Construcción de curvas planas

por

Raúl Ibáñez Torres

Las curvas han fascinado al hombre desde el inicio de la historia. En la antiguedad el estudio de las curvas tuvo un carácter teórico, ya que fundamentalmente estaban interesados en el conocimiento de sus propiedades geométricas, lo cual no impidió que cuando se necesitó de ellas se utilizaran para cuestiones prácticas, como la descripción del movimiento de los planetas. Sin embargo, en el renacimiento, que fué una época de esplendor intelectual, no sólo se fijaron en el aspecto teórico de las curvas, sino que se esforzaron en la utilización práctica de las mismas (en óptica, mecánica, arquitectura, etc y en matemáticas, por ejemplo, jugaron un papel importante en el nacimiento del cálculo diferencial e integral) y en la construcción de mecanismos para su determinación y dibujo. Desde entonces el estudio de las curvas se ha extendido a todos los campos de las matemáticas y a su utilización en las diferentes ramas de la ciencia.

A lo largo de este artículo, nos proponemos describir métodos de construcción de curvas planas (en concreto, aquí nos interesaremos por las secciones cónicas y los epiciclos) a partir de propiedades geométricas y haciendo uso de sencillos objetos, como rectas ó circunferencias[1]. Describiremos estas curvas como envolventes

[1]Las demostraciones y el estudio en profundidad de las propiedades que aquí aparecen podrán obtenerse en las referencias que se citan al final del artículo.

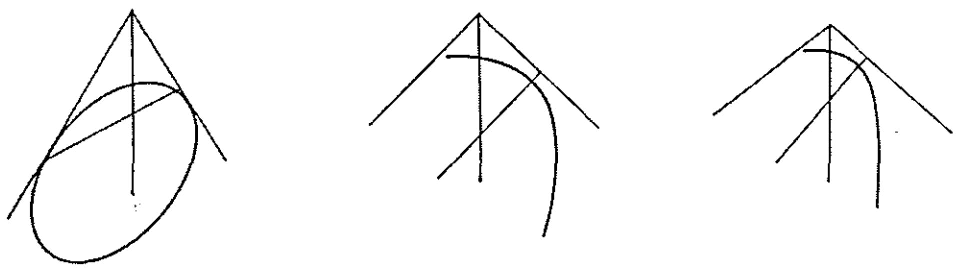

Figura 1: Elipse (agudo), Parábola (recto), Hipérbola (obtuso).

de una familia de rectas ó circunferencias, como lugar geométrico de puntos que satisfacen cierta propiedad, girando circunferencias sobre otras circunferencias, etc, aunque existen muchos otros métodos que aquí no estudiaremos y que son muy interesantes, como la inversión de curvas, las curvas de pedal, etc[2] Estas construcciones geométricas nos llevarán en algunos casos a describir aplicaciones de estas curvas a la vida real.

SECCIONES CÓNICAS

Las secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola) son, después de la recta y la circunferencia, las curvas más antiguas que han interesado al hombre y que han sido estudiadas por él de forma sistemática. Al parecer, las secciones cónicas fueron descubiertas por el griego Menaechmus (375-325 a.c.) para tratar de resolver los problemas clásicos de la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. Las secciones cónicas fueron originalmente definidas como la intersección de un cono circular recto (un cono circular es una superficie generada por las rectas que pasan por una circunferencia dada y un punto fijo, llamado vértice, que no está en el plano de la circunferencia; si además, la línea que une el vértice del cono con el centro de la circunferencia es perpendicular al plano de la circunferencia, se dice que el cono circular es recto) de ángulo variable (el ángulo del cono es el ángulo formado entre dos rectas generadoras que están en un mismo plano que pasa por el vértice y el centro de la circunferencia) y un plano perpendicular a una de las rectas generadoras del cono, que no pase por su vértice. Dependiendo de que el ángulo sea menor, igual ó mayor que un ángulo recto, obtenemos la elipse, la parábola ó la hipérbola, respectivamente (figura 1).

[2]De nuevo en la bibliografía puede encontrarse información sobre otras interesantes curvas y métodos de construcción

Apollonius de Perga[3] (262-190 a.c.), conocido con el sobrenombre de "el gran geómetra", consolidó y extendió los resultados conocidos sobre cónicas en un tratado titulado "Secciones cónicas", formado por 8 libros y con 487 proposiciones. Apollonius fue el primero en observar y demostrar que los tres tipos de secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola) podían obtenerse como secciones de un mismo cono circular recto (e incluso de un cono circular no recto) sin más que cambiar la posición del plano que nos da la sección. Una prueba de singular belleza de este hecho fue construida posteriormente por Dandelin (1794-1847) en 1825 (véase [2,5,6] para una lectura detallada de dicha demostración). Además, esta caracterización de las secciones cónicas nos lleva a observar que podemos obtener, de forma natural y sencilla, las secciones cónicas como las sombras de una pelota al ser iluminada por una linterna contra una pared.

Los nombres elipse, parábola e hipérbola fueron tomados por Apollonius de la terminología pitagórica para la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de la aplicación de áreas. Elipse significa una deficiencia, mientras que hipérbola significa "avanzar más allá" y por último parábola significa "colocar al lado" ó "comparar". La utilización de estas para dar nombre a las secciones cónicas, está relacionado con la expresión en coordenadas de la parábola $y^2 = px$ (p - parámetro de la cónica), mientras que para la elipse $y^2 < px$ y la hipérbola $y^2 > px$ (véase [3] para una explicación más detallada).

Después de tan exhaustivo estudio geométrico las secciones cónicas permanecieron olvidadas hasta el renacimiento, al igual que otras muchas actividades intelectuales. Entonces, los científicos del renacimiento, época de gran inquietud y actividad intelectuales, se preocuparon no sólo de estudiar las secciones cónicas, sino de utilizarlas para resolver problemas prácticos. Galileo (1564-1642) observó que la trayectoria de un proyectil es una parábola, mientras que Kepler (1571-1630) y Newton (1643-1727) mostraron que las órbitas de los planetas eran elipses con el sol en uno de sus focos. Estos importantes descubrimientos, junto al inicio de la geometría en coordenadas y de la geometría descriptiva, volvieron a poner a las secciones cónicas en un lugar destacado de la ciencia, y de la vida real, por sus importantes aplicaciones.

