Entendiendo el caos

por

Clementa Alonso González, Universidad de Alicante

1. Introducción

No vayan a decirme ustedes que no es éste un título comercial. Ya sea porque a la vista está que el mundo anda cada vez más loco, o bien porque el carácter de inmanejable que acompaña a cualquier fenómeno que se desarrolle de manera "poco ordenada", no hace prever que explicarlo científicamente vaya a ser una tarea precisamente sencilla.

Empecemos por el principio: si buscamos en nuestro diccionario el significado exacto de la palabra *caos*, encontraremos además de la acepción común de *confusión y desorden*, que esta palabra se utiliza para designar el *estado indefinido y amorfo que se supone anterior a la ordenación del cosmos*, definición directamente heredada de la mitología griega: espacio vacío e infinito anterior a todas las cosas del que nacieron Erebo y la Noche, padres del Eter y el Día y que se corresponde también, bajo el prisma judeo-cristiano, con la confusión inicial que reinaba en el Universo antes de la creación. Leyendo esta definición, me aterra pensar en el compromiso al que me obliga mi título; entender origen del universo, ¡casi nada!. Es un alivio comprobar que aparece un significado más, y que se refiere al ámbito de las matemáticas y de la física y dice del caos que *es el comportamiento errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos aunque su formulación matemática sea en principio determinista*.

Sería interesante hacer un ejercicio de reflexión y pensar que la aparición de semejante definición en nuestro diccionario de la Real Academia Española deja constancia de que las confluencias de esta rama de las matemáticas con otras ciencias no deben ser, ni escasas, ni inventadas. En efecto, la llamada Teoría del

Caos se nutre sobre todo de los intentos de comprensión de fenómenos muy complicados que provienen de la física, la meteorología, la economía, la biología, las ciencias sociales...y todos estos intentos apuntan siempre a la búsqueda de un punto de vista abstracto y globalizador. Esta es la razón esencial por la que el descubrimiento y formalización de esta teoría haya sido y sea competencia de las matemáticas.

Además del apasionante desarrollo de la misma, en el que han intervenido muchas personas provenientes de los más diversos campos, descubrimos que no menos apasionantes resultan los múltiples conceptos y ejemplos particulares que constituyen el corazón matemático del caos, la mayor parte de ellos, con amplia resonancia geométrica: los billares, la herradura de Smale, los atractores extraños, los fractales...sería muy ambicioso pretender presentar en profundidad cada uno de estos objetos en estas notas, así pues, humildemente, nos limitaremos a situar algunos de ellos en el lugar que ocupan "dentro del caos".

2. Pero...¿qué es este caos?

En palabras de Stephen Smale (medalla Fields 1966), Caos es una nueva ciencia que establece la *omnipresencia de la impredecibilidad* como rasgo fundamental de la experiencia común.

Nos resultará útil bucear un poco en la historia para comprender lo que esta definición lleva consigo. Situémonos en los siglos XVI y XVII, durante los cuales tiene lugar un cambio sustancial de la concepción que el hombre tenía de sí mismo y del lugar que ocupaba en el cosmos. Este cambio es debido en gran parte a los descubrimientos y teorías sobre la estructura del Sistema Solar y la comprensión científica de algunos fenómenos elementales y cotidianos como la caída de los cuerpos y la sucesión de los días y las noches. Estamos ante un proceso conocido como *revolución copernicana*. Las observaciones y teorías desarrolladas entre 1550 y 1700 por Copérnico, Giordano Bruno, Tycho Brahe, Kepler, Galileo, Newton,...daban explicación a los movimientos de los planetas usando leyes sencillas que además permitían explicar la existencia de las mareas, la caída de los cuerpos y multitud de fenómenos antes aparentemente desconectados. Newton escribió en sus *Principia*: *"Las leyes que hemos explicado abundantemente sirven para dar cuenta de todos los movimientos de los cuerpos celestes, y de nuestro mar"*. Producto de estas teorías fue una inmensa confianza en el saber objetivo y el reconocimiento del Universo como materia en movimiento regido por leyes naturales. Así, como consecuencia de esta revolución, el pensamiento científico permaneció dominado durante dos siglos por una fe ciega en el determinismo: "el estado presente del mundo determina de manera precisa cualquier estado futuro ya que su comportamiento obedece a leyes cognoscibles y es, por tanto, *predecible*".

Este credo estaba basado en ciertas leyes de la física, en las ecuaciones newtonianas del movimiento, que pueden describir las variaciones de la naturaleza con el paso del tiempo. Estas ecuaciones tienen la propiedad matemática de que las condiciones iniciales determinan la solución para cualquier tiempo considerado. Sobre estos principios físicos y matemáticos descansa la filosofía determinista, una de cuyas manifestaciones es el rechazo total a la libre voluntad e incluso responsabilidad humana.

Pero hoy, aquellos esfuerzos generalizadores que caracterizaron a la revolución copernicana han perdido fuerza; lejos de pensar que existe una relación transparente y lineal causa-efecto que gobierne todos los fenómenos naturales, desde diversos ámbitos y disciplinas, se vislumbra la necesidad de estudiar más bien los aspectos inestables, no predecibles, desordenados, *caóticos*, de los mismos [1].

