Los tres problemas clásicos

por

Santiago Fernández, COP de Sestao

Dice el historiador matemático Morris Kline (1) que: "*La reconstrucción de la historia de la matemática griega, basada en las fuentes originales, ha resultado una tarea gigantesca y complicada.*"

En efecto, la mayoría de los conocimientos matemáticos griegos provienen de dos comentaristas: Proclo (410-485 d. J.C.) y Pappus (siglo III d. J.C.), además se disponen de pequeñísimos fragmentos citados por Simplicio (primera mitad del siglo VI d. J.C.) y tomado literalmente de "La Historia de la Geometría" de Eudemo; existen fragmentos de Arquitas recogidos por los matemáticos alejandrinos y por último han resultado de enorme valor para la historia de la matemática griega los escritos de los filósofos griegos y especialmente los de Platón y Aristóteles.

Lo que estamos en condiciones de afirmar, de acuerdo a las fuentes disponibles, es que:

Hacia el siglo V a. J.C. comenzaron a circular por la Grecia antigua una serie de problemas que cautivaron a los matemáticos de la época. ¿Cómo surgieron?. Hay muchas historias detrás de los mismos, pero seguramente su origen se encuentre relacionado con el afán de solucionar problemas análogos a otros, que ya fueron solucionados anteriormente.

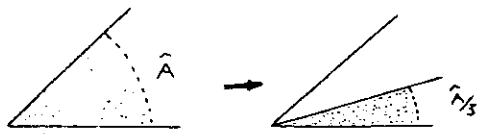
Entre los muchos problemas planteados en este contexto hay tres que traspasaron la "barrera del tiempo" e interesaron de manera especial a los científicos griegos, nos referimos a: el problema de la cuadratura del círculo, el problema de la trisección del ángulo y el problema de la duplicación del cubo. El enunciado de los tres problemas es distinto, si bien los tres pertenecen al ámbito geométrico, pero curiosamente, los tres están ligados a un mismo destino y desenlace.

ENUNCIADO DE LOS TRES PROBLEMAS

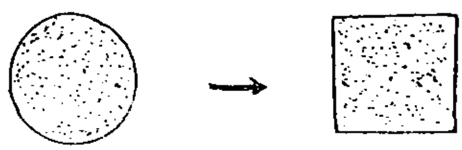
Utilizando únicamente regla y compás:

1) Dado un cubo cualquiera, construir otro cubo de volumen el doble del anterior: **duplicación del cubo**

2) Dado un ángulo cualquiera, construir un ángulo que sea la tercera parte del ángulo dado: **trisección del ángulo**



3) Dado un círculo cualquiera, construir un cuadrado que tenga el mismo área que el círculo: **cuadratura del círculo**



Como puede observarse, estos tres problemas surgen de manera natural si tratamos de generalizar los que a continuación se proponen:

Utilizando únicamente regla y compás:

1) Dado un cuadrado cualquiera, construir otro cuadrado de área el doble del anterior: **duplicación del cuadrado.**

2) Dado un ángulo cualquiera, construir un ángulo que sea la mitad del ángulo dado: **bisección del ángulo.**

3) Dado un polígono cualquiera, construir un cuadrado cuya área sea igual a la del polígono: **cuadratura del polígono.**

La solución de los mismos es elemental, tan sólo son necesarios los conocimientos de: teorema de la altura y el teorema de Pitágoras, así como la medida del ángulo inscrito en una circunferencia.

