

# El plano hiperbólico: algunos aspectos curiosos

por

Olga Gil Medrano, Universidad de Valencia

## 1. INTRODUCCIÓN

Cuando nos encontramos con un objeto o idea que desconocemos, es muy probable que la causa que nos mueva hacia él sea la curiosidad. Según los casos, puede ésta desaparecer pronto o bien puede convertirse en interés. Mi objetivo en estas notas es, al igual que lo fue en la charla que justifica su existencia, despertar el interés por la geometría del espacio hiperbólico. De entre sus muchas propiedades, he elegido aquí una pequeña muestra.

Aunque supongo en quien esto lea cierta familiaridad con el concepto de superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  y con los hechos básicos de su geometría, comenzaré recordando que, gracias al producto interior usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $\mathbb{R}^3$ , para cada punto  $p \in S$  se tiene definida en su plano tangente, que se denota  $T_p S$ , una forma bilineal simétrica definida positiva, que se denomina primera forma fundamental de la superficie en el punto  $p$  y que representaré por  $g^p$ . Se tiene también definido, aunque sólo sea localmente, un campo de vectores normal unitario.

Haciendo uso de este campo se define la curvatura de Gauss como  $K_p = \det W_p$ , donde  $W_p$  es, salvo el signo, la diferencial de la aplicación normal. Definíamos también las geodésicas como aquellas curvas cuya aceleración se

mantiene siempre colineal al campo normal.

Las superficies más sencillas son los planos. En efecto, ya que el normal unitario es constante, la aplicación  $W_p$  es nula y por tanto la curvatura de Gauss se anula. Por otro lado, para una curva plana la aceleración sólo puede ser normal al plano si se anula. De aquí, las geodésicas han de ser las rectas.

El plano es el terreno de la geometría elemental que conocemos desde pequeños. Ya que la primera forma fundamental nos permite definir ángulos, longitudes y *rectas*, en cualquier superficie tenemos una geometría, aunque no todas se prestan de igual forma a ser consideradas generalizaciones de la geometría euclídea.

Aunque a pequeña escala las geodésicas se comportan como las rectas, a una escala mayor y dependiendo también de la topología de la superficie, esto está lejos de ser cierto en general. Hay algunas superficies que podríamos considerar, sin embargo, como *modélicas* que son aquellas de curvatura constante; salvo homotecias, podemos suponer que esta constante es 1, 0 o  $-1$ . Una propiedad de las rectas del plano es la de tener como intervalo maximal de definición todo  $\mathbb{R}$ , por esto vamos a pedirle a las superficies *modélicas* que sean completas.

Ahora bien, ya en 1899 Liebmann demostró que una superficie – sin borde, sin singularidades y conexa – que tenga curvatura de Gauss igual a 1 ha de ser la esfera. Lo que vendría a decirnos que superficies buenas hay pocas. La situación en el caso de que la curvatura de Gauss sea igual a  $-1$  es todavía peor pues Hilbert demostró en 1901 que en  $\mathbb{R}^3$  no hay superficies completas con esta curvatura de Gauss. Por ejemplo, la pseudoesfera, que se obtiene por revolución de la curva  $\alpha(t) = (\sin t, \ln \operatorname{tg}(\frac{t}{2}) + \cos t)$  que se denomina tractriz, no es completa.

## 2. EL PLANO HIPERBÓLICO COMO SUPERFICIE DEL ESPACIO DE MINKOWSKI

Ya que en el espacio euclídeo no podemos encontrar el modelo de curvatura negativa que buscamos, algo tendremos que cambiar. Vamos a considerar en  $\mathbb{R}^3$  una forma bilineal simétrica, no degenerada, de signatura 1; en concreto, la métrica de Minkowski que viene dada por la expresión  $\langle (x, y, t), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \rangle_1 = x\bar{x} + y\bar{y} - t\bar{t}$ .