A principios del siglo XX, con la llegada de la mecánica cuántica y los resultados obtenidos por los científicos alemanes, Heisenberg, Planck y Schrödinger, resulta evidente constatar que el determinismo era sólo una ilusión. Al menos al nivel de los electrones, protones y átomos, se comprobó que la *incertidumbre* dominaba. Las ecuaciones del movimiento de la mecánica cuántica producen soluciones que son probabilidades que evolucionan con el tiempo.

A pesar de esta nueva visión de la mecánica cuántica, las ecuaciones de Newton siguen describiendo el movimiento del péndulo, el comportamiento del sistema solar, la evolución del tiempo y muchas situaciones de la vida cotidiana. La revolución cuántica deja intactos muchos postulados deterministas, y después de la segunda gruerra mundial, todavía muchos científicos albergaban la esperanza de que si aumentase la capacidad de los ordenadores, sería perfectamente factible hacer predicciones meteorológicas a largo plazo.

En los años 70 la comunidad científica reconocía otra revolución llamada *teoría del caos*, que acabaría con el paisaje newtoniano y laplaciano del determinismo: es necesario tratar con la incertidumble para comprender la experiencia común. El reclamo: *sensibilidad respecto de las condiciones iniciales* se establece como distintivo de la nueva ciencia, que va mucho más allá de la impredecibilidad. El conocimiento profundo de las dinámicas caóticas ha tenido implicaciones en cada rama de la ciencia, desde el análisis de un electrocardiograma, pasando por la hidrodinámica, hasta la construcción de recursos computacionales.

Un aspecto novedoso es que la teoría del caos no se desarrolla con el descubrimiento de nuevas leyes físicas, sino con el análisis profundo de las ecuaciones que subyacen a la física newtoniana. El caos es una revolución científica basada en Matemáticas. La metodología es deducción más que inducción. La teoría del caos toma las ecuaciones de Newton, las analiza con matemáticas y usa este análisis para establecer la impredecibilidad que acompaña a los fenómenos descritos por dichas ecuaciones. Vía matemáticas, se establece la fragilidad del determinismo newtoniano usando...¡las propias ecuaciones de Newton!.

3. Descripción matemática del caos

El desorden lleva consigo la variación y el cambio. A nuestro alrededor, la política, el clima, la economía... todo se encuentra en permamente evolución. Todo fenómeno natural experimenta cambios constantemente. Algunos de estos cambios son de fácil percepción: el día y la noche, las fases de la luna, las estaciones... Otros son infinitamente más complicados: las enfermedades, la evolución económica, el clima... Para poder organizar y sistematizar todas estas formas de cambio con el objetivo de estudiar y predecir, sería deseable poder realizar representaciones de los cambios de manera comprensible, poder clasificar y entender los distintos tipos de cambio así como disponer de métodos para identificarlos, en definitiva, poder controlar este universo cambiante. Es aquí donde las matemáticas, y en particular la rama de los *sistemas dinámicos*, ofrecen vías eficaces que permiten realizar este tipo de análisis. Para trasladar el estudio de cualquier fenómeno al ámbito matemático es necesario realizar un proceso de modelado que consiste esencialmente en:

- Detectar las variables que influyen en un fenómeno dado.
- Analizar su comportamiento relativo, es decir, determinar cómo influyen unas sobre otras y cómo se comportan a lo largo del tiempo.

Como resultado, obtendremos un modelo matemático del fenómeno, que podrá ser una *ecuación diferencial*, si se logran estudiar variaciones instantáneas, o una *transformación iterativa* si las variaciones son discretas. Esto nos permitirá mirar con "ojos matemáticos" desde el movimiento de los planetas, las moléculas de un gas o las bolas de un billar hasta los latidos del corazón o las variaciones de los precios en la Bolsa.

Una vez conseguido el modelo matemático, en particular, las fórmulas o ecuaciones que lo regulan, es posible estudiar su evolución en el tiempo e incluso hacer previsiones. Si además hemos conseguido aislar el fenómeno que nos interesa de los efectos del resto del universo...¡podremos prever su evolución con total seguridad!...este es el punto de vista determinista o laplaciano. ¿Qué lugar ocupa entonces el azar, el desorden, el caos?. La respuesta es que a pesar de poder conocer perfectamente la evolución de cada elemento, el movimiento global puede ser muy desordenado, es decir, dos sujetos que en un determinado momento estén infinitamente próximos, pueden estar muy lejos en un instante posterior. Esta es, grosso modo, la definición matemática de caos. (Es interesante observar que este término "caos" aparece por primera vez en 1975, en un artículo de L. Li y J. Yorke titulado *Period three implies chaos*, aunque el fenómeno que los autores estudiaban no se corresponde con la definición actual de caos).

Cualquier proceso en el que hay movimiento, variación a lo largo del tiempo, puede ser considerado como un *sistema dinámico*. De manera formal llamaremos sistema dinámico a una terna (M, T, ϕ) donde M será un espacio topológico, métrico o una variedad con alguna estructura diferencial que llamaremos el *espacio de fases* o *espacio de estados*, un *conjunto de tiempos* T (generalmente un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$) y el *flujo del sistema* (proceso) ϕ que es una aplicación de $M \times T$ en M con las propiedades siguientes:

1. La aplicación ϕ es continua.

2. $\phi(0, x) = x$ para todo $x \in M$.