ELIPSE

Construcción 1: vamos a construir una elipse como la envolvente de una

[3] *Junto con Arquímedes y Euclídes, forman los tres pilares de la matemática griega.*

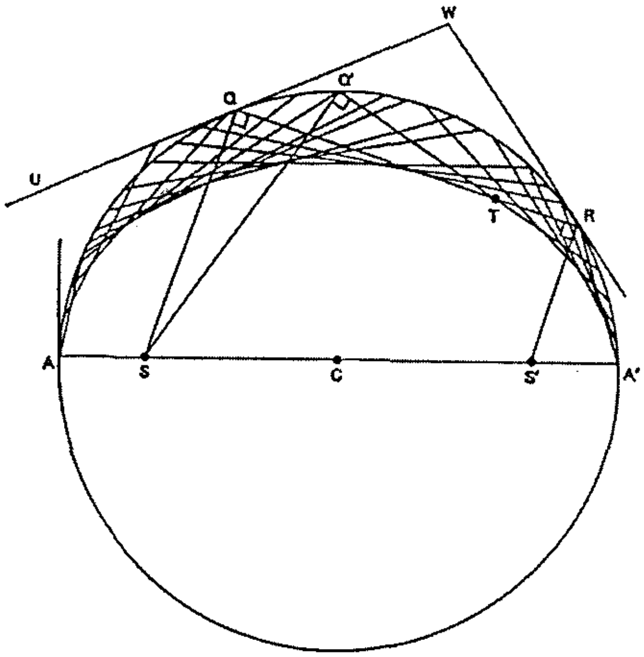

Figura 2

familia de líneas rectas; para lo cual, en primer lugar recordaremos el concepto de envolvente. La envolvente de una familia 1-paramétrica de curvas planas es una curva regular plana que es tangente en cada punto a uno de los miembros de la familia de curvas sin ser ella un miembro de la familia. En el caso particular de una familia de rectas, estas no son más que las rectas tangentes a la curva envolvente.

Trazamos una circunferencia con centro C y elegimos un punto S en uno de los diámetros de la circunferencia, distinto del centro. Para cualquier punto Q sobre la circunferencia, consideramos la recta que pasa por Q y es perpendicular a SQ (véase la figura 2). La elipse es entonces la envolvente de esta familia de rectas. S es uno de los focos de la elipse y si la perpendicular a QS que pasa por Q vuelve a cortar a la circunferencia en otro punto R y trazamos la perpendicular a QR por R, esta corta al diámetro en un punto fijo S', que es el otro foco de la elipse. La elección de S en el diámetro más ó menos lejos del centro C nos dará lugar a elipses que pasan por los mismos extremos A y A', pero están más ó menos aplastadas dentro de la circunferencia. AA' es el eje mayor de la elipse.

La elipse como envolvente de una familia de rectas puede obtenerse haciendo

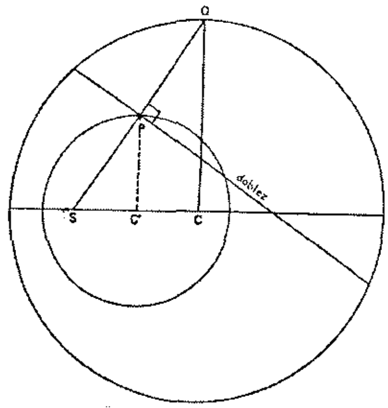

Figura 3

pliegues sobre un papel. Se traza una circunferencia de centro C y se elige un punto S en uno de los diámetros de la circunferencia, distinto del centro. Para cada punto Q de la circunferencia, se dobla el papel de manera que unimos el punto Q de la circunferencia con S, como indica la figura 3. La elipse resultante es la misma que la obtenida por el método anterior, pero, a partir de una circunferencia con radio la mitad que C y de centro C', el punto medio de S y C (véase [4]).

A partir de la construcción 1 podemos obtener una propiedad fundamental de la elipse (para una explicación más detallada ver [4]). Si S y S' son los dos focos de la elipse y P es un punto de la misma, entonces los ángulos entre la tangente en P a la elipse y las rectas que unen P a S y S', respectivamente, son iguales (véase la figura 4).

Ahora teniendo en cuenta esta propiedad fundamental y que una de las leyes de la reflexión nos dice que un "rayo" (de luz, sonido, etc) se refleja sobre una curva ó una superficie regulares al igual que lo haría sobre la recta ó el plano tangente, es decir, el ángulo de incidencia es igual al de reflexión, observamos que un rayo que parte de un foco se refleja en el otro foco.

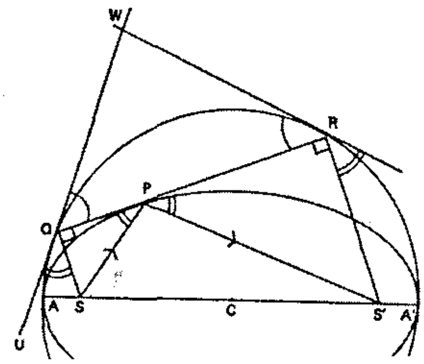

Figura 4

Por ejemplo, existen mesas de billar elípticas que exhiben esta propiedad (aunque las leyes de la reflexión no son exactamente iguales para el billar que para la luz y el sonido). Un elipsoide es una superficie que se obtiene al revolucionar una elipse por su eje mayor, entonces para una tal superficie cualquier rayo de luz ó sonido que parta de un foco se refleja en el otro. Dos aplicaciones de esto son:

- La galería del eco: en habitaciones cuyo techo es elíptico dos personas colocadas en los focos de la elipse se oirán claramente una a la otra. Este efecto, llamado "la galería del eco", ha sido utilizado para diseñar habitaciones especiales, como la catedral de S. Pablo en Londres ó una de las habitaciones del Capitol de los EE.UU. ó algunas estaciones de metro.

- La lampara del dentista: estas lamparas están formadas por un espejo elipsoidal y una luz en uno de los focos de la elipse, de forma que son utilizadas por los dentistas para enfocar luz en un punto determinado de la boca del paciente.

Construcción 2: para la segunda construcción partimos de una circunferencia fija F y un punto fijo S, entonces la elipse es el lugar geométrico de los puntos P del plano que son el centro de una circunferencia variable V que es tangente a la circunferencia dada F y que pasa por el punto fijo S, como muestra la figura 5.

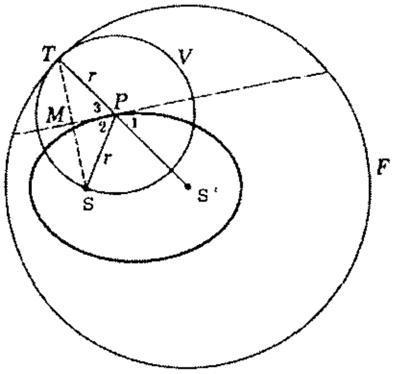

Figura 5

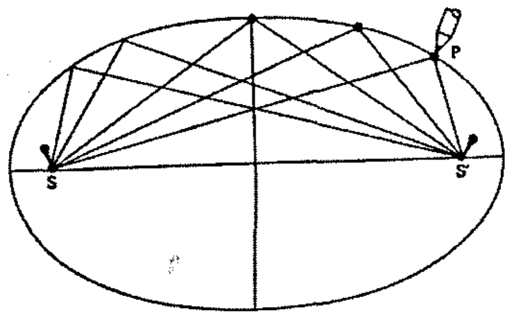

Figura 6

En esta construcción está implícita una de las propiedades importantes de las elipses, que suele utilizarse usualmente para caracterizarlas: la suma de las distancias de los puntos de la elipse P a los focos de la misma S y S' es una constante, esto es, $d(P,S) + d(P,S') = d(A,A')$. Por otra parte esta propiedad nos permite hacer una construcción muy práctica de la elipse con clavos, cuerda y un lápiz, según la descripción de la figura 6.