Dada una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ , si para cada punto  $p \in S$  su plano tangente  $T_p S$  es no degenerado – es decir, si  $g^p$  es no degenerada – puede considerarse en  $S$  la semimétrica determinada por  $\langle , \rangle_1$ .

De la misma forma que en  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se definió la esfera unidad como

$$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 ; \langle p, p \rangle = 1\},$$

en  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  podemos considerar la cuádrica

$$Q(-1) = \{p \in \mathbb{R}^3 ; \langle p, p \rangle_1 = -1\} = \{(x, y, t) ; x^2 + y^2 = t^2 - 1\},$$

que es el hiperboloide de dos hojas; la componente conexa con  $t > 0$  se denomina plano hiperbólico y se denota  $H^2$ .

Tenemos que el espacio tangente en un punto  $p$  de  $H^2$  es  $T_p H^2 = \{p\}^\perp$  y así, podemos definir un normal unitario como  $N(p) = p$ . Por lo tanto, el operador de Weingarten cumple  $W_p = -\text{Id}$ , igual que ocurre para la esfera. Ahora bien, en el caso de una semimétrica la fórmula que nos da la curvatura de Gauss es  $K_p = \epsilon \det W_p$ , con  $\epsilon = \langle N, N \rangle_1$  y de aquí obtenemos que la curvatura de  $H^2$  es idénticamente igual a  $-1$ .

Una observación importante es que, aunque la semimétrica de Minkowski tenga signatura 1, la métrica inducida en el plano hiperbólico es definida positiva y por tanto  $g^p$  es una primera forma fundamental, en el sentido usual de superficies.

Ya que, también en este caso, una curva es geodésica si y sólo si su aceleración se mantiene siempre colineal al vector de posición, con una demostración completamente análoga a la que suele darse en el caso de la esfera, es fácil comprobar que la geodésica de  $H^2$  que sale de  $p$  con velocidad  $v \in T_p M$  es la intersección del plano generado por  $p$  y  $v$  con  $H^2$ , parametrizada proporcionalmente a su longitud de arco. En concreto, si  $\|v\| = 1$  esta curva es  $c(s) = \text{ch}(s)p + \text{sh}(s)v$ . Para  $p = (0, 0, 1)$ , se trata de hipérbolas, como puede verse en la Figura 1.



plano hiperbólico. De entre los muchos posibles voy a interesarme por el que recibe el nombre de semiplano de Poincaré.