3. $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$ para todo $t, s \in T$ y todo $x \in M$.

Si $T = \mathbb{N}$ ó $T = \mathbb{Z}$ tendremos un *sistema dinámico discreto* y si $T = \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ ó $T = \mathbb{R}$, un *sistema dinámico continuo*.

Si aplicamos la transformación ϕ (solución del sistema dinámico) a un punto inicial (condición inicial), al punto resultante se le vuelve a aplicar ϕ, y así sucesivamente, obtendremos una sucesión de puntos ordenados que llamaremos *órbita* o *trayectoria* del punto inicial bajo la acción de ϕ. Uno de los principales objetivos es describir el comportamiento asintótico de las trayectorias, es decir, el modo en el que éstas evolucionan en tiempos prolongados. Conocidas las propiedades de casi todas las trayectorias de un sistema dinámico, estaremos en condiciones de decir algo sobre el comportamiento asintótico de todo el sistema, es decir, de su evolución global (como un todo), y de manera más particular, de saber si hay variaciones sustanciales que dependan de las condiciones de partida. Cuando el comportamiento asintótico de las trayectorias de un sistema dinámico sea inestable en el sentido de que unas se comportan independientemente de las otras, diremos que el sistema dinámico es *caótico*. Aunque no hay una definición matemática de caos universalmente aceptada, en un conocido artículo de R.L. Devaney [4], se aislan tres propiedades esenciales del caos: Consideremos un sistema dinámico continuo dado por un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f(x) \,\text{donde}\, f \in C^r(\Omega),\ \Omega \,\text{abierto de}\, \mathbb{R}^n$$

llamemos $\phi(t, x)$ al flujo asociado (recordemos que $\phi(t, x)$ recoge toda la información del sistema). Diremos que $\dot{x} = f(x)$ es *caótico* en un conjunto compacto $A \subset \mathbb{R}^n$ ivariante por $\phi(t, x)$ si se dan las condiciones siguientes:

1. Existe *sensibilidad respecto de las condiciones iniciales* en A , es decir, si existe $\epsilon > 0$ (*una constante de sensibilidad*) tal que para cada $x \in A$ y cada entorno U de x, existe $y \in U$ y $t > 0$ tales que $|\phi(t, x) - \phi(t, y)| > \epsilon$.

2. El sistema es *topológicamente transitivo* en A, es decir, si para cada pareja de abiertos no vacíos $V, W \subset A$, existe $t > 0$ tal que $\phi(t, V) \cap W \neq \emptyset$.

3. El conjunto de los puntos periódicos de ϕ es denso en A.

Para más detalles sobre esta definición, ver [4], [3]. Observemos que un sistema dinámico lineal nunca podrá ser caótico. La *no linealidad* es una condicón necesaria, aunque no suficiente para obtener caos.

4. ¿Una partidita de billar?

Aunque parezca llamativo, quizás una buena forma de comprender este caos matemático sea echando una partida de billar. ¿Jugamos?. Comencemos por considerar una mesa de billar, es decir, rectangular, con bordes, y en cuyo centro vamos a colocar un círculo (ver figura). Supongamos ahora que disponemos de una bola de masa despreciable, un punto, que se puede mover sobre nuestra mesa sin ningún tipo de rozamienzo y rebotando sobre los bordes de la mesa, es decir, los lados del rectángulo y el borde circular del centro con la particularidad de que el choque con los bordes es *elástico*: el ángulo de salida debe ser igual al ángulo de entrada. Así, al empujar la bola con nuestro palo de billar, podremos predecir con exactitud la trayectoria que seguirá, ya que cada vez que tropiece con los bordes sabremos exactamente cómo continuará el movimiento, que será casi siempre eterno pues no existe rozamiento. Las únicas trayectorias que no continuan son las que van a parar a las esquinas del rectángulo, una cantidad despreciable en relación al total. Así las cosas, nuestro juego resulta ser un modelo determinista, porque dada una posición y velocidad inciales para la bola de billar es posible saber con exactitud dónde se encuentra después de cualquier intervalo de tiempo.

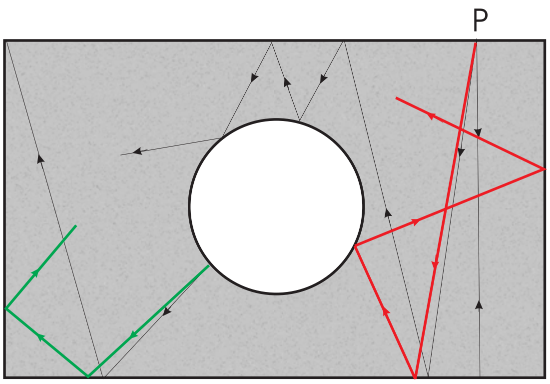

Figura 1: Billar de Sinai

Ahora bien, una observación detallada del nuestro sistema del billar nos revelará que hay trayectorias muy diferentes. Si golpeamos nuestra bola perpendicularmente desde el punto P, trazará una trayectoria periódica entre las bandas superior e inferior. Hay dos tipos de trayectorias especiales, como hemos dicho, las que se clavan en los vértices y no continúan y las que salen de los vértices y no tienen pasado. Las trayectorias más interesantes, que a su vez son las que describen un movimiento más complicado, son las que rebotan en el borde circular del centro. Observemos que la mayor parte de las trayectorias son de este tipo, porque casi todas acabarán chocando con el círculo antes o después dependidendo del ángulo de salida. Observando el comportamiento de este tipo de trayectorias se llega a la conclusión de que estamos ante un *sistema dinámico caótico*, ya que dos trayectorias que llegan muy cercanas al choque con el disco central, se separan mucho después de la colisión con este obstáculo (también les sucede esto a algunas que tiene un ángulo de salida ligeramente diferente desde el borde rectangular).

