Nudos y enlazamientos

por

Felipe Cano Torres, Universidad de Valladolid

En esta charla no quiero ser ni completo ni exhaustivo. Hay muchos trabajos sobre la teoría de nudos, por verdaderos especialistas, así como sobre todas las consecuencias de esta teoría, temas en los que yo soy poco indicado. Precisamente esa quería que fuera mi pequeña aportación. La de un no especialista, aunque seguramente matemático, apreciando desde relativamente lejos unos conceptos que ilustran mucho tanto la topología como el álgebra y que aparecen en campos tan alejados como los sistemas dinámicos. Todo ello, si es posible, con una aproximación informal, utilizando verdaderaros cabos para hacer nudos, mosquetones para simular toros, en un brindis a los mundos marinero y montañero, para los cuales los nudos son a veces esencia de vida.

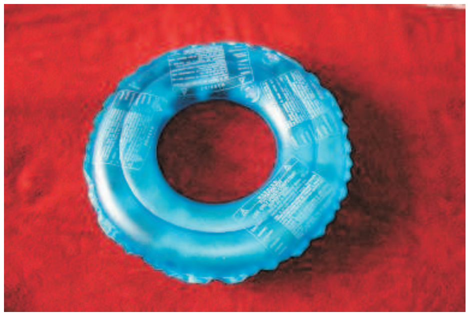
1. El no-espacio

Muchas veces intentamos imaginar los ejemplos de espacio que nos ofrecen las matemáticas asociándolos a las formas de determinados objetos, en general imposibles. La dualidad es una estructura fundamental del pensar matemático y aquí, de manera tan elemental también se presenta con utilidad. Por qué no imaginar más bien *lo que queda del espacio* al perturbar este con un objeto. Claro está que eso exige que tengamos un conocimiento "a priori" de nuestro espacio-universo. Unas veces será el equivalente de una habitación, es decir una bola del espacio euclídeo real de dimensión tres. Otras veces pensaremos en él como todo el espacio euclídeo, ilimitado. Sin embargo, lo más fructífero, por qué no, es pensar en él compactificado: ya sea como el espacio proyectivo de dimensión tres o, sobre todo en el punto de vista topológico, como una "superficie esférica" tridimensional, identificada al espacio euclídeo con un punto más (su norte), vía la famosa proyección estereográfica desde el polo norte en el seno más abstracto de un especio euclídeo tretradimensional.

Ahora introducimos un objeto familiar en el espacio-universo ... y pensamos en la forma de lo que queda. Es curioso que hay dos objetos que dan un espacio perturbado con la misma topología que ellos mismos: la bola (o esfera) y el toro-flotador de niño). En el caso de la bola es relativamente fácil convencerse de que es así, un poco más difícil es verlo para el caso de la rosquilla: somos dos toros enlazados.

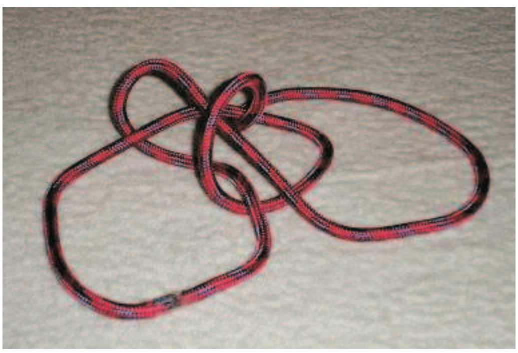
Si hacemos un nudo, cerrado para fijar ideas, y lo colocamos en el espacio, la topología del nudo en sí es la de un toro (topología intrínseca).

Bola



Flotador

En efecto, no es más que un cilindro relativamente largo, el cabo o cuerda (según mar o montaña), que se ha unido por los extremos. Pero la perturbación del espacio ya no es la de un flotador de niño. Si así fuera, tendríamos que poder imaginar cómo "retorcer" todo el espacio, arrastrando con nosotros el nudo, para que el nudo se identificara con el objeto simple "flotador de niño". Esto es realmente imposible. No lo vamos a demostrar, pero vamos a decir por qué.



