como se comporta. Pero este dragón

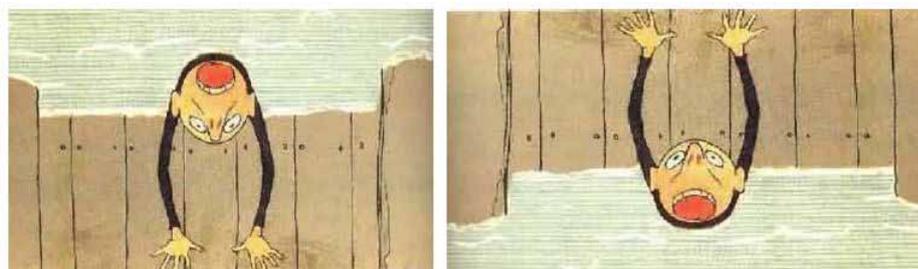
nos da “falsas pistas”, no es como parece: interpretamos que la nariz del dragón apunta hacia nosotros, cuando de hecho su cara es cóncava.



12. Una paradoja de la confirmación: la paradoja de Goodman

Se define un objeto como *verul*, si observado antes del tiempo t es verde, y azul después. Si t es el 23 de diciembre de 2012 –¿fin del mundo?–, Nelson Goodman (1906-1998) afirma que decir que las esmeraldas son verdes o verules es igual de consistente... en ambas afirmaciones hay tiempo por medio y ambas se confirman empíricamente.

13. Figuras reversibles



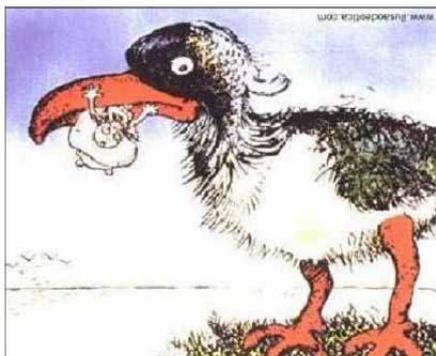
Peter Newell (1862-1924): "Topsy and turvys", ¿Hombre saliendo del agua o ahogándose?



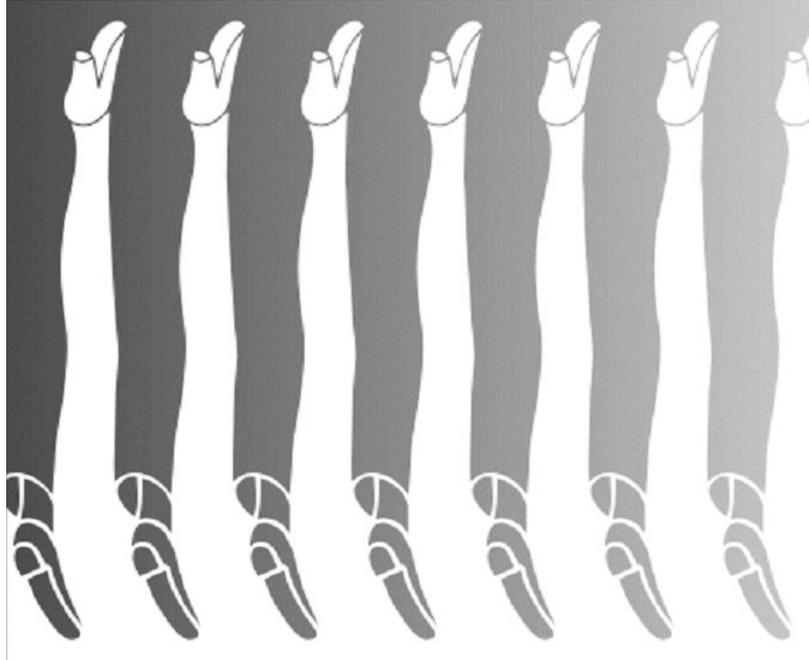
Sergio Buratto: ¿sapo o caballo?



Rex Whistler (1905-1944): ¿Sherlock Holmes o Robin Hood?,
<http://wwar.com/masters/w/whistler-rex.html>



Gustave Verbeck (1867-1937): "A fish story". *El mayor de los pájaros la coge por su vestido... Justo cuando llega cerca de la isla, otro pez le ataca, golpeándole furiosamente con su cola.*



Shigeo Fukuda: Piernas de dos géneros diferentes

Marta Macho Stadler
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Barrio Sarriena s/n. 48940 Leioa
e-mail: marta.macho@ehu.es
<http://www.ehu.es/~mtwmastm/>