Este sistema que hemos descrito se conoce con el nombre sistema dinámico del *billar de Sinai*, por haber sido Jakob Sinai (1935-) matemático y físico ruso, el primero en estudiar este tipo de sistemas en la década de los 70. Propiedades análogas en lo que se refiere a la inestabilidad de las órbitas satisfacía el billar estudiado anteriormente por Hadamard (1868-1963), que es más bien un billar alabeado en el que se sustituye la mesa usual por una superficie con curvatura negativa en todos sus puntos.

5. Las raíces encubiertas del Caos

Desde las más antiguas civilizaciones hasta los tiempos de la teoría de la relatividad general, el sistema dinámico por antonomasia ha sido el cosmos y el encontrar su dinámica, uno de los problemas que más interés ha suscitado. A partir de Newton, el estudio de la dinámica celeste, y en especial, la predicción de los movimientos del sistema solar, constituyeron la ocupación central de físicos y matemáticos. De entre todos los problemas que obsesionaban a los científicos del siglo XIX merece especial atención el de determinar las posiciones y velocidades de tres cuerpos que se mueven por influencia de la mutua atracción gravitatoria, más conocido como *problema de los tres cuerpos*. Este problema está directamente relacionado con las estabilidad del sistema planetario y el material matemático disponible en aquella época no permitía predecir si alguna conjunción de planetas podía dar lugar a una colisión o tal vez a la expulsión de uno de ellos del sistema. Semejante preocupación llegó a tener tanto alcance, que el rey de Suecia instituyó un premio para quien resolviese el problema.

El premio fue a parar a uno de los matemáticos más importantes del momento, Henry Poincaré (1854-1912), a pesar de que el problema sigue abierto en nuestro días. Poincaré creyó haber encontrado la solución al problema de los tres cuerpos, sin embargo, él mismo se percató de que no era así. Como producto de su búsqueda muchos caminos nuevos se abrieron para las matemáticas, entre ellos, el de la topología, que luego tomaría rumbos propios, y el descubrimiento de los *puntos* *homoclínicos*, concepto precursor de los modernos estudios del caos.

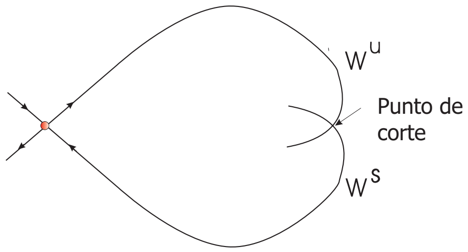

Figura 2: Punto homoclínico

Según Poincaré en el modelo dinámico de los tres cuerpos existen puntos fijos cuyas las variedades estables e inestables se cortan. Estos puntos de intersección son los *puntos homoclínicos* y las órbitas que pasan por un punto homoclínico se denominan *órbitas homoclínicas*. Cualquiera de estas órbitas tiende hacia el punto de equilibrio cuando el tiempo avanza y cuando retrocede. Esta definición, aparentemente inofensiva, tiene consecuencias sorprendentes: Poincaré descubrió que las órbitas próximas a un punto homoclínico tienen un comportamiento muy complicado; vuelven a cortarse una y otra vez... El propio Poincaré escribiría en 1889:

> *"Cuando uno intenta visualizar la figura formada por estas dos curvas y su infinidad de intersecciones, [...] éstas forman una suerte de red, telaraña, tejido infinitamente entrelazado; [...]. Uno queda asombrado por la complejidad de esta figura que ni tan siquiera me atrevo a dibujar"*

Independientemente de sus implicaciones en el estudio del movimiento planetario, los puntos homoclínicos se han convertido en el distintivo del caos; es posible detectarlos en cada sistema dinámico caótico.

En la primera mitad del siglo XX, los trabajos de Poincaré en topología y en dinámica tuvieron mucha repercusión en el desarrollo de las matemáticas de los Estados Unidos. El matemático americano G.D Birkhoff (1884-1944) estuvo fuertemente influenciado por los resultados de Poincaré en sistemas dinámicos. En sus trabajos, desarrolló muchas de sus ideas, especialmente las propiedades de los puntos homoclínicos.

Desgraciadamente, los fenómenos no lineales que Poincaré había comenzado a vislumbrar con el descubrimiento de los puntos homoclínicos no encontraron eco suficiente en la comunidad científica del momento, demasiado absorta en la física atómica y la relatividad general, y a pesar de ser ideas importantes lanzadas por uno de los mejores matemáticos de la historia, no se insertaban dentro de los temas de vanguardia y permanecieron relegadas y olvidadas durante mucho tiempo.