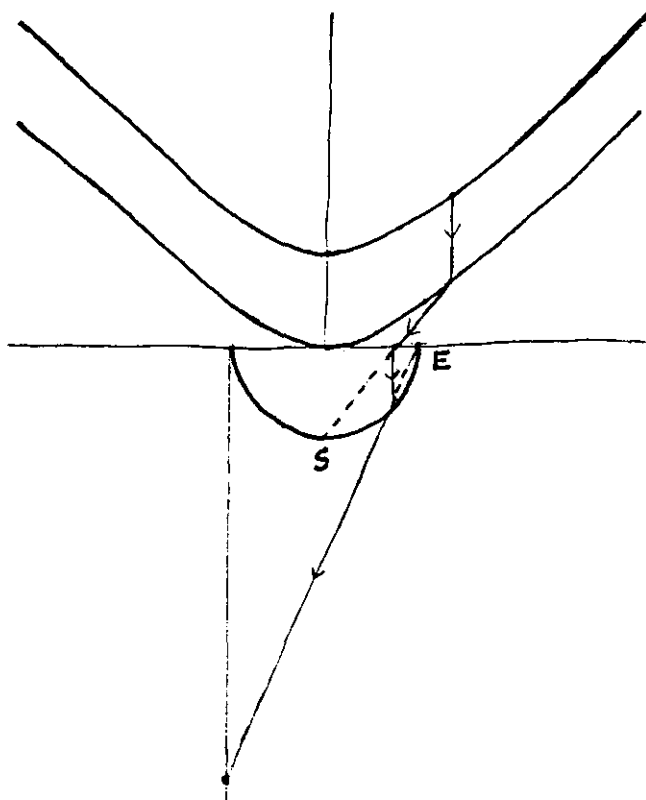


Figura 2

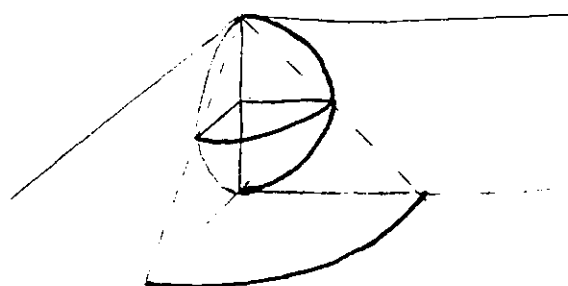


Figura 3

Tomamos como abierto el semiplano positivo  $\Gamma = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 ; v > 0\}$  y como parametrización  $X$  la aplicación inversa de  $\varphi : H^2 \rightarrow \Gamma$  donde

$$\varphi(x, y, t) = \frac{1}{t-y} (x, 1).$$

Más interesante que su fórmula es la descripción geométrica, un esquema de la cual puede verse en las Figuras 2 y 3. Dado un punto del hiperboloide, procedemos en primer lugar a una translación de vector  $(0, 0, -1)$ , seguida de una proyección estereográfica desde  $(0, 0, -1)$  sobre el plano  $t = 0$ , esto es  $(x, y, t) \rightarrow \frac{1}{t+1}(x, y)$ . Con esto hemos enviado cada punto del hiperboloide en uno de la bola unidad abierta. Aplicándole ahora la parametrización usual del hemisferio sur de la esfera,

$(u, v) \rightarrow (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$ , seguida de la proyección estereográfica desde  $(0, 1, 0)$  en el plano  $y = -1$ , que se expresa como  $(x, y, t) \rightarrow (\frac{2x}{1-y}, -1, \frac{2y}{1-y})$ , obtenemos un punto en el semiplano  $\{(x, -1, t) ; t < 0\}$  que podemos identificar con  $\Gamma$ , mediante la aplicación  $(x, -1, t) \rightarrow \frac{1}{2}(x, -t)$ .

La parametrización  $X$ , tiene por expresión

$$X(u, v) = \frac{1}{2v}(2u, u^2 + v^2 + 1, u^2 + v^2 - 1).$$

Un cálculo directo nos da

$$X_u = \frac{1}{v}(1, u, u) \quad X_v = \frac{1}{2v^2}(-2u, v^2 - u^2 + 1, v^2 - u^2 - 1)$$

de donde  $g_{uv} = 0$  y  $g_{uu} = g_{vv} = v^{-2}$ .

Como se ve, la expresión de la primera forma fundamental es muy sencilla y podríamos calcular los elementos geométricos, analíticamente, con cierta facilidad, véase por ejemplo [2], pg. 49. Sin embargo, vamos a hacerlo utilizando la información que ya tenemos, lo que resulta mucho más interesante para un geómetra.

La aplicación  $\varphi$  es una isometría entre el espacio hiperbólico de dimensión 2 y el plano de Poincaré y por tanto la curvatura de éste será constante igual a  $-1$ .

Las geodésicas serán de la forma  $\alpha(s) = \varphi(c(s))$ , siendo  $c(s)$  una geodésica del espacio hiperbólico. En particular, las geodésicas que salen del punto  $(0, 1) = \varphi(p)$  con vector tangente unitario  $(w_1, w_2) = \varphi_{*p}(w)$ , donde  $p = (0, 0, 1)$  y  $w = (w_1, w_2, 0)$ , son  $\alpha(s) = \varphi(\text{ch}(s)p + \text{sh}(s)w)$ .