Un sencillo ejemplo de utilización de este método podría ser un jardinero que para ensalzar aún más la belleza de las flores de un jardín, desea separar las de diferentes tipos ó colores con ayuda de figuras geométricas, por ejemplo la elipse, entonces este método le permitirá fácilmente dibujar en el suelo del jardín la elipse deseada.

Construcción 3: vamos a construir una elipse como un hipotrocoide, es decir, la curva que describe un punto asociado a una circunferencia que gira dentro de otra. En concreto, consideramos una circunferencia fija C y otra circunferencia C', con un radio la mitad, que va a girar interiormente sobre la circunferencia C, además, consideramos un punto P en una de las semirectas que parten del centro de la circunferencia C', y que puede estar tanto en el interior de C' como en el exterior (figura 7). En estas condiciones, la elipse se obtiene como la trayectoria del punto P al girar C' dentro de C.

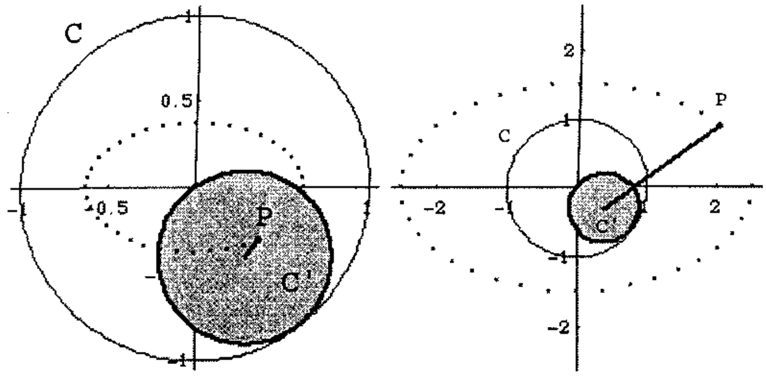

Figura 7

Construcción 4: (construcción punto a punto). Este método de construcción es obvio por la parametrización de la elipse $(x, y) = (a\,cost, b\,sent)$, donde a y b son los radios de dos circunferencias concéntricas (la figura 8 nos describe el método de construcción).

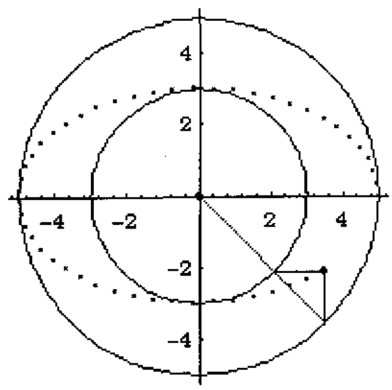

Figura 8

Construcción 5: la siguiente construcción es conocida con el nombre de "compás de Arquímedes". La justificación de este método se comprende fácilmente volviendo a considerar la parametrización de la elipse que mostramos en la construcción 4. Como muestra la figura 9, la elipse es la trayectoria de un punto fijo

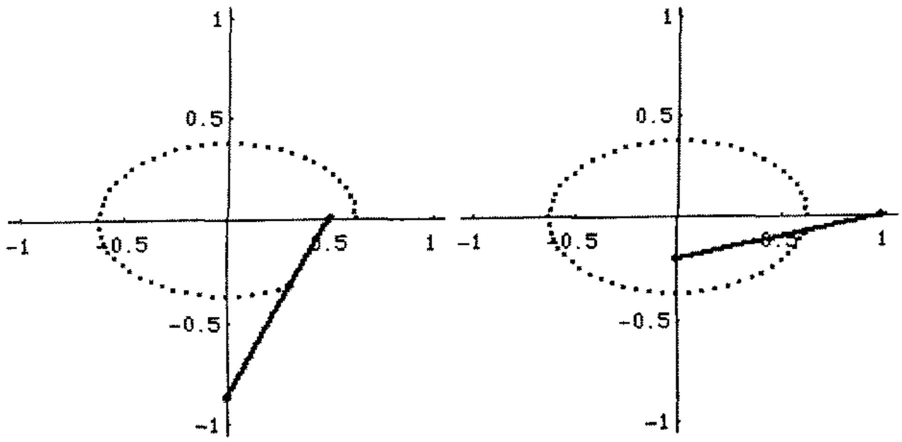

Figura 9

en un segmento de longitud constante (a sería la distancia a un extremo y b al otro), de tal forma que los extremos se deslizan libremente sobre dos líneas mutuamente ortogonales (uno sube y baja, el otro se mueve a derecha e izquierda).

PARÁBOLA

Construcción 1: en primer lugar, vamos a construir la parábola, al igual que hicimos con la elipse, como la envolvente de una familia de rectas.

Trazamos una línea L (directriz), elegimos un punto S (foco) no situado sobre la línea L y, desde cualquier punto P sobre la línea, trazamos una recta t perpendicular a SP (figura 10). La parábola es la envolvente de esa familia de rectas que acabamos de construir. Se llama eje de la parábola a la recta perpendicular a L que pasa por S.

Al igual que ocurría con la elipse este método nos permite construir una parábola en un papel por medio de pliegues[4]. Trazamos una línea m sobre una hoja de papel, señalamos un punto S sobre el papel que no esté sobre la línea, y doblamos el papel de manera que m pase por S (donde se ha doblado el papel será nuestra recta directriz L de la parábola), manteniendo esta posición.

[4]Aconsejamos al lector que en este caso se intente realizar la construcción al mismo tiempo que se lee, para una mejor comprensión y disfrute.

Después, dóblese cuidadosamente el papel de la siguiente manera, por el lado del papel donde hicimos el pliegue inicial hacemos un nuevo pliegue que pase por S, a la vez que hacemos el pliegue complementario para juntar las dos partes del extremo L del pliegue inicial y marcamos bien este segundo pliegue. Tras varias operaciones como esta abrimos completamente el papel y obtendremos, al igual que en la figura 10, que los pliegues "segundos" nos determinan una parábola. Nótese que cuando hacemos un pliegue el unir las dos partes de L nos determina el ángulo recto deseado de la figura 10.