6. Una herradura en las playas de Río de Janeiro

Sería necesario esperar hasta la década de los setenta para ver el renacer de la dinámica no lineal. En esta ocasión, sin ninguna inspiración en la física, sería por primera vez de la mano de un matemático puro: Stephen Smale.

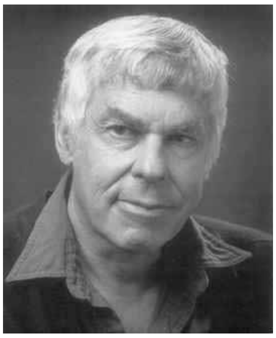

Figura 3: Stephen Smale

En en año 1959, Smale, especialista en topología, realizaba una estancia post-doctoral en el recién creado Instituto de Matemática Pura y Aplicada de Río de Janeiro. Como consecuencia de una conjetura que aparecía en uno de sus trabajos en dinámica correspondientes a esta época, se deducía que el caos no podía existir. Sin embargo, los trabajos de dos matemáticos ingleses, Mary Cartwright (1900-1998) y J. L. Littlewood (1885-1977), sobre ciertas ecuaciones relacionadas con las ondas de radio (ecuaciones del oscilador de Van der Pol), detectaban un comportamiento inusual en la solución de las mismas que hacía prever precisamente lo contrario. Finalmente, analizando estos resultados, Norman Levinson (1912-1975) llegó a un resultado que constituía un contraejemplo a la conjetura de Smale. Semejante conclusión llevaría a Smale a trabajar día y noche (palabras textuales) para interpretar los argumentos de Levinson en términos cualitativos e intentar comprender, por fin, lo que verdaderamente sucedía.

Sus esfuerzos no fueron vanos y le llevaron a descubrir, como producto de su reflexión en las maravillosas playas de Río (palabras textuales de nuevo), la famosa ***aplicación de herradura*** que lleva su nombre y que es una consecuencia natural de mirar de una manera geométrica las ecuaciones de Cartwright-Littlewood-Levinson. La herradura de Smale constituye el modelo paradigmático de sistema caótico y rescata la esencia geométrica y topológica de la trayectoria homoclínica de Poincaré.

Esta aplicación, que denotaremos por M, se resume esencialmente en dos sencillos movimientos: estirar y plegar. Para describirla, consideremos un cuadrado. Aplastemos el cuadrado uniformemente en la dirección vertical, al tiempo que lo estiramos en la dirección horizontal, también de manera uniforme. El siguiente movimiento consiste en plegar “en forma de herradura” el cuadrado deformado, tal como muestra la figura.

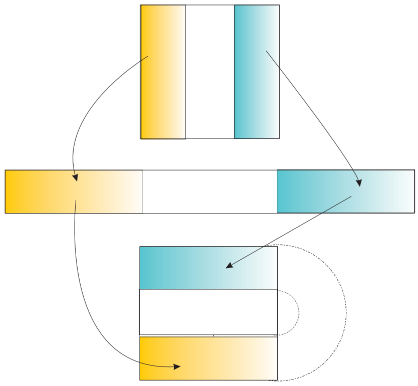

Figura 4: Aplicación de la herradura de Smale

La dinámica de la herradura está descrita por el movimiento de un punto del cuadrado hasta un punto de la herradura siguiendo el proceso anterior. Cada movimiento completo (estirar y plegar) corresponde a una unidad de tiempo. Imaginemos que nuestro campo de visión es exactamente el cuadrado original. Cuando un punto cae fuera del cuadrado por el proceso descrito, no consideramos el movimiento. En las franjas verticales coloreadas en el cuadrado original están representados los puntos que no abandonan el cuadrado en una unidad de tiempo y sus imágenes respectivas son las líneas horizontales del mismo color.

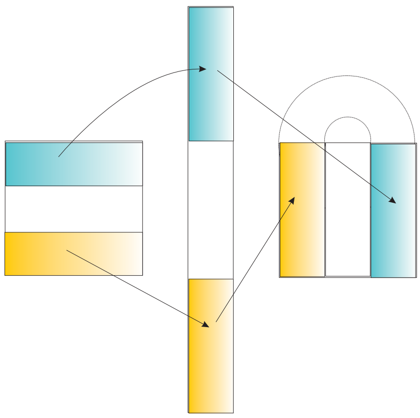

Figura 5: Aplicación inversa de M

Si repetimos el proceso un número finito de veces y visualizamos sobre el cuadrado todos los puntos que permanecen en él después de realizar todos los movimientos, obtendremos el conjunto invariante por la transformación de la herradura de Smale. Para M y M^{-1}, en dos iteraciones, serán los conjuntos que aparecen en la siguiente figura.