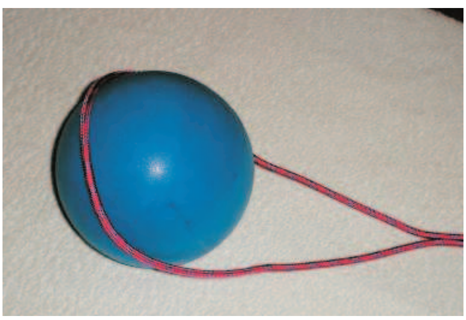
Nudo

2. Cazando el espacio a lazo

Tenemos que saber de algún modo hasta qué punto los espacios que creamos como complementario de nuestros objetos son “iguales”. Por supuesto iguales en el sentido laxo de la topología, es decir que se puedan identificar por un homeomorfismo, que intuitivamente es una deformación del espacio que no lo desgarra; una buena imagen es pensar que el espacio fuera de caucho, o silicona. Por ejemplo, el espacio exterior a una taza de café es homeomorfo al complementario del flotador de niño.

Taza

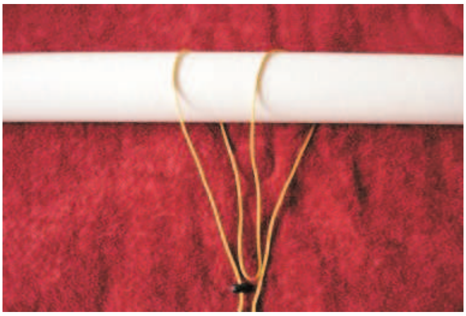
Es muy difícil buscar pruebas determinantes de que dos espacios son iguales, pero a veces y con algo de suerte se puede conseguir ver que son distintos. Este es el objetivo de los invariantes, como el que vamos a presentar llamado “grupo de Poincaré” o “grupo fundamental”. Se basa en que el comportamiento básico de los lazos en dos espacios homeomorfos es el mismo; así que intentaremos aproximarnos al tipo topológico cazando el espacio “a lazo”. Por ejemplo, el complementario de una bola (que sabemos es otra bola) no bloquea ningún lazo que le intentemos “echar”.



Bola con cuerda

Bola con cuerda 2

Sin embargo, el complementario de un tubo sí bloquea algunos lazos.



Tubo con cuerda

Tubo con cuerda 2

Por supuesto, nuestro ejemplo básico, el del flotador de niño- nudo trivial, también bloquea los lazos. Para entender el complementario de un nudo, veremos que los lazos pueden ser muy diferentes de los del nudo trivial.

3. Un nudo salvaje

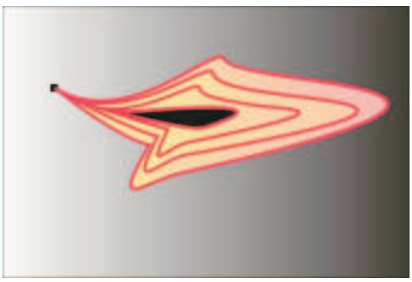
Las matemáticas tienen la ventaja de poder idealizar los objetos hasta los límites marcados únicamente por la lógica, y por nuestro propio atrevimiento. Así, un nudo, que todos imaginamos realizado con una cuerda fina, podemos imaginarlo realizado con una cuerda todavía más fina, finísima, infinitesimal, de espesor nulo. En principio esto sería solamente disminuir el diámetro de nuestra cuerda y no se modifica gran cosa el espacio complementario. Lo sorprendente es que podríamos darnos la libertad de construir el nudo a partir de la cuerda de espesor cero. Así se pueden generar nudos matemáticos, imposibles de realizar físicamente.

Nudo salvaje

Los tipos de nudos se dividen en dos: los nudos regulares, domésticos, que pueden ser realizados con un cabo físico, aunque sean muy intrincados, y los otros, lógicos, abstractos, que sólo admiten una realidad matemática. Son los llamados nudos salvajes, de los que no trataremos aquí.