No es difícil comprobar entonces que

$$\alpha(s) = \frac{1}{\text{ch}(s) - \text{sh}(s)w_2}(w_1 \text{sh}(s), 1).$$

De donde, si  $w_1 = 0$  entonces  $\alpha(s)$  recorre el eje vertical y si  $w_1 \neq 0$  entonces  $\alpha(s)$  recorre la circunferencia de centro  $(\frac{w_1}{w_2}, 0)$  y radio  $|w_1|^{-1}$ . Las imágenes de estas geodésicas pueden verse en la Figura 4.

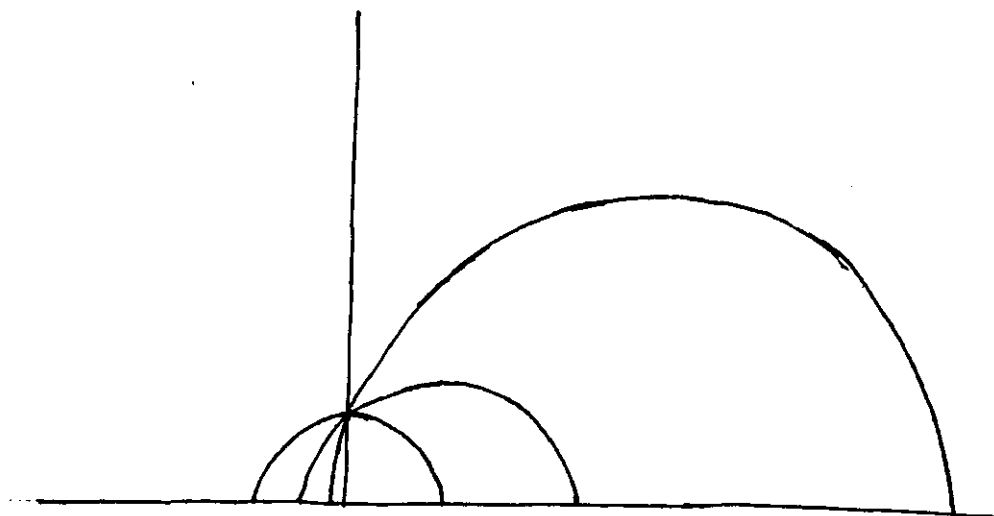


Figura 4

Las geodésicas que parten de un punto arbitrario  $(u_0, v_0) \in \Gamma$  tienen la misma forma ya que la aplicación  $L : \Gamma \rightarrow \Gamma$  dada por  $L(u, v) = v_0(u, v) + (u_0, 0)$  es una isometría tal que  $L(0, 1) = (u_0, v_0)$ . Esta aplicación manda rectas verticales en rectas verticales y semicírculos en semicírculos.

Vemos pues que dados dos puntos del plano de Poincaré siempre exista una isometría que lleva uno en el otro, esta es una de las propiedades que suele exigírsele también a una superficie para ser considerada como *modélica*.

No es difícil ver que toda bola métrica, o geodésica, del plano hiperbólico en el punto  $p = (0, 0, 1)$  tiene como borde la intersección del hiperboloide con un plano horizontal  $t = a$ , con  $a > 1$ . La imagen de esta bola por la aplicación  $\varphi$ , que será una bola geodésica del punto  $(0, 1)$  del plano de Poincaré, tiene por borde la circunferencia de centro  $(0, a)$  y de radio  $\sqrt{a^2 - 1}$ .

#### 4. ANTENAS HIPERBÓLICAS

Podríamos pensar que hemos construido un modelo de espacio hiperbólico en el que las hipérbolas no tienen ningún papel especial: desde luego no aparecen entre las geodésicas – es decir, entre las “rectas” – ni tampoco entre las “circunferencias” – esto es, los bordes de las bolas geodésicas – .

Lo que quiero demostrar, a continuación, es que en realidad aquí aparecen

haciendo el papel de las parábolas. Para ello necesito, en primer lugar, dar una interpretación de estas curvas en términos de rectas y de ángulos, que pueda ser mimetizada en el plano de Poincaré.