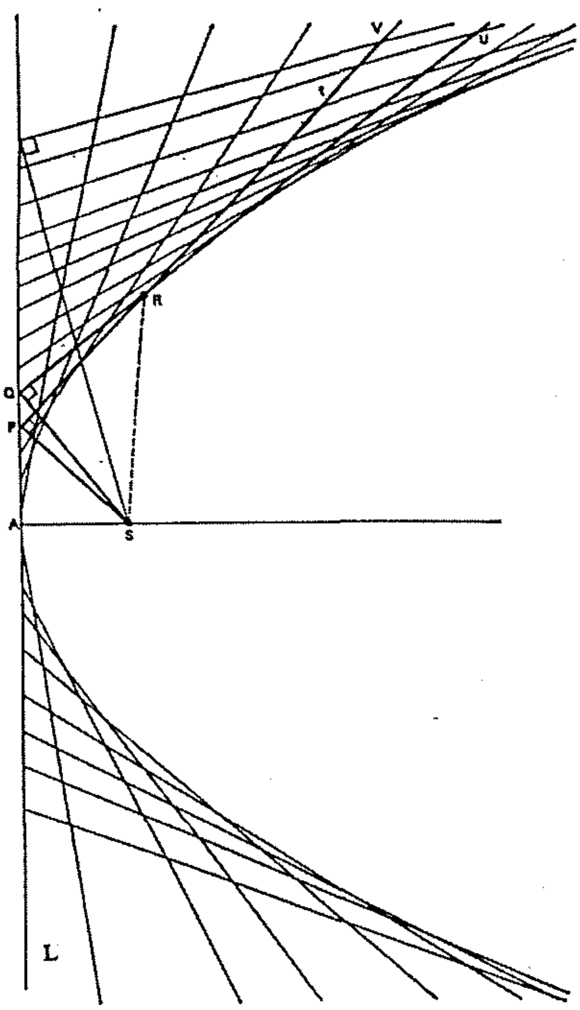

Figura 10

Razonando sobre las cuestiones implícitas en esta construcción, podemos obtener una propiedad fundamental de la parábola (véase [4] para más información). Sea R la recta que pasa por un punto T de la parábola y el foco S, y M la recta que pasa por T y es paralela al eje de la parábola, entonces el ángulo entre M y la recta V tangente en T a la parábola es igual al ángulo entre R y V (véase la figura 11).

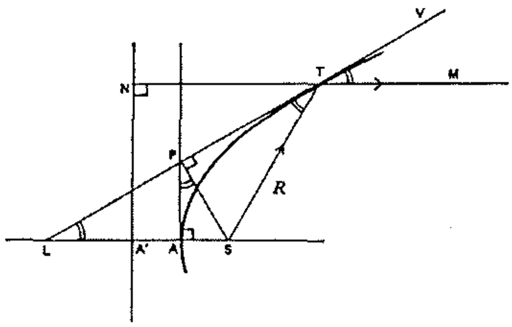

Figura 11

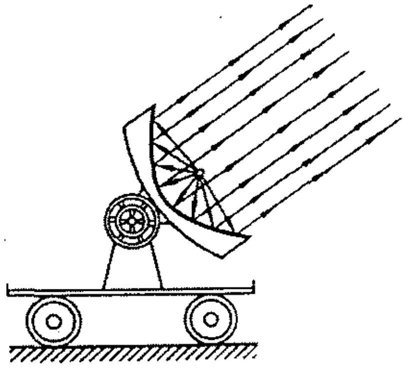

Figura 12

Esta propiedad fundamental de las parábolas tiene muy útiles aplicaciones en la vida real, ya que cualquier rayo que parta del foco S queda reflejado en un rayo paralelo al eje, propiedad que se utiliza en: proyectores, focos de los coches, linternas, etc (figura 12). Y viceversa, los rayos que lleguen paralelos al eje se reflejan en el foco, donde pueden ser recogidos, propiedad que se utiliza en: radares, antenas parabólicas, horno solar, etc.

Construcción 2: una de las propiedades clásicas que caracteriza a las parábolas es que la distancia de los puntos T de la parábola al foco S es igual a su distancia a la recta directriz L, $d(T, S) = d(T, L)$. Esta propiedad podemos expresarla con un método de construcción análogo a la construcción 2 de la elipse. Partimos de una recta fija L y un punto fijo S, entonces la parábola es el lugar geométrico de los puntos que son el centro de circunferencias que pasan por S y son tangentes a L (figura 13).

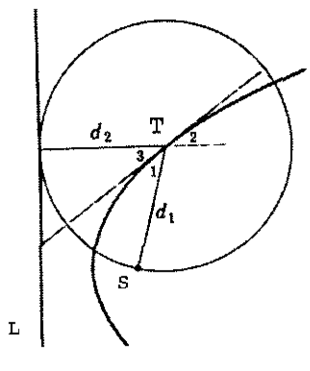

Figura 13

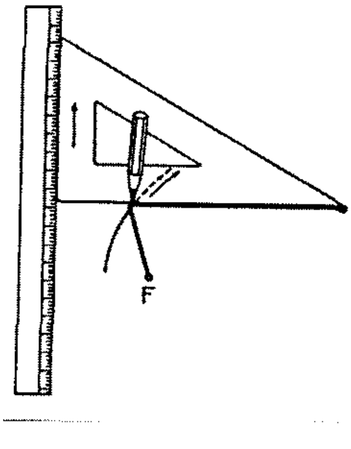

Figura 14

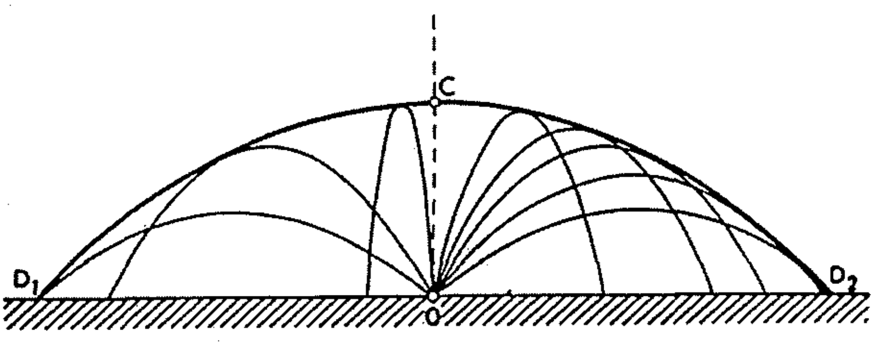

Figura 15

Este método nos lleva a una construcción práctica mediante clavos, cuerda y demás, como la que se describe en la figura 14.

Construcción 3: todo el mundo conoce que si se lanza una piedra ó un proyectil según un cierto ángulo (no en vertical hacia arriba), el camino seguido por la piedra/proyectil es una parábola (observando que la resistencia del aire es mínima), con eje vertical y de tal forma que la distancia de alcance y la altura dependen de la velocidad inicial de lanzamiento, como bien aprendimos en la enseñanza secundaria.

A continuación, describiremos la parábola como la envolvente de una familia de curvas. Supongamos que tenemos una fuente y que de cada surtidor de la misma sale agua a la misma velocidad pero con diferentes ángulos de inclinación. Obtenemos así un número de parábolas, cuya envolvente es la llamada parábola de seguridad (figura 15), ya que si una pieza de artillería tiene una velocidad inicial dada, sus proyectiles no pueden alcanzar más allá de la parábola de seguridad (es conocido, también de la enseñanza secundaria, que esta distancia máxima se alcanza con un lanzamiento de 45^o).