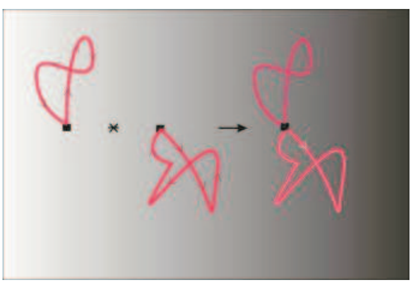
4. Composición de lazos

El grupo de Poincaré es un grupo en sentido matemático. Por tanto, la idea que subyace es la de grupo de transformaciones, es decir sus elementos se pueden “componer”. Es una interpretación poco afortunada imaginar la composición en un grupo como una versión posiblemente no conmutativa de las operaciones aritméticas suma o producto. Nuestros elementos son lazos, claro lazos matemáticos, hechos con cuerdas de espesor cero... pero además queremos detectar obstrucciones a “recoger el lazo”. Esto lo podemos incorporar al concepto abstracto, diciendo que dos lazos que se obtienen uno de otro por un pequeño movimiento continuo en el espacio (por ejemplo recoger cuerda) son lo mismo. La relación de equivalencia resultante se llama “homotopía de caminos”. Los elementos del grupo de Poincaré son clases de lazos para esta relación. Ciertamente la utilización de relaciones de equivalencia le da una potencia muy grande a las matemáticas, pero hay que tener siempre cuidado. Cada vez que pasamos al cociente nos alejamos un grado de la realidad hacia la abstracción y esto exige un cierto entrenamiento.



Homotopía

La composición de caminos es intuitiva, ponemos uno detrás de otro, y después, antes o durante, pasamos al cociente dado por la relación de homotopía.



Composición de caminos

Hay que tener cuidado con un detalle sutil. Desde el punto de vista matemático nuestros caminos se pueden cortar a sí mismos y esto no supone un problema. No obstante, si los intentamos imaginar como hilos finos, o lazos reales, es más difícil admitir esto y nos podemos encontrar con un amasijo de filamentos entretejidos que sin embargo es matemáticamente trivial.

5. Abeliano-no abeliano

Un grupo es conmutativo si $ab = ba$, o dicho de otro modo, si el conmutador $aba^{-1}b^{-1}$ es siempre trivial. En nuestro caso hay un experimento interesante. Tomamos dos mosquetones separados y formamos un conmutador con un cabito dentro del espacio complementario. El elemento a es una vuelta a uno de los mosquetones, entonces a^{-1} es la misma vuelta a la inversa; lo mismo con el elemento b y el otro mosquetón. Vemos que el conmutador no se deshace. Esto responde a que de hecho el grupo fundamental del complementario es no abeliano (técnicamente: un grupo libre generado por dos elementos).

Conmutador dos mosquetones

Conmutador dos mosquetones 2

Si ahora enlazamos los mosquetones, cambia la estructura del espacio complementario. Nuestro conmutador ahora se deshace.

Dos mosquetones enlazados

Dos mosquetones enlazados 2

Dicho sea de paso, estos dos mosquetones enlazados podrían representar los ejes de coordenadas en $\mathbb{C}^2$, el espacio afín complejo de dimensión dos; espacio ambiente por excelencia en la geometría algebraica de curvas y que por su identificación con el espacio real de cuatro dimensiones es físicamente muy sugerente.

6. Palabras-palabras

Pero, cómo calcular el grupo fundamental del complementario de un nudo. Uno de los mejores ejemplos de acción, es la transformación que experimentamos cuando escuchamos ciertas palabras, en todas los sentidos posibles. Para simplificar, los elementos de un grupo pueden ser palabras y componerlos es poner una detrás de otra, para hacer una palabra más larga, como en alemán. Las palabras elementales serán las de una sola letra, de un determinado alfabeto, abecedario o conjunto básico de generadores. Tenemos que poder "tragarnos las palabras" o decirlas "al revés". Algunos ejemplos

$$a, b, m, mama, papa, ma^{-1}em^{-1}me, \alpha, \beta, \alpha\alpha\alpha^{-1}\beta.$$

Claro que hay reglas básicas, como por ejemplo $abaa^{-1} = ab$ y que la palabra vacía es el elemento neutro. Diferentes palabras pueden corresponder a la misma acción, una vez tenemos un grupo preciso.