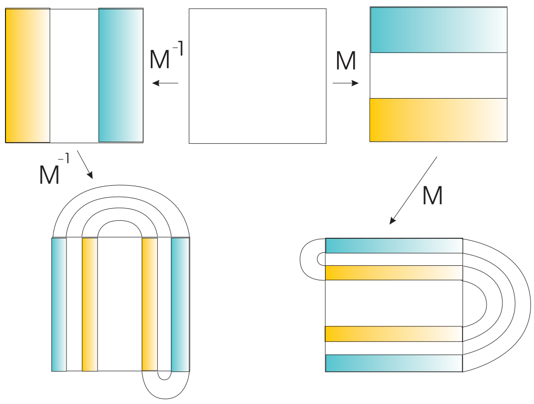

Figura 6: Aplicamos dos veces M y M^{-1}

Observemos que en cada nueva iteración (para un tiempo positivo o negativo) sustraemos un franja central de cada una de las franjas (horizontales o verticales respectivamente) del paso anterior. Es decir, al iterar el proceso de manera indefinida para tiempo positivo y negativo, obtenemos un conjunto invariante que es intersección de las franjas horizontales y verticales, cada vez más finas, que vamos obteniendo. Este conjunto, por construcción, es un conjunto de Cantor dentro del cuadrado, y es invariante por la aplicación de la herradura de Smale y por su inversa.

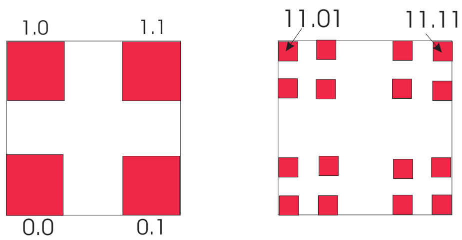

Figura 7: Conjunto invariante

Hasta aquí se puede decir con toda seguridad que esta transformación sigue un proceso absolutamente determinista. Sin embargo, y esta fue la visión especial de Smale, cada una de las regiones que constituyen este conjunto invariante puede ser “etiquetada” con una sucesión de 0’s y 1’s; en otras palabras, el conjunto Λ se corresponde con el conjunto de los resultados que se obtienen al lanzar una moneda al aire sucesivamente y anotar el resultado, ¡cara o cruz!. Y...¿no es este experimento el paradigma del azar puro?. El etiquetado se hace asignando a cada punto

$x \in \Lambda$ un número binario $\overline{x}$ de la siguiente forma: (índices horizontales).(índices verticales) $\overline{x} \equiv ...s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2...$, donde s_i será 1 ó 0 si la imagen $M^i(x)$ está en la mitad superior del cuadrado o en la mitad inferior respectivamente.

Más aún, Smale demostró que la aplicación que resulta de lanzar una moneda al aire e ir anotando los resultados de cara o cruz es conjugada a una aplicación de la herradura (ver [5]). Estamos ante un sistema dinámico determinista que se comporta como un experimento cuyo resultado es impredecible: ¡Esto es el caos!.

El comportamiento caótico que caracteriza a la transformación de la herradura de Smale se debe a que en el junto invariante Λ aparecen puntos homoclínicos; de nuevo Poincaré.

7. Marchando una de hojaldres

Es posible obtener caos por un procedimiento mecánico. Basta extraer la esencia de la construcción de la herradura de Smale, más concretamente, estirar y doblar, estirar y doblar...¿quién iba a pensar que a la búsqueda de caos íbamos a terminar en la cocina?...

Este proceso (más conocido como *Transformación del Panadero*) está descrito de una forma muy gráfica en el libro de Roberto Markarian [1]: Tomemos masa de pan. Trataremos de hacer un hojaldre con ella. Para ello, tomamos el rodillo de amasar y lo pasamos por encima del bloque rectangular obteniendo una primera placa de masa (¡tiene que caber en la bandeja del horno!). Pasamos el rodillo otra vez y obtenemos una placa del doble de longitud y la mitad de espesor. Ahora doblamos y colocamos una mitad sobre la otra, de manera que obtengamos la longitud y espesor originales. Y repetimos este proceso una y otra vez: esta es la transformación que se itera.

Figura 8: Transformación del panadero

Nos interesa seguir el camino de cada partícula del bloque original: cada vez que pasamos el rodillo, se fue separando de las otras partículas próximas a ella, pero al doblar...los puntos que están cerca de la línea de plieque se vuelven a aproximar, mientras los que están del mismo lado del doblez mantiene la distancia duplicada. Es decir, casi todos los puntos se desordenan. La expresión analítica de esta aplicación **s** si se define en el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$ es la siguiente

$$s(x, y) = \begin{cases} (2x, y/2) & x \in [0, 1/2) \\ (2 - 2x, 1 - y/2) & x \in [1/2, 1) \end{cases}$$

8. ¡Qué extraña forma de atraer!

Casi de manera simultánea al descubrimiento de la herradura de Smale, pero en otro frente bastante distinto, se abre otra brecha que resucita el interés por la dinámica no lineal. En el año 1961 un meteorólogo americano del Instituto Tecnológico de Massachussetts, Edward N. Lorenz, andaba interesado en comprender un poco mejor la dinámica del clima como resultado de los movimientos de la atmósfera. Más concretamente, se preocupaba por los fundamentos de la predicción atmosférica a largo plazo. Para ello, intentaba conocer en profundidad el fenómeno de la *convección* atmosférica: las capas inferiores de la atmósfera se calientan como consecuencia del calentamiento del suelo por el sol, así pierden densidad y al ser más ligeras se desplazan hacia arriba, mientras que las capas superiores desciencen por encontrarse más frías. La convección puede ser lenta, estacionaria, o más rápida dando lugar a torbellinos que tienen cierta periodicidad y que resultan más interesantes desde el punto de vista meteorológico. Pensando en el aire como un fluido, se podría intentar predecir el tiempo si fuese posible hacer un análisis de las ecuaciones que regulan los movimientos de los fluidos.