HIPÉRBOLA

Construcción 1: También la hipérbola puede ser descrita como la envolvente de una familia de líneas rectas[5]. Trazamos una circunferencia con centro en C y tomamos un punto S fuera de la circunferencia, entonces consideramos las rectas

[5]Se deja como ejercicio la construcción de la hipérbola con el método de los pliegues en el papel.

que pasan por puntos Q de la circunferencia y son perpendiculares al segmento SQ (figura 16). Entonces la envolvente de esta familia de rectas es la hipérbola, con sus dos ramas. Desde S podemos trazar dos tangentes SM y SN a la circunferencia, entonces los puntos sobre el arco de circunferencia entre M y N que están frente a S dan una de las ramas de la hipérbola, y los otros puntos de la circunferencia la otra. El punto fijo S es uno de los focos de la hipérbola, el otro foco S' es el simétrico de S respecto del centro C de la circunferencia; además, la misma construcción pero realizada desde S' nos da la misma hipérbola.

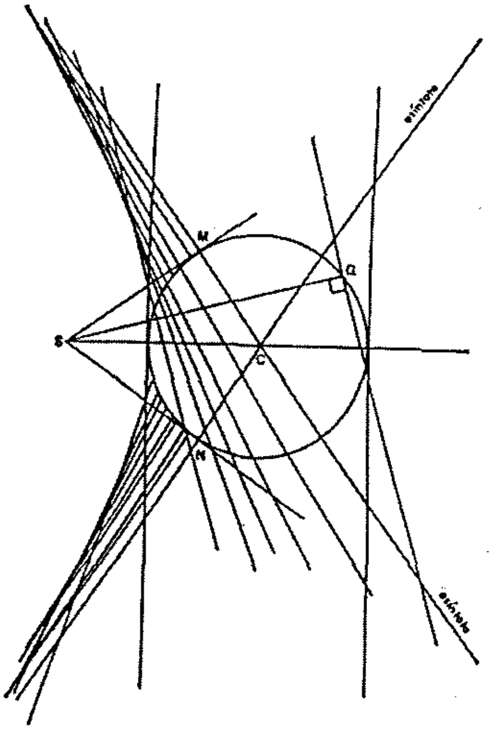

Figura 16

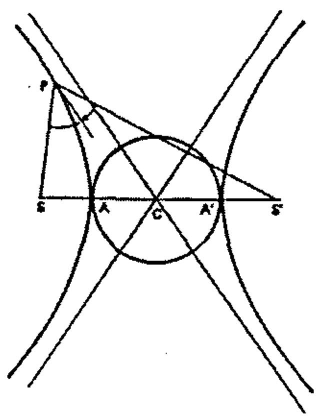

Figura 17

Existe de nuevo una propiedad fundamental, ahora para la hipérbola, que nos dice que si P es un punto sobre la hipérbola, la tangente en P a la hipérbola biseca el ángulo entre los segmentos SP y $S'P$ (como muestra la figura 17).

Esta propiedad es utilizada para construir lentes telescópicas cuyo espejo tenga forma hiperbólica. Además, algunas lentes telescópicas tienen como parte principal un espejo parabólico que refleja la luz hacia su foco y entonces un espejo hiperbólico, que comparte ese foco, la lleva hacia el otro foco de la hipérbola, situado de forma más conveniente.

Construcción 2: la construcción de la hipérbola como el lugar geométrico de los centros de unas ciertas circunferencias es similar a la de la elipse. Partimos de una circunferencia fija F y un punto fijo S, pero exterior a la circunferencia, entonces la hipérbola es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por S y son tangentes a la circunferecia F (figura 18).

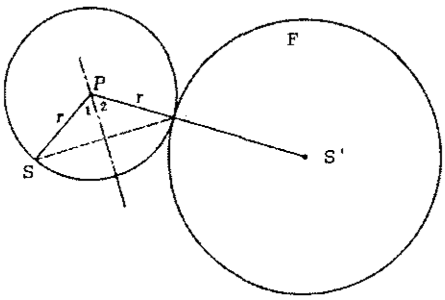

Figura 18

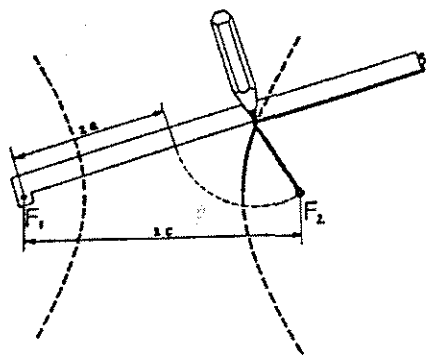

Figura 19

De nuevo, en esta construcción está presente otra propiedad fundamental de las hipérbolas: la resta de las distancias de los puntos P de la hipérbola a los focos S y S' es una constante (longitud del eje), es decir, $|d(P,S) - d(P,S')| = d(A,A')$. Esta propiedad nos permite una construcción práctica de la hipérbola como aparece en la figura 19.

Una de las aplicaciones de esta propiedad es el LORAN (Long Range Navigation), que es un sistema de navegación que permite a un avión ó a un barco determinar su posición mediante señales de radio. Supongamos que hay dos estaciones de radio, en dos puntos conocidos F_1 y F_2, que envían señales simultáneamente a un barco, donde se medirá el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ entre el tiempo en que se reciben las dos señales (en el barco no se necesita saber ni cuando se enviaron las señales ni cuanto han tardado en llegar); entonces la diferencia entre la distancia del barco a ambas estaciones es $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = c\,\Delta t$, donde c es la velocidad de las señales de radio, es decir, el barco estará situado en una posición P sobre la hipérbola de ecuación $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = c\,\Delta t$. Si además, tenemos una tercera estación de radio F_3, podemos obtener con toda exactitud la posición del barco.

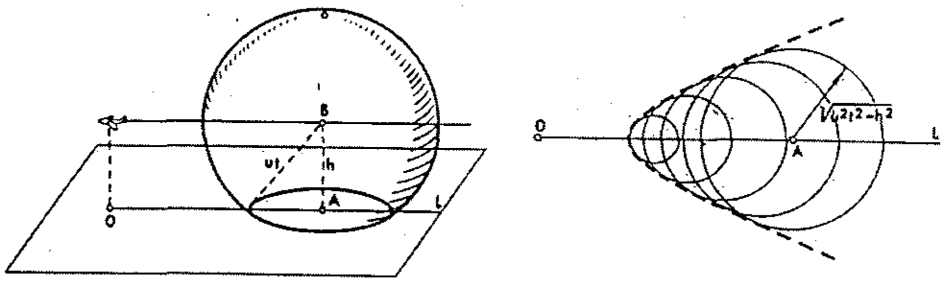

Figura 20

Construcción 3: nuestra próxima construcción está relacionada con la cuestión de si un avión que vuela a una cierta altura h sobre la superficie terrestre (que la supondremos plana) a una velocidad supersónica v ¿ cuál es, en el momento dado, la región de la superficie terrestre en cuyos puntos se ha oido ya ó se oye en ese momento el sonido del motor del avión ?