Diccionario

Un ejemplo es el grupo de los movimientos de un triángulo equilátero, generado por el giro G de 120 grados, en el que además debemos decir que $GGG = 1$. Esto son las "relaciones". Un grupo se presenta así en términos de generadores y de relaciones. Otro ejemplo, si tenemos las palabras $aba^{-1}b^{-1}$ entre las relaciones (son los conmutadores), sabemos que el grupo es abeliano. Así que un grupo puede estar descrito por $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, donde $\mathcal{G}$ es una colección de generadores, o letras, y $\mathcal{R}$ es una colección de palabras que declaramos nulas, las relaciones.

La pregunta básica es en qué casos los grupos $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ y $(\mathcal{G}', \mathcal{R}')$ son isomorfos, es decir represntan el mismo tipo de acción, pero con un cambio de nombre de los generadores o un cambio de selección de las relaciones. Este problema tiene una respuesta engañosa, aparentemente muy sencilla, pero en realidad una trampa. En efecto, los grupos son iguales si se puede pasar de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ hasta $(\mathcal{G}', \mathcal{R}')$ por una serie finita de “movimientos de Tietze” elementales, o sus inversos, que son los siguientes:

1. Añadir un generador superfluo. Dado $a \notin \mathcal{G}$, poner $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \{a\}$ y hacer $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \{a^{-1}w\}$, donde w es una palabra en los otros generadores.

2. Eliminar un generador superfluo. Inversa de la anterior

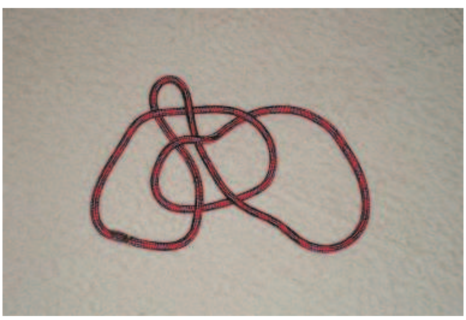
3. Añadir una relación superflua. Cambiar $\mathcal{R}$ por $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \{r\}$, donde r es una relación que se deduce de las anteriores. Por ejemplo, si tenemos las relaciones u, w y a, b son una palabras cualesquiera, podría ser $r = aua^{-1}bwb^{-1}$.

4. Eliminar una relación superflua. Inversa de la anterior.

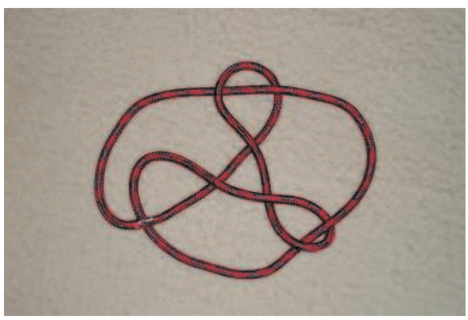
Así que la respuesta a nuestro problema tiene un lado fácil, pero en realidad es un problema muy difícial (problema de la palabra), ya nunca estamos seguros de cuál es la longitud de la sucesión de transformaciones de Tietze que debemos hacer para averiguar si dos grupos son isomorfos.

7. Nudos aplastados

Cuando fotografiamos un nudo tenemos una representación del mismo en un trozo de papel. Excepto para algunos ángulos de visión críticos, vemos el nudo como un trazo continuo que, gracias a las sombras, se corta transversalmente a sí mismo, pasando unas veces por encima y otras por debajo. Una vez orientado el nudo este hecho nos permite codificar en cierto modo la imagen: (punto 1 encima)-(punto 2 encima)-(punto 3 debajo), etc., hasta pasar por todos los puntos de cruce dos veces y cerrar el círculo. Claro que podemos ver un nudo desde distintos puntos de vista y tener así una codificación diferente del mismo objeto.