Conviene ahora situarse en el tiempo; estamos hablando del comienzo de los años sesenta, y en esta época, gracias a la aparición de los primeros ordenadores electrónicos, el análisis numérico de las ecuaciones gozaba de cierta popularidad. Sin embargo, la capacidad de cálculo era aun bastante discreta, y el número y la complejidad de las ecuaciones del modelo que se pretendiese estudiar resultaban cruciales (es importante resaltar que el cálculo computacional constituirá el principal catalizador del desarrollo de la teoría de caos).

Después de hacer intentos con varios ejemplos, Lorenz decidió probar con las ecuaciones de B. Saltzman que sirven para describir el flujo de un fluido que interviene en una situación de convección térmica. Haciendo una truncación de las ecuaciones hasta ciertos órdenes, consiguió un modelo muy simplificado, casi ridículo, del fenómeno natural que pretendía estudiar. El modelo estaba dado por el sistema de tres ecuaciones diferenciales con parámetros:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x) \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = xy - \beta z \end{cases}$$

Para los valores $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$, Lorenz se encontró con un resultado absolutamente sorprendente que en principio no produjo el más mínimo interés entre los matemáticos y meteorólogos de aquel momento. Para obtener soluciones numéricas del sistema anterior, Lorenz recurrió al método de Runge-Kutta de cuarto orden, es decir, realizando pasos sucesivos de integración se construyen trayectorias que satisfacen "aproximadamente" la ecuación diferencial a partir de cierta posición inicial. El hecho crucial fue la decisión de Lorenz de estudiar más profundamente una solución particular, para lo cual repitió los cálculos considerando como valor inicial un valor intermedio de los que tenía impresos en los cálculos anteriores. Los resultados eran completamente diferentes. En un primer momento, pensó que esto se debía a errores de la máquina, pero comprendió que la razón era que los valores con los que trabajaba el ordenador no eran exactamente los que él tenía impresos, sino que, para apurar las cosas, imprimía tres dígitos de los seis que se obtenían en los cálculos. Era este error en las diezmilésimas el que producía semejante divergencia. La pequeña diferencia inicial se multiplicaba en cada paso de la integración y llevaba a que las dos soluciones fuesen completamente diferentes a medida que transcurría el tiempo.

Desde luego, si los fenómenos atmosféricos se comportasen más o menos como el modelo anterior, ¡las previsiones meteorológicas a largo plazo serían imposibles!.

La sorpresa no iba a quedarse aquí, al representar las trayectoras de las partículas, independientemente de sus condiciones iniciales, Lorenz observó que se acercaban, cuando el tiempo tendía a infinito, a un objeto de naturaleza "extraña" pero perfectamente visible.

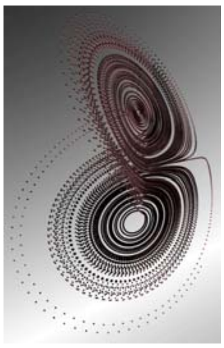

Figura 9: Atractor de Lorenz

Los objetos de esta naturaleza se denominarán *atractores*, ya que existe una parte del espacio donde transcurre el sistema que en su evolución es atraída por dicho conjunto. Un atractor es un conjunto de puntos, él mismo constituído por trayectorias, alredededor del cual se acumulan todas o casi todas las trayectorias que parten de puntos cercanos a él. Dependiendo del sistema dinámico en cuestión, un atractor puede llegar a ser, desde un punto, una curva cerrada o un esfera, hasta un objeto de naturaleza extremadamente complicada como en el caso del *atractor de Lorenz*.

Es preciso preguntarse ahora en qué consiste su condición de “extraño”: resulta que si bien las trayectorias se acercan siempre al atractor, no lo hacen de la misma manera, más precisamente dos trayectorias muy próximas en un determinado instante, se separan mucho con el paso del tiempo, a pesar de continuar cerca del atractor; esto imprime rasgos muy azarosos en el futuro del sistema. Y...¿no era este el distintivo de los fenómenos caóticos?. Se llamarán *atractores extraños* a aquellos en cuyas proximidades el sistema dinámico se comporte de manera caótica, es decir, cuando presente sensibilidad a las condiciones iniciales. Este expresión aparecía por primera vez en 1971, en un artículo de F. Takens (1940-) y D. Ruelle (1935-) titulado “Sobre la naturaleza de la turbulencia”.

Hay muchas otras observaciones interesantes sobre las maravillosas “rarezas geométricas” de estos objetos:

- Podríamos decir que en las cercanías del atractor, el sistema dinámico tiene un efecto *desintegrador*: en la dirección transversal atrae a las órbitas mientras que en la dirección tangencial éstas tienden a separarse.