*Las parábolas son las curvas planas que tienen la propiedad de reflejar en un mismo punto todos los rayos de un haz de rectas paralelas. Esta es la razón por la que los faros y antenas se construyen con un perfil parabólico.*

En efecto, si busco una curva en  $\mathbb{R}^2$  con esta propiedad y supongo, por simplificar, que es una gráfica  $(x, f(x))$ , como puede verse en la Figura 5, la recta vertical que incide en  $(x_0, f(x_0))$  se refleja en la recta que tiene por ecuación

$$f(x_0) - p_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)(x_0 - p_1),$$

siendo  $\theta = f'(x_0)$  la pendiente de la tangente a la curva en  $(x_0, f(x_0))$ .

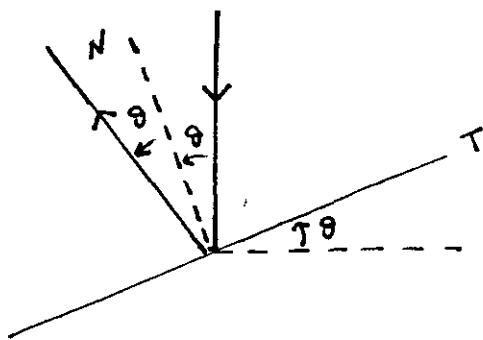


Figura 5

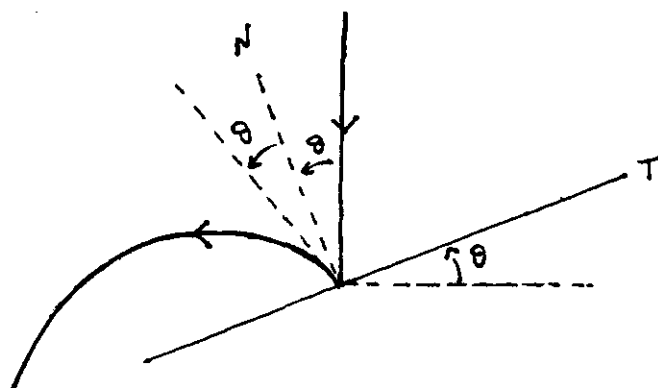


Figura 6

Si tenemos en cuenta que  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) = \frac{\operatorname{tg}^2\theta - 1}{2\operatorname{tg}\theta}$  y suponemos, por simplificar, que el foco donde se cortan todas las rectas está en  $(0, 0)$ , la función  $f$  debe ser solución de la ecuación diferencial

$$x = \frac{2ff'}{(f')^2 - 1}.$$

El resultado se obtiene comprobando que las soluciones son de la forma  $f(x) = ax^2 - \frac{1}{4a}$ .

Lo que sigue está basado en [3]. Si nos planteamos el mismo problema en el plano de Poincaré  $\Gamma$ , debemos sustituir las rectas por geodésicas, pero los ángulos



entre vectores tienen el mismo valor que en el plano euclídeo, pues ambas métricas están conformemente relacionadas.

Suponemos como antes una función  $f$  tal que las geodésicas verticales – en este caso rectas – que inciden en la curva  $(x, f(x))$  se reflejan en geodésicas – en este caso semicírculos– que se cortan en un punto común.

Como se ve en la Figura 6, la recta vertical que incide en  $(x_0, f(x_0))$  se refleja en un semicírculo con centro  $(x_c, 0)$  y cuya recta tangente en  $(x_0, f(x_0))$  tiene pendiente  $m = \frac{\operatorname{tg}^2 \theta - 1}{2 \operatorname{tg} \theta}$ . Como el centro del semicírculo está situado en la recta normal, es decir aquella de pendiente  $-\frac{1}{m}$ , ha de cumplirse que  $x_c - x_0 = -mf(x_0)$  y por lo tanto, el semicírculo tendrá por ecuación