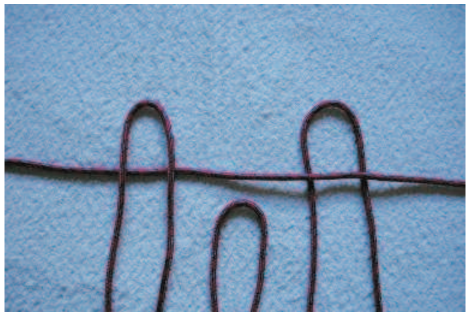
As de guía 1



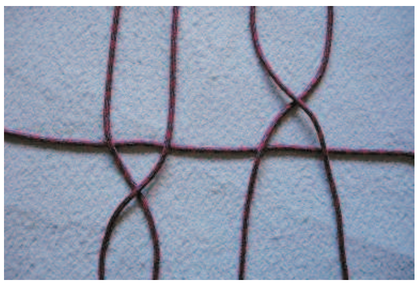
As de guía 2

Es un fenómeno similar a la presentación de un grupo en términos de generadores y relaciones. Hay varias maneras de ver la misma cosa. El diagrama del nudo, que así se llama la versión aplastada, o fotografiada del mismo, representará el mismo nudo si se modifica por alguno de los movimientos elementales R1, R2 ó R3, llamados de Reidemeister. El primero consiste en girar un bucle, el segundo en deslizar un asa por debajo de una parte del cabo, o por encima, el tercero deslizar un cabo de un cruce a otro.

Reidemeister 1



Reidemeister 2



Reidemeister 3

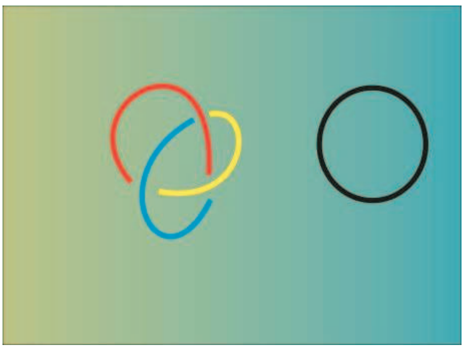
Más aún, como en el caso de los grupos, si dos diagramas de nudo representan el mismo nudo es porque de deducen uno de otro por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.

Tabla de nudos

No pasemos por alto lo engañoso de esta afirmación, pues aunque a veces es muy fácil ver que dos diagramas representan el mismo nudo, puede resultar terriblemente difícil ver que corresponden a nudos diferentes, pues no sabemos cuántos movimientos elementales debiéramos hacer. No obstante para nudos con pocos vértices en sus diagramas se sabe todo y podemos listarlos.

8. Tricoloreabilidad

Aunque no sepamos a ciencia cierta si dos nudos son equivalentes (homeomorfos por un homeomorfismo que arrastra el espacio) sí nos interesan métodos sencillos que nos permitan decidir en algunos casos que no lo son, es decir que son esencialmente distintos. Por supuesto en general trabajando a partir de una representación plana, o diagrama, del nudo. El invariante más sencillo es el de tricoloreabilidad. La tricoloreabilidad es una propiedad de una representación plana que se conserva cada vez que hacemos un movimiento elemental de Reidemeister. Así que ser tricoloreable o no es una propiedad del nudo, no solamente de la representación plana.



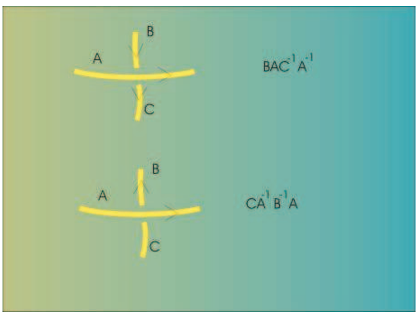
Tricoloreable

Pero, ¿qué es la tricoloreabilidad?. Una representación plana de un nudo se divide en segmentos, los trazos continuos que usamos para la misma. Por ejemplo el nudo trivial representado por una circunferencia tiene un solo segmento, la representación clásica de un nudo de trébol tiene tres. Los movimientos de Reidemeister crean o eliminan segmentos. Tenemos tres colores, rojo, verde, azul, y tenemos que usarlos todos. Hay que pintar cada segmento de un color y conseguir que en cada punto de cruce aparezcan representados los tres colores. Entonces decimos que el diagrama es tricoloreable. Si no, pues no lo es. Así los nudos se dividen de hecho en dos categorías: tricoloreables o no; el nudo trivial no es tricoloreable y el de trébol sí que lo es. Un buen entretenimiento consiste en determinar esta propiedad en la tabla de nudos con pocos puntos de cruce.