Supongamos que t segundos antes del momento dado el avión estaba en un punto B (a una distancia vt) y denotamos por A el punto proyección de B sobre el "plano" terrestre. Desde B el sonido se habrá propagado a todos los puntos que distan ut de B, es decir, a los puntos de la esfera de centro B y radio ut (u - velocidad del sonido). Si $ut \geq h$, el sonido llega a la tierra y la región donde se oye el avión será una circunferencia de centro A y radio $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$. La envolvente de la familia de circunferencias que se obtienen al variar B, es una hipérbola que nos delimita la zona donde se ha oido ya ó se oye en ese momento el sonido del avión (figura 20).

Construcción 4: (construcción punto a punto) Nuestro último método para construir una hipérbola se deriva de la expresión paramétrica de la misma $(x, y) = (a\,sect, b\,tant)$.

Consideramos dos circunferencias concéntricas centradas en el origen de coordenadas y una semirecta que parte del origen y que va a girar alrededor de este.

En cada posición de la semirecta el punto de la hipérbola determinado es aquel que tiene como coordenada x la distancia del origen al punto de intersección de la semirecta con la tangente, paralela al eje OX, a la primera circunferencia y como coordenada y la determinada por la intersección de la semirecta con la tangente, paralela al eje OY, a la segunda circunferencia (según lo descrito en la figura 21).

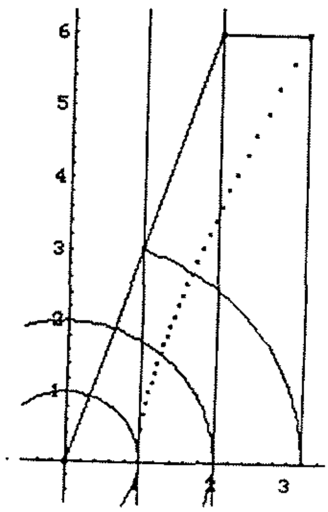

Figura 21

EPICICLOS

Los epiciclos fueron introducidos por los griegos para intentar describir el movimiento de los planetas, en concreto, fue Apollonius quien los consideró para tal fin). Un epiciclo es la curva descrita por un punto de una circunferencia al girar sobre otra; si la circunferencia que gira es exterior la curva obtenida es una epicicloide (como ejemplos tenemos la cardioide y la nefroide) y si es interior es una hipocicloide (dos ejemplos son la deltoide y la astroide)[6].

Antiguamente los hombres pensaban que la circunferencia es la curva perfecta y, en consecuencia, el movimiento de los planetas debía realizarse forzosamente en circunferencias concéntricas alrededor de la tierra (este sistema fué introducido por Eudoxo (400-347 a.c.) y ampliamente aceptado debido a la obra de Aristóteles (384-322 a.c.)). Sin embargo, muchos pensadores postularon que el sol era el centro más natural y se dieron cuenta de que entonces el movimiento de los planetas alrededor del sol no podía ser describiendo circunferencias, de modo que introdujeron los epiciclos para producir curvas que se adaptaran al movimiento de los planetas. Cuando se descubrió que estos tampoco se ajustaban a lo deseado se inventaron epiciclos cada

[6]Una bonita colección de dibujos de estas curvas se puede encontrar en [7].

vez más complejos, es decir, se hacía girar una circunferencia alrededor de otra que a su vez giraba alrededor de una inicial y epiciclos más complejos. Estos dos sistemas fueron rivales entre los "sabios", hasta que Kepler tras realizar unos cálculos extraordinariamente laboriosos a partir de las observaciones astronómicas de Brahe *(1546-1601), llegó a determinar que la trayectoria del planeta marte es una elipse* con el sol en uno de sus focos. El descubrimiento de Kepler se vió reforzado cuando Newton demostró matemáticamente que las órbitas de una partícula moviéndose en un campo de fuerzas gravitatorio (es decir, un campo de fuerzas central en el cual la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia) son las secciones cónicas. Las órbitas pueden ser elipses, incluyendo la circunferencia, como en el caso de los planetas, algunos cometas (como el Halley) ó los satélites; también pueden ser parábolas ó hipérbolas como ocurre con algunos cometas (claro que este tipo de cometas cuando pasan cerca de la tierra lo hacen sólo en esa ocasión).

Los epiciclos fueron redescubiertos en el renacimiento, que como ya ha quedado patente con las secciones cónicas fué una época de esplendor en el estudio de las curvas y sus aplicaciones. Los epiciclos, junto a las cicloides que pertenecen a la misma familia, fueron nuevamente consideradas por el danés Roemer (1644-1782) cuando estudiaba la mejor forma para los engranajes dentados de las máquinas (las elipses y las hipérbolas también fueron utilizadas para diseñar engranajes para máquinas). También se estudiaron en relación a la caústica, es decir, al estudio de los rayos de luz que partiendo de un punto se reflejan en una curva ó superficie.

Daniel Bernoulli (1700-1782) descubrió el bello teorema de la doble generación, que nos dice que dada la circunferencia fija de radio l, el epicicloide con la circunferencia que gira de radio b es igual al hipocicloide con circunferencia que gira de radio $b + l$, es decir, todo epicicloide puede ser generado como un hipocicloide; sin embargo, el recíproco es cierto si, y sólo si, la circunferencia que gira es mayor que la fija.

CARDIOIDE

El nombre cardioide (en forma de corazón) fué empleado por vez primera por De Castillon en The Philosophical Transactions of the Royal Society de 1741.

Construcción 1: la cardioide es una epicicloide, en concreto, es la curva descrita por un punto de una circunferencia, cuando esta gira sobre una circunferencia fija de igual radio (figura 22). Obtenemos así una curva regular que posee una cúspide.

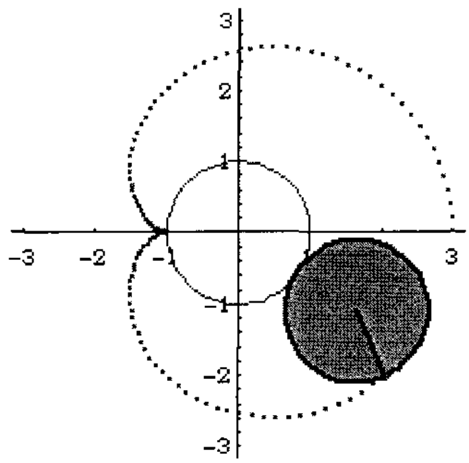

Figura 22

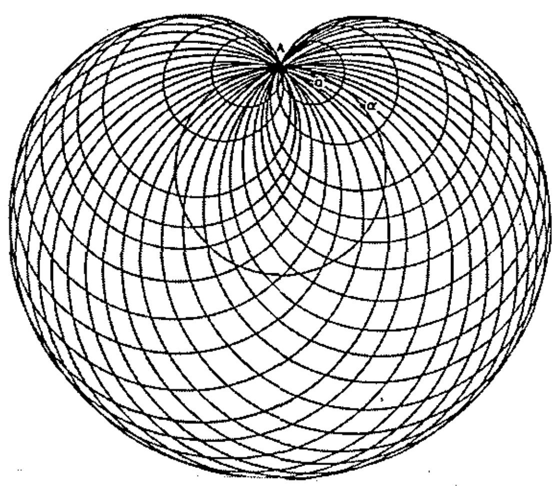

Figura 23

Construcción 2: la siguiente construcción de la cardioide es como la envolvente de una familia de circunferencias. Trazamos una circunferencia fija y sobre ella señalamos un punto A, que va a permanecer fijo. Para todo punto Q de la circunferencia fija, trazamos una circunferencia de centro Q y radio QA (figura 23). La envolvente de esta familia de circunferencias es la cardioide y el punto fijo A es su cúspide.