$$(x - x_c)^2 + y^2 = (x_c - x_0)^2 + (f(x_0))^2 = (m^2 + 1)(f(x_0))^2.$$

Si suponemos, por simplificar, que el foco está en el eje  $x = 0$ , el punto buscado  $(0, y_0)$  debe verificar

$$y_0^2 = (m^2 + 1)(f(x_0))^2 - (x_c)^2 = (f(x_0))^2 - (x_0)^2 - 2mx_0f(x_0),$$

de donde la función  $f$  ha de ser solución de la ecuación diferencial

$$-x^2 + f^2 - \frac{xf}{f'}((f')^2 - 1) = \text{cte.}$$

Si tomamos  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ , es fácil comprobar que se trata de una solución y que el valor de la constante es precisamente 2. De aquí el punto de intersección de las geodésicas está situado en  $(0, \sqrt{2})$ , que es el foco de la hipérbola.

La Figura 7 permite comparar las propiedades de reflexión en el plano euclídeo y en el plano de Poincaré. Con todo esto he probado lo siguiente:

*Las parábolas del plano de Poincaré son hipérbolas.*

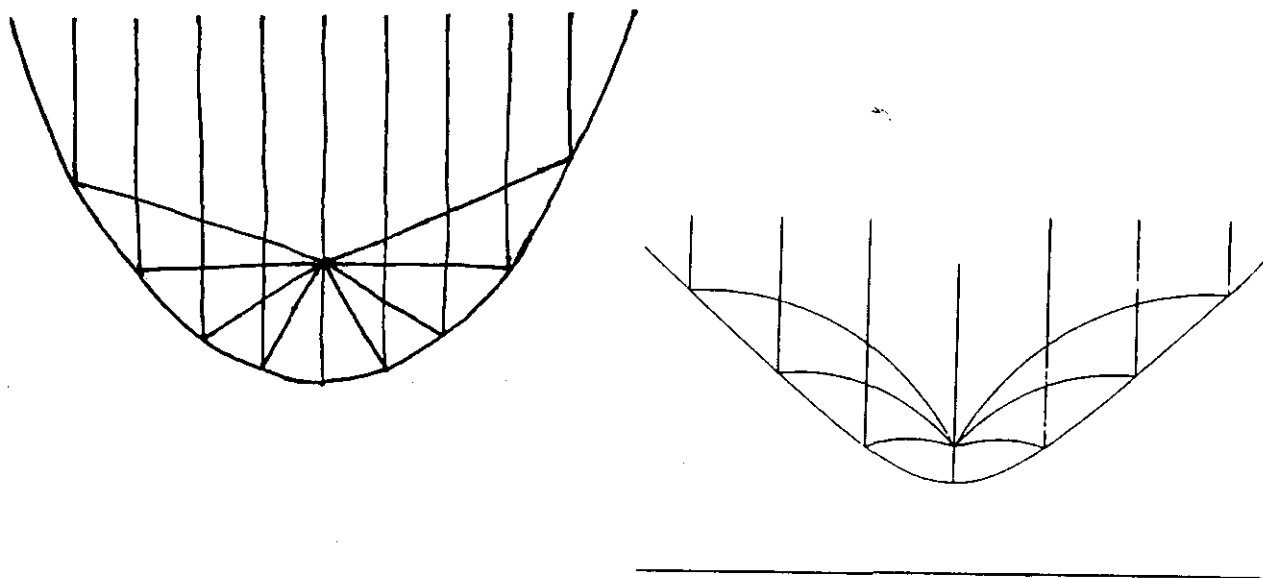


Figura 7

## 5. REFERENCIAS

- [1] Cordero, L. A. ; Fernández, M. ; Gray, A., *Geometría diferencial de curvas y superficies con Matemática*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- [2] Morgan, F., *Riemannian Geometry. A Beginner's Guide*, Jones and Barlett Pub., 1993.
- [3] Perline, R., Non-Euclidean Flashlights, *Amer. Math. Month.*, 1996, 377-385.