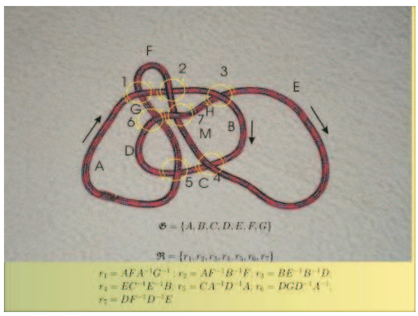
9. El grupo de un nudo

Después de los comentarios anteriores, ya hemos comprendido que un invariante topológico interesante para un nudo es el grupo de Poincaré del complementario. No quiere decir esto que dos nudos que tengan el mismo grupo de Poincaré sean necesariamente equivalentes; pero ya se trata de un invariante mucho más fino que la tricolorebilidad. A partir de una representación plana (diagrama) hay una manera de presentar este grupo en términos de generadores y relaciones; se llama la representación de Wirtinger. La razón de que la representación de Wirtinger dé precisamente el grupo de Poincaré del complementario del nudo se debe a un resultado de construcción de grupos de Poincaré, llamado teorema de Van Kampen. No obstante lo que sí es posible verificar por nosotros mismos, sin más que un poco de atención, es que el grupo que vamos a construir es un invariante del nudo. Es decir: la variación de nuestra presentación cuando se efectúa un movimiento de Reidemeister equivale a una sucesión de movimientos de Tietze.

Solo nos queda pues decir como es la representación de Wirtinger. Se trata de un nudo, que podemos orientar, así que cada segmento tiene un flecha. Los generadores son los segmentos del diagrama del nudo. A cada punto de cruce le hacemos corresponder una relación según una regla muy sencilla, que se puede visualizar. Y ya está.



Relaciones Wirtinger



Cálculo as de guía

Por supuesto, aquí no se termina la historia de los invariantes de nudos. De hecho es una historia aún inconclusa, en la que siguen apareciendo polinomios y otros tipos de invariantes con diferentes aplicaciones, incluso en la Mecánica Cuántica.

10. Los nudos de curva

Los nudos tienen un lugar notable en la Geometría Algebraica y Analítica y en particular en la teoría de equisingularidad de Zariski para curvas planas complejas. Voy a intentar dar una visión muy rápida de lo que pasa. Una curva plana compleja

C está dada por una ecuación

$$C = \{f(x, y) = 0\},$$

donde se entiende que x e y son variables complejas. Es decir la curva C es un subconjunto de $\mathbb{C}^2$. Dado que los complejos son como $\mathbb{R}^2$, entonces $\mathbb{C}^2$ se identifica con el espacio euclídeo de cuatro dimensiones y en este espacio la curva compleja C tiene dos dimensiones reales. Nuestro problema es entender la estructura topológica de C en un entorno del origen de coordenadas. Más precisamente, cortamos por una bola

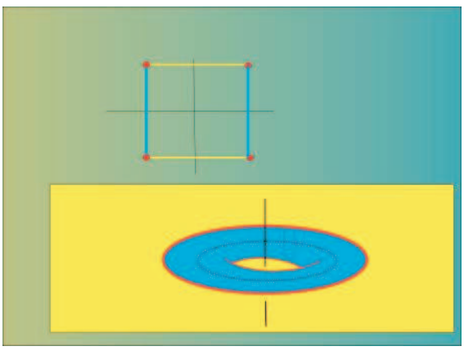
$$B = \{(x, y); |x|, |y| \leq 1)\}$$

y queremos entender cómo es $C \cap B$.

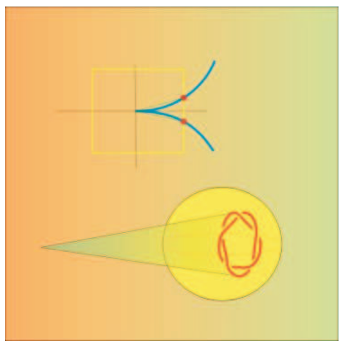
Lo primero que sabemos es la *estructura cónica de la singularidad*. Quiere esto decir que $C \cap B$ es un cono proyectado desde el origen por $C \cap \partial B$, donde ∂B es la frontera

$$\partial B = \{(x, y); |x| = 1, |y| \leq 1\} \cup \{(x, y); |x| \leq 1, |y| = 1\} = T_1 \cup T_2.$$

Resulta que cada T_1, T_2 es un toro relleno (una rosquilla) y que su intersección $T_1 \cap T_2$ es una superficie tórica. Dado que ∂B es el espacio euclídeo, con un punto en el infinito, se puede decir que “somos dos toros enlazados”.