- El atractor tiene una estructura *fractal*. Desde luego, no son curvas o superficies lisas, sino que suele tratarse de objetos de *dimensión de Hausdorff* no entera. Es decir, si miramos con una lupa cada vez de mayor aumento, focalizándola en regiones cada vez más pequeñas, observamos que la curva descrita por las trayectorias se autorrepite. En otras palabras, el atractor tiene una estructura geométrica muy complicada e *invariante por escala.*

- El atractor permanece si se realizan pequeñas *perturbaciones* del sistema.

Para ilustrar algunas de las propiedades anteriores, incluimos una figura de otro atractor extraño muy conocido, estudiado por el astrónomo M. Hénon.

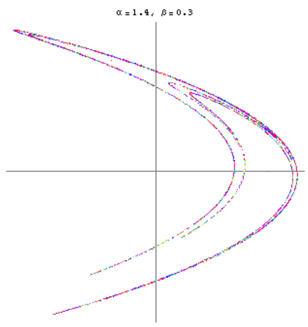

Figura 10: Atractor de Hénon

Merece la pena insistir un poco más sobre la propiedad de dependiencia de las condiciones inciales para extraer algunas conclusiones interesantes: Pensemos de nuevo en el bellísimo atractor de Lorenz, si consideramos dos partículas que están en la cuenca de atracción, con el paso del tiempo ellas se irán acercando al atractor. El hecho de estar trabajando con un sistema dinámico continuo podría llevarnos a pensar que deberían permanecer próximas a medida que se acercan al atractor. Error. En el caso de este sistema particular y de muchos otros que presentan un atractor extraño, estas dos partículas se separarán todo lo posible dentro de las dimensiones de la región considerada. Y se volverán a aproximar y de nuevo a separarse. Esta danza consiste en dos pasos: un movimiento de *acercamiento global* y otro simultáneo de *desintegración local* [1] y es conocida como *efecto mariposa*, apelativo acuñado por Lorenz y cuya esencia se condensa en el hecho de que el simple aletear de una mariposa en una parte del mundo (por ejemplo en Brasil, donde son muy hermosas) puede provocar tal vez un huracán en otro punto alejado del planeta. Él mismo escribió:

> *"La persona común, viendo que somos capaces de prever las mareas con mucha exactitud y para varios meses, preguntaría: ¿por qué no podemos hacer lo mismo con la atmósfera?. Apenas es un sistema diferente, las leyes son igualmente complejas. Pero comprendí que cualquier sistema físico que se comportase de manera no periódica sería imprevisible."*

Llegados a este punto, se plantea la cuestión de compatibilizar orden y caos. ¿No parecen conceptos contrapuestos?. Los fenómenos caóticos no están desprovistos de leyes o teoremas. Existe un *orden en el caos*. Y este orden se refiere entre otras cosas a buscar la armonía que existe dentro de la irregularidad. Los encargados de estudiar el caos se preocupan por detectar cuando un sistema dinámico presenta sensibilidad a las condiciones iniciales (*los exponentes de Lyapunov* son parámetros que sirven para detectar esta característica) a comparar cuando hay más o menos caos, a medirlo (*entropía*), medir la velocidad en la que el caos es detectable o a buscar propiedades probabilísticas satisfechas por los sistemas caóticos.

El atractor de Lorenz no es el único atractor extraño que se conoce, existen otros muy famosos, provenientes de diversos ámbitos y con nombre propio, como el de *Rössler* (química), o todos los que proporciona el circuito electrónico llamado *circuito de Chua* (representaciones de estos atractores y muchos otros se pueden encontrar en ***http://hypertextbook.com/chaos/***).

La descripción de los atractores es uno de los problemas clave en la teoría de sistemas dinámicos, ya que, si los hay, la mayor parte de las trayectorias tiende hacia ellos y, por tanto, en su comportamiento está resumido el comportamiento a largo plazo del sistema. Por otro lado, la comprobación de que un determinado sistema posee un atractor extraño es muy complicado y de hecho, se conocen muy pocos ejemplos en los que la existencia de tales objetos se haya comprobado de manera rigurosa. La existencia de la mayor parte de los atractores extraños que se conocen ha sido sugerida empíricamente. Por tanto, probar la existencia de atractores extraños constituye uno de los problemas cruciales de esta teoría del caos, por la cual hemos intentado, humildemente, como advertí al principio, ***pasear un poco***.

Bibliografía

[1] R. Markarian, *La dimensión humana de la matemática*, Correo del Maestro. Ediciones La Vasija, Méjico, 2003.

[2] R. Markarian y R. Gambini, *Certidumbres, incertidumbres, caos*, Ediciones La Vasija y Ediciones Trilce, Méjico, 1999.

[3] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, American Mathematical Monthly 99 (4), 332-334, 1992.

[4] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 1989.

[5] S. Smale, *Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio*, Mathematical Intelligencer 20 (1), 39-44, 1998.

[6] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 2001.

[7] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.

[8] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer, 1998.

[9] R.V. Solé y S.C. Manrubia, *Orden y Caos en Sistemas Complejos. Fundamen-*

tos, Ediciones UPC, 2001.

[10] D. Ruelle, *Azar y Caos*, Alianza, 1993.

Clementa Alonso González
Universidad de Alicante
Departamento de Estadística e
Investigación Operativa
Apartado de Correos 98, 03080 Alicante
e-mail: ***clementa.alonso@ua.es***