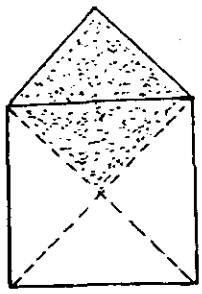


fig 1

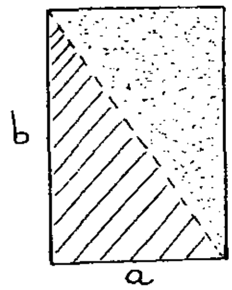


fig 2

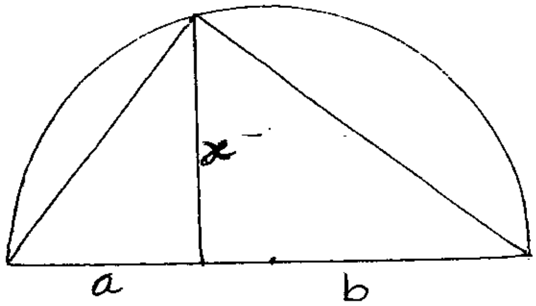


fig 3

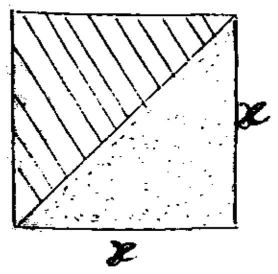


fig 4

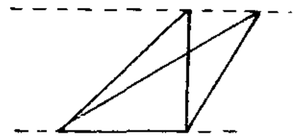


fig 5

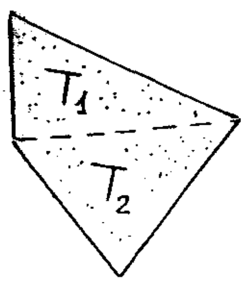


fig 6

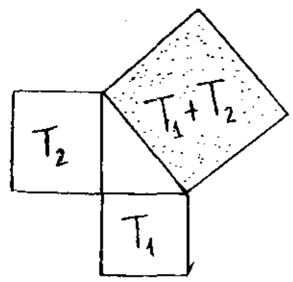
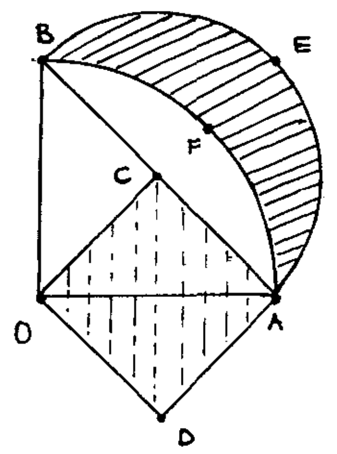


fig 7

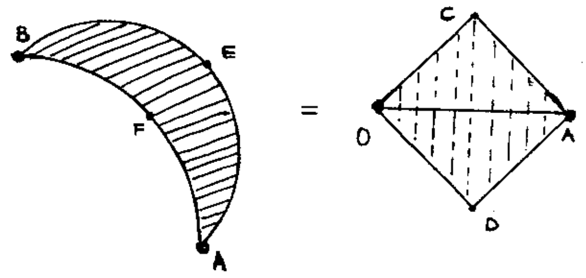
Una vez examinados los esquemas y razonamientos anteriores, llegamos a una serie de conclusiones ciertamente interesantes. Así, la figura 1 resuelve de manera inmediata el problema de la duplicación del cuadrado. Las figuras 2, 3 y 4 nos muestran la manera de cuadrar el rectángulo de dimensiones a y b mediante el teorema de la altura. La figura 5 nos sugiere la manera de cuadrar un triángulo cualquiera. Mientras que las figuras 6 y 7 nos dan la pauta para cuadrar un cuadrilátero cualquiera y nos deja a las puertas de cuadrar cualquier polígono convexo.

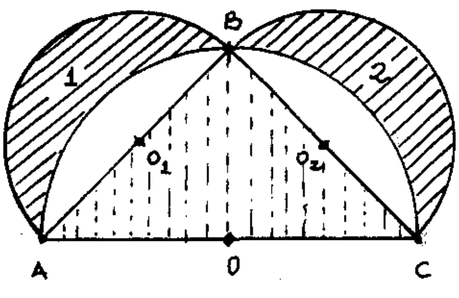
Podemos, por tanto, recapitular y decir que: son cuadrables los triángulos, los rectángulos, los cuadriláteros, pentágonos, ... y en general cualquier polígono. Así, estamos en condiciones de preguntarnos: ¿Por qué no va a ser cuadrable un círculo? Además, Hipócrates de Quíos (470-400 a. J.C.) demostró que ciertos trozos de círculos llamados *lúnulas* son cuadrables. En particular, obtuvo que las siguientes lúnulas son cuadrables:



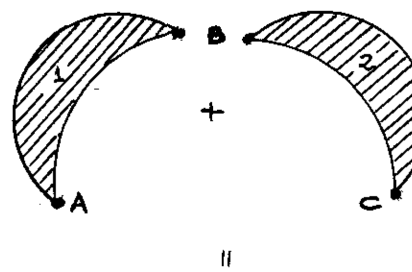
- $\widehat{BEA}$ arco de circunferencia con centro en C
- $\widehat{BFA}$ arco de circunferencia con centro en O