Construcción 3: para obtener la cardioide como lugar geométrico de puntos, consideramos de nuevo una circunferencia fija de diámetro a y un punto fijo A en ella, unimos el punto A a cada punto Q de la circunferencia y prolongamos AQ una longitud fija a que nos conduce a un punto P (véase la figura 24). Entonces, el lugar geométrico de los puntos P es la cardioide.

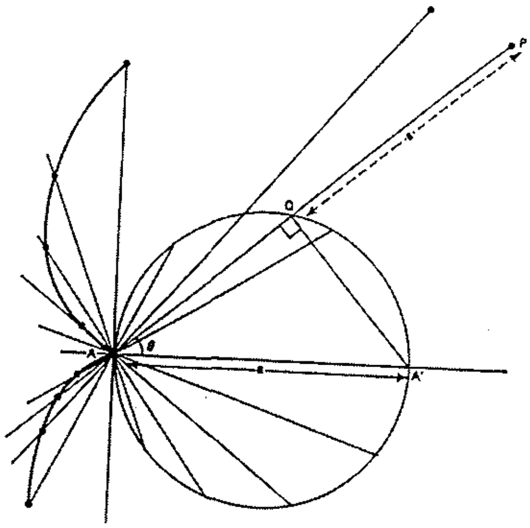

Figura 24

Construcción 4: el último método de construcción de la cardioide que aquí vamos a considerar es el llamado bordado matemático, que no es más que el trabajo de manualidades que nos mandaban hacer en la enseñanza primaria y que consistía en clavar clavos de una determinada manera sobre una circunferencia y, a continuación, se unían los clavos de diferentes formas con hilos de colores. En este caso, consideramos una circunferencia que dividimos en arcos iguales que abarcan ángulos de 10^o (es decir, se obtienen 36 marcas). Señalamos una de las marcas como el punto A y el extremo opuesto de su diámetro como A'. Entonces, empezando en A, se da la vuelta alrededor de la circunferencia y se van enumerando por el exterior las marcas como $0, 1, 2, \ldots$ (el punto A es el 0) y se concluye en el punto A que señalamos como 36. Comenzamos ahora en el punto A', se da la vuelta alrededor de la circunferencia enumerando, ahora por el interior, las marcas a intervalos de 20^o, marcando A' como 0 (figura 25). Unimos ahora los puntos situados en el interior de la circunferencia a los puntos del exterior que tengan el mismo número. La "envolvente" es la cardioide (para obtener la cardioide completa habrá que proseguir la enumeración más allá de los puntos iniciales, es decir, 0 es 36, 1 es 37, etc.).

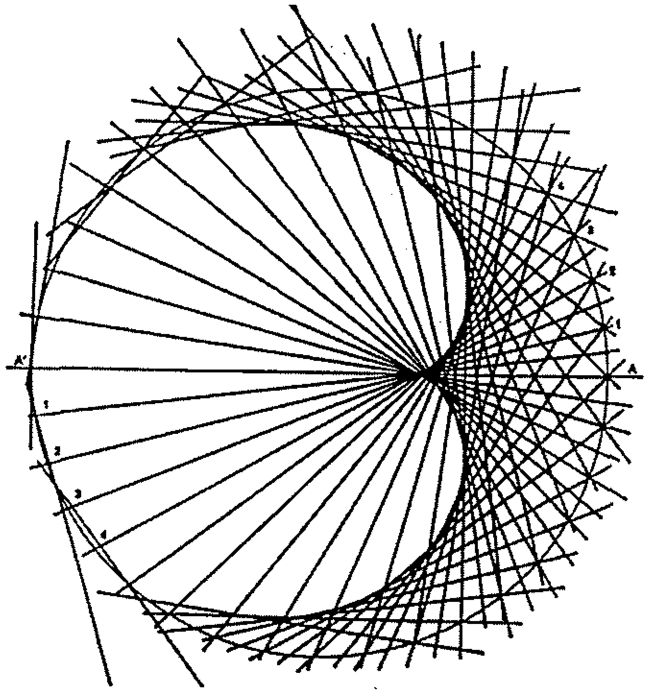

Figura 25

A continuación, dos breves comentarios sobre la cardioide. Por un lado que la parte más obvia del conjunto de Mandelbrot es una cardioide y además van apareciendo cardioides cada vez más pequeñas hasta el infinito. Por otra parte existe un tipo de microfonos que se llaman microfonos cardioide que, contrariamente a los microfonos multidireccionales, cumplen la propiedad de que la zona donde recogen sonido es una zona encerrada por una cardioide y el microfono estaría colocado en su cúspide.

NEFROIDE

Proctor en 1878 fue quien dió el nombre de nefroide (con forma de riñón) a esta curva.

Construcción 1: la nefroide es la epicicloide que obtenemos al girar una circunferencia sobre de una circunferencia fija de doble radio (figura 26). Esta es una curva regular con dos cúspides.

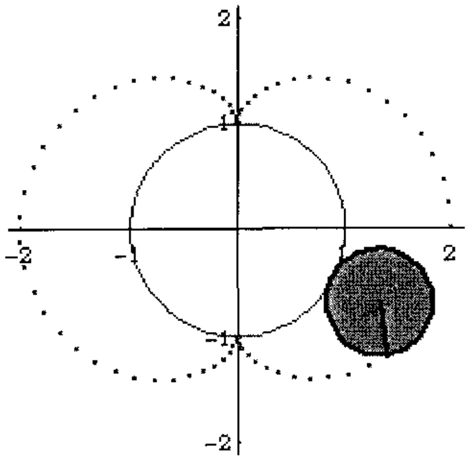

Figura 26

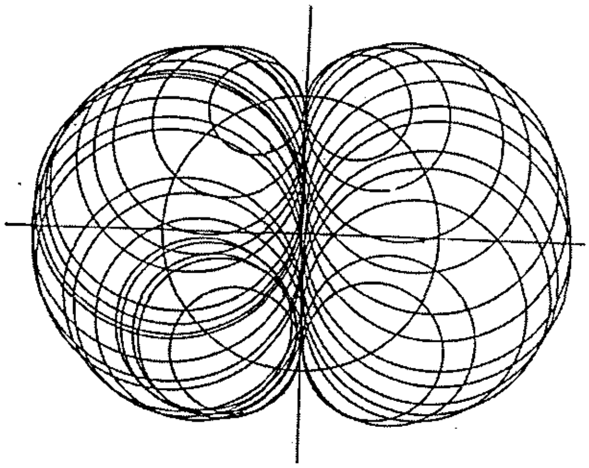

Figura 27

Construcción 2: la nefroide puede también obtenerse como la envolvente de una familia de circunferencias. De nuevo consideramos una circunferencia fija y fijamos uno de sus diámetros, la línea l, entonces para cada punto Q de la circunferencia fija, se considera la circunferencia que tiene como centro Q y que es tangente a la recta l (figura 27). La envolvente de esta familia de circunferencias es la nefroide, cuyas cúspides son l nferencia fija.