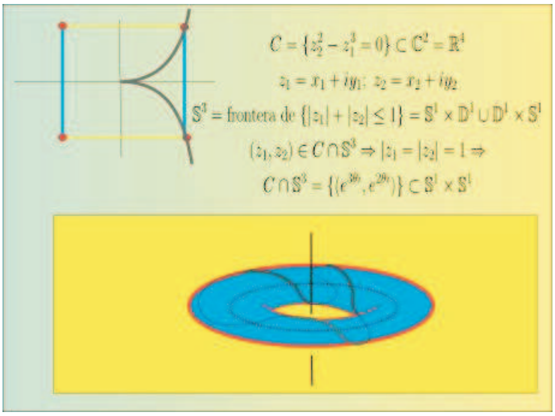
Dos toros enlazados



Estructura cónica

Así pues lo que nos interesa es estudiar $C \cap \partial B$, como subconjunto de su ambiente natural ∂B. Se trata de un nudo, o varios nudos enlazados si la curva tiene más de una componente. Pero más aún, es un tipo muy particular de nudo, llamado “nudo tórico iterado”.

Para empezar, este nudo se puede ver “cerca” del toro $T_1 \cap T_2$. Se hecho, en el caso muy típico de la cúspide $y^2 - x^3 = 0$, el nudo está de hecho dibujado sobre el toro, así que es un “nudo tórico”. No vamos a incluir aquí los cálculos, ya que sería penoso, aunque segurmente muy instructivo. Aquellos interesados lo pueden intentar por sí mismos, consultar a algún especialista en singularidades de curvas, o bucear en los artículos clásicos de Zariski.



Un nudo tórico

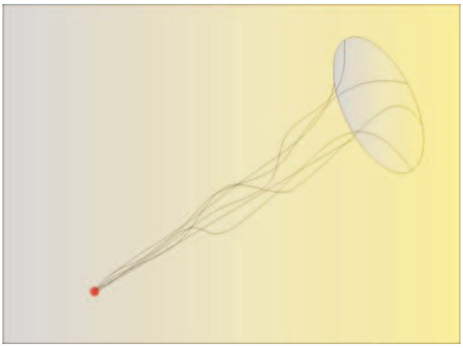
De hecho en general, el nudo de la curva se dibuja en un entorno del toro. Ahora se considera ese entorno aisladamente, en el que volvemos a aproximar la curva por una cúspide. hay un toro dentro del entorno del primer toro, anudado, alrededor del cual se dibuja esta segunda cúspide. Esto se repite un número finito de veces. Así, lo que obtenemos es un “nudo tórico iterado”

Nudo tórico iterado

Este estudio topológico de las curvas planas en un punto tiene muchos reflejos en otros aspectos del estudio de las singularidades y constituye todo un paquete teórico llamado “equisingularidad”.

11. Sistemas dinámicos

La idea de anudamiento, o enlazamiento también es útil para estudiar cómo se relacionan entre sí las trayectorias posibles de una partícula en un determinado sistema dinámico (dado por ejemplo por un campo de vectores). Hay resultados recientes de naturaleza asintótica, ya sea porque las trayectorias se van verdaderamente al infinito, ya sea porque tardan un tiempo infinito en acercarse a una singularidad. No es este el lugar para dar detalles, pero valga la idea de que gracias al enlazamiento se puede seguir la “sombra” de un fenómeno de giro en espiral cualdo este desaparece en el mundo formal no convergente.



Sistema dinámico

La anterior imagen es evocadora, pero ciertamente merecería ser detallada en otra ocasión por las distintas facetas que aparecen, en presencia de un sistema dinámico, en la presentación convergente-divergente de sus soluciones.

Bibliografía

N.D. Gilbert y T. Porter, *Knots and Surfaces*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, 1994.

Felipe Cano Torre
Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Paseo Prado de la Magdalena s/n
47011 Valladolid
e-mail: ***fcano@agt.uva.es***