área lúnula área cuadrado



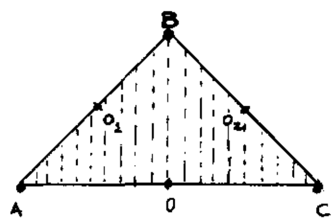


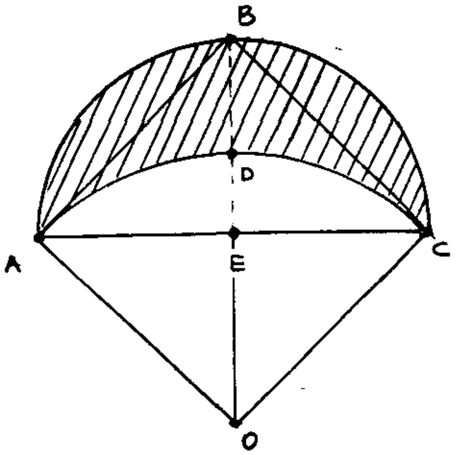
área



||

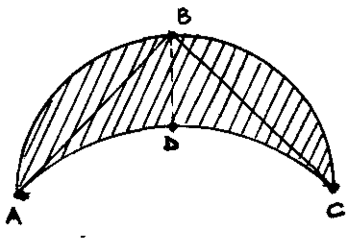
área



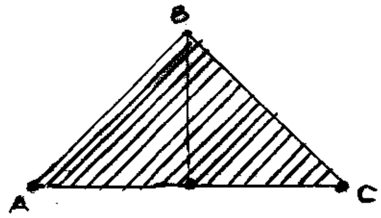


- $\widehat{ABC}$ arco de circunferencia con centro en E
- $\widehat{ADC}$ arco de circunferencia con centro en O

área lúnula | área triángulo rectángulo



=



Por tanto: ¿Qué razón habría para no ser cuadrable todo el círculo? En definitiva, ¿Qué podría fallar en el paso de lo particular a lo general?

Para mí, el problema más interesante fue el de la duplicación del cubo. El deseo de buscar dos medias proporcionales entre dos valores dados pudo ser su origen, esto es: dados a y b, calcular dos valores x e y, tales que verifiquen las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

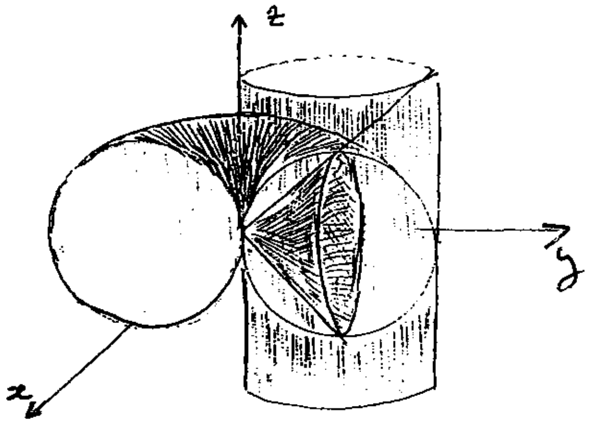
En el caso particular de que $b = 2a$, obtenemos que el valor de x es el valor del lado del cubo que estamos buscando.

Nos surge por tanto, la siguiente pregunta: ¿Cómo construir los valores x e y medias proporcionales entre los valores a y $2a$?

El concepto de introducir dos medias proporcionales x e y entre los valores a y $2a$ daría lugar a las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

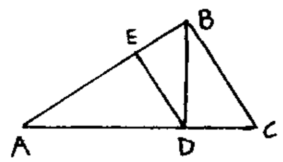
Una de las respuestas más sorprendentes es la que presentó Arquitas de Tarento (430-365 a. J.C.). Dice Arquitas que: la intersección de un cilindro recto, un cono circular y un toro da como solución un punto que justamente tiene como coordenada el valor que resuelve el problema de la duplicación del cubo.



¿Cómo se le ocurrió a Arquitas semejante ingenio?

La idea central de la construcción propuesta por Arquitas se basa en la división adecuada dentro del triángulo rectángulo ABC.