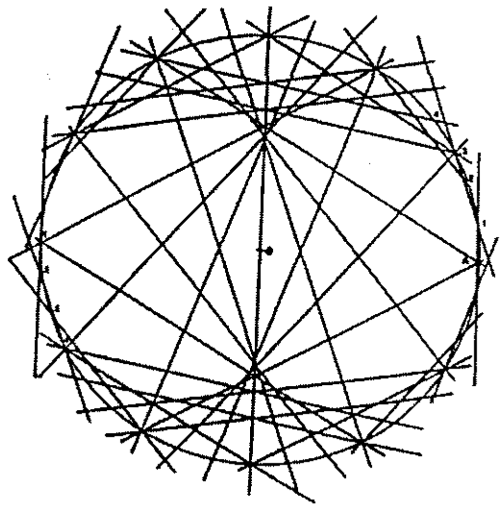

Figura 28

Construcción 3: la nefroide puede obtenerse como bordado matemático, de la siguiente forma. Se considera una circunferencia que hemos dividido en 36 partes iguales, hemos llamado a una marca punto A y a partir de él hemos enumerado las marcas como $0, 1, 2, 3, \ldots$. Entonces, se une el punto n al punto $3n$, obteniéndose así la nefroide como la "envolvente" (figura 28).

DELTOIDE y ASTROIDE

Estas dos hipocicloides reciben su nombre de la forma que tienen, el deltoide por su semejanza con la letra griega delta mayúscula Δ y el astroide con una estrella, un astro.

Construcción 1: la deltoide y la astroide son dos hipocicloides (que no pueden ser generadas como epicicloides) que tienen 3 y 4 cúspides, respectivamente, y que pueden ser descritas como la trayectoria de un punto de una circunferencia que girar en el interior de otra circunferencia de radio 3 (resp. 4) veces mayor que el de la primera circunferencia (figuras 29 y 30).

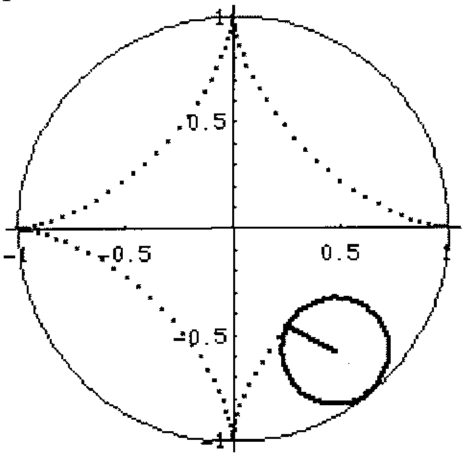

Figura 29

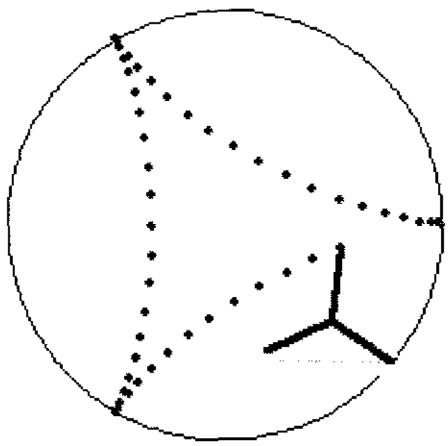

Figura 30

Construcción 2: podemos construir estas dos curvas como envolventes de una familia de curvas; en el caso de la deltoide, de rectas y también de elipses, como se muestra en las figuras 31 y 32, y en el caso de la astroide de rectas, con la ayuda de una circunferencia y un triángulo inscrito en ella (ver figura 33)[7].

[7] Se deja al lector que piense en estas construcciones a partir de las figuras que se muestran.

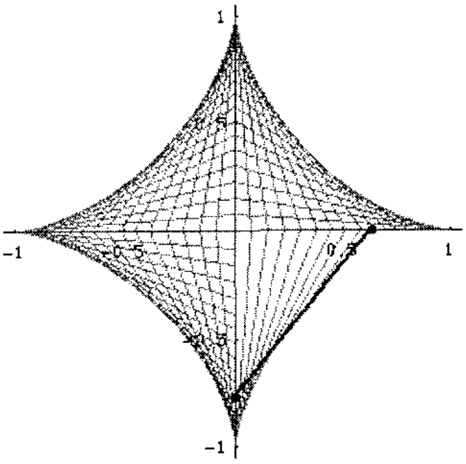

Figura 31

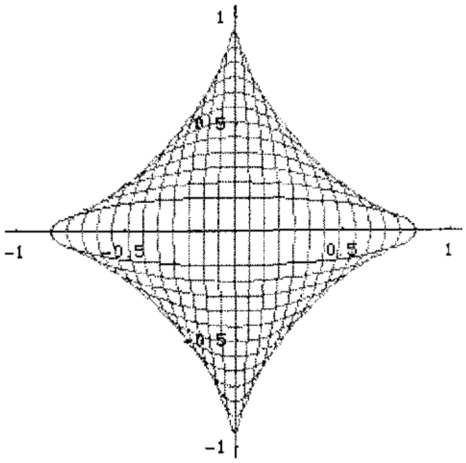

Figura 32

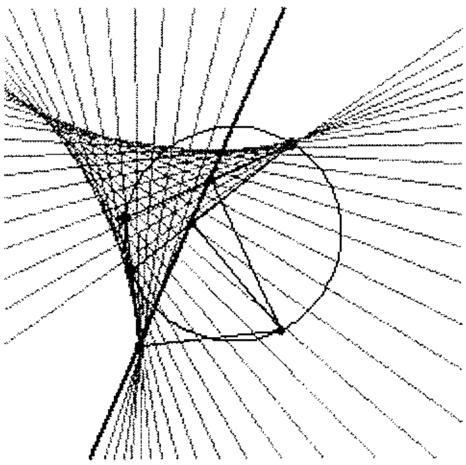

Figura 33

Bibliografía

[1] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Company, New York, 1952.

[2] C. Zwikker: *The advanced geometry of plane curves and their application*, Dover Publications Inc., New York, 1963.

[3] H. Eves: *A survey of geometry*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1972.

[4] D. Pedoe: *La geometría en el arte*, Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1979.

[5] C. Stanley Ogilvy: *Excursions in geometry*, Dover Publications Inc., New York, 1990.

[6] G. A. Jennings: *Modern geometry with applications*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[7] *http://www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir*

[8] *http://www.cedarville/~sellersj/newconics*