Si llamamos $\overline{AE} = a$ y $\overline{AC} = 2a$,



al ser semejantes los triángulos ABC, ADB y AED, se verifica que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

siendo $\overline{AB} = y$ y $\overline{AD} = x$.

Por tanto, la ingeniosa construcción tridimensional esconde un problema bidimensional que es el siguiente: dados los segmentos

$$\overline{AC} = 2a \quad \text{y} \quad \overline{AE} = a,$$

construir el triángulo que se muestra en la figura, donde $\overline{AD}$ es la solución del problema de la duplicación del cubo.

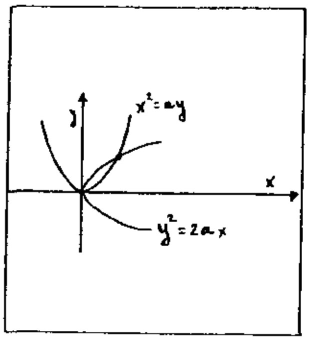
Ante esta sorprendente construcción surge una pregunta inquietante: ¿Fue Arquitas capaz de resolver el problema de la duplicación del cubo de manera sintética, o bien conocía de alguna manera un método basado en coordenadas?

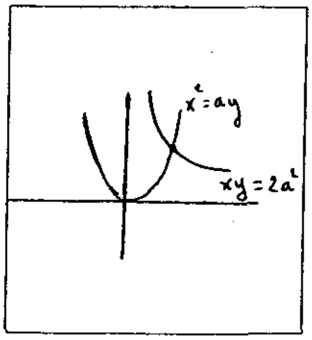
Menecmo (374-325 a. J.C.) atacó el problema de forma diferente; para él las relaciones

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

le llevaron a las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} x^2 &= ay \\ y^2 &= 2ax \\ xy &= 2a^2 \end{aligned}$$

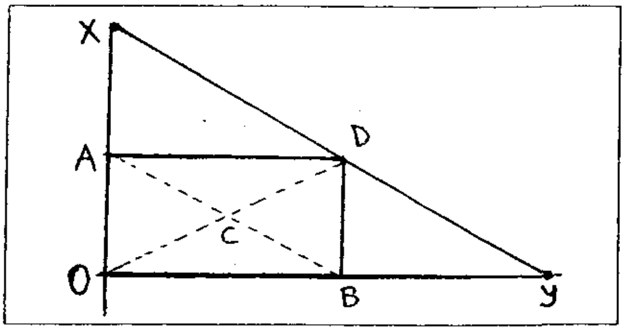




que, como sabemos, las dos primeras corresponden a ecuaciones de parábolas, mientras que la última ecuación es una hipérbola.

El gran Apolonio de Perga (262-190 a. J.C.) también dedicó un tiempo a resolver el problema de la duplicación del cubo; él encontró una solución original y relativamente simple, se basa en la siguiente construcción:

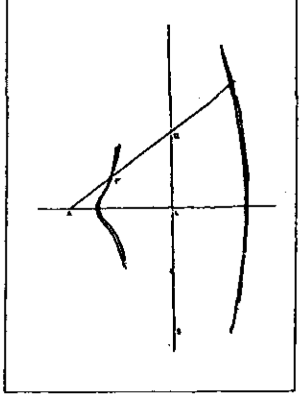
1) se sitúa un rectángulo $OADB$ sobre los ejes, de lados a y $2a$,
2) se obtiene el punto medio del rectángulo, le llamamos C,
3) construimos los puntos X e Y de tal manera que el segmento XY contenga el punto D, además X está en la recta que sostiene al segmento OA e Y está sobre la recta que sostiene a OB. Por último, se ha de verificar que $CX = CY$.



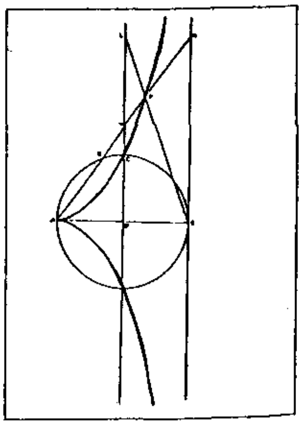
En estas condiciones, Apolonio afirma que: el valor de los segmentos $AX = x$ y $BY = y$ son las medias proporcionales entre a y $2a$ (la demostración se puede realizar por varios procedimientos, uno de ellos es la aplicación conjunta del teorema de Thales y de la proposición III,35 perteneciente a "los Elementos" de Euclides).

En este breve resumen no podemos olvidarnos de la *concoide de Nicomedes* (vivió en el siglo II a. J.C.) y de la *cisoide de Diocles*, contemporáneo de Nicomedes; las dos son dos curvas notables y además capaces de resolver el problema de la duplicación del cubo.

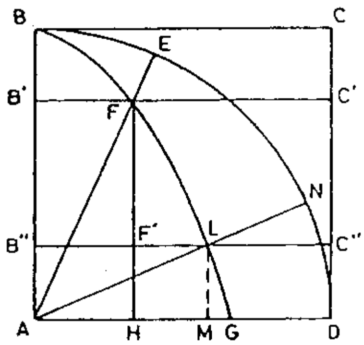
Concoide



Cisoide

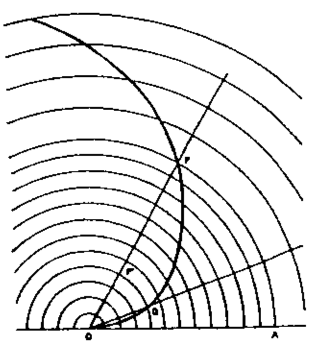


La trisección del ángulo también nos presentó curvas maravillosas y en las que subyace el enorme ingenio matemático; entre todas ellas merecen especial distinción la *cuadratriz de Hipías* y la *espiral* del genial Arquímedes de Siracusa (287-212 a. J.C.).



La Cuadratriz de Hipías

La cuadratriz es una curva que se genera al unir las sucesivas intersecciones de la recta AB cuando gira uniformemente sobre el punto A hasta llegar a la posición DA, y de la recta BC que se desplaza uniforme y paralelamente hasta llegar a la posición DA. Como puede observarse es una curva continua $BFLG$, obteniendóse el punto G por continuidad.



La espiral de Arquímedes

Este breve resumen no estaría "completo" si nos olvidásemos del problema de la cuadratura del círculo. Sin duda fue el más famoso de los tres problemas, se convirtió en un fabuloso rompecabezas. Tuvo dos vertientes: una aproximada, que condujo a problemas de rectificación de curvas, y en particular de la circunferencia; aquí se sitúan métodos altamente ingeniosos para calcular π con una precisión asombrosa; cabe citar el procedimiento ideado por Specht en 1836. Calcula en número π con exactitud hasta la quinta cifra decimal; en efecto, según su procedimiento, π toma el valor de 3.1415919 frente al exacto 3.1415927...

En la vertiente exacta el recorrido es difícil de resumir; no obstante tuvo unos hitos transcendentales en su caminar a lo largo de unos dos milenios. A finales del siglo XVIII I. Lamber y A. Legendre demostraron que el número π no es racional; más tarde, en 1882, F. Lindemann en una memoria publicada en los *Mathematische Annalen* demuestra - siguiendo un proceso similar al descubierto por C. Hermite en 1873 respecto a la trascendencia del número e - que también el número π es transcendente. En 1893 D. Hilbert realizó una demostración mucho más sencilla de la transcendencia del número π.

Wantzell pone fin a la aventura de los tres problemas, así enuncia un famoso teorema que lleva su nombre:

Un número real es construible con regla y compás si verifica dos condiciones (además son necesarias y suficientes):

1) el número es algebraico sobre $\mathbb{Q}$;

2) el polinomio irreducible que le contiene como raíz es una potencia de 2.

Este resultado pone fin a la tremenda polémica, demostrando sin ninguna duda, que **los tres teoremas son irresolubles en las condiciones expuestas al inicio**.

Después de este breve recorrido histórico por los tres problemas, nos surgen varias cuestiones:

a) ¿Llegaron a intuir los griegos la imposibilidad de los problemas?

b) ¿Conocían el método de las coordenadas?

Bibliografía

[1] Kline, M., *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, I, Ed. Alianza Universidad, 1992.

[2] **Boyer, C.**, *Historia de las matemáticas* , Ed. Alianza Universidad Textos, 1986.

[3] **Heath, T.**, *A history of Greek from Thales to Euclides*, Dover.

[4] **Knorr, W.R.**, *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Dover, 1993.

[5] **Courant, R. y Robbins, H.**, *¿Qué son las Matemáticas ?*, Ed. Aguilar, 1971.