Politopos regulares en la cuarta dimensión, por Alicia Boole Stott

por

Irene Polo-Blanco, Universidad de Cantabria

1. Introducción

Alicia Boole Stott, nacida en la segunda mitad del siglo XIX, fue una mujer de capacidades extraordinarias que, a pesar de no haber recibido apenas educación formal, contribuyó enormemente a la geometría de cuatro dimensiones. Aunque vivió la mayor parte de su vida de adulta como ama de casa, obtuvo muy importantes resultados en relación al estudio de politopos regulares gracias a su sorprendente capacidad para visualizar la cuarta dimensión. En concreto, Boole Stott calculó las secciones tridimensionales de dichos politopos en cuatro dimensiones (que son los análogos a los sólidos platónicos en una dimensión más) y descubrió muchos de los politopos semi-regulares en cuatro dimensiones. Además, colaboró con dos importantes geómetras de la época: P.H. Schoute y H.S.M. Coxeter, con los que trabajó en distintos aspectos de la geometría 4-dimensional.

Alicia Boole Stott (1860-1940)

2. Biografía

Alicia Boole Stott nació en Castle Road (Irlanda) en 1860. Su padre fue el famoso logista George Boole, que murió en 1864 a la edad de 49 años, cuando Alicia tenía tan sólo 4 años. Su madre, Everest Boole quedó a cargo de sus cinco hijas, disponiendo de muy pocos medios para llevar adelante a su familia. Por este motivo, se vio obligada a mudarse a Londres con sus hijas. Las cuatro hermanas de Alicia se convirtieron también en importantes figuras de la época por muy diversos motivos, aunque sólo Alicia destacó en matemáticas. Para un conocimiento detallado de la vida de la familia Boole nos referimos a [6]. En la siguiente fotografía, Alicia está presente con sus hermanas, su madre y varios descendientes:

Figura 1: De derecha a izquierda, de arriba a abajo: M. Taylor, E.L. Voynich, A. Boole Stott, L.E. Boole, M.E. Hinton, J. Taylor, M. Stott, M. Everest Boole, G. Hinton, G.I. Taylor, L. Stott

Debido a que las universidades inglesas de la época no ofrecían títulos a mujeres, éstas podían tan sólo aspirar a estudiar algo de literatura clásica y otras artes. Los conocimientos formales científicos de Alicia consistían tan sólo en los dos primeros libros de Euclides. Una de las razones por las que Alicia pudo desarrollar su extraordinaria capacidad para la geometría se debe sin duda al ambiente tan particular en el que creció y la educación especial que recibió de su madre, Everest Boole, quien fue conocida en su época por sus peculiares ideas acerca de la educación. Everest Boole recibía además numerosas visitas en su casa en Londres, entre las que se encontraba la del aficionado matemático Howard Hinton, profesor de matemáticas de escuela enormemente interesado en la cuarta dimensión. Se hizo famoso con su libro *The fourth dimension* ([5]), en el que trató el tema de la cuarta dimensión desde un punto de vista filosófico. Durante sus visitas a la familia Boole, Hinton solía juntar varios cubos de madera intentando hacer visualizar a las cinco hijas el hipercubo en cuatro dimensiones. Alicia pronto comenzó a sorprender a Hinton con su habilidad para visualizar la cuarta dimensión, inspirada por sus juegos. Más adelante, Alicia contribuyó a escribir parte del libro [4].

Alicia se casó con Walter Stott en 1890, con el que tuvo dos hijos: Mary y Leonard. En su tiempo libre como ama de casa, Boole Stott comenzó a estudiar los politopos en cuatro dimensiones. En esos años, Boole Stott demostró la existencia de los seis politopos regulares en cuatro dimensiones de manera independiente, puese no tenía ningún contacto con el mundo científico de la época. Estos politopos fueron descubiertos por primera vez por Ludwig Schlaefli en 1850 (publicados tras su muerte en 1901 en [9]), y son los análogos de los sólidos platónicos en cuatro dimensiones. Los seis politopos regulares cuatro dimensionales reciben el nombre de: hipercubo, hipertetrahedro, hiperoctahedro, 24-cell, 120-cell y 600-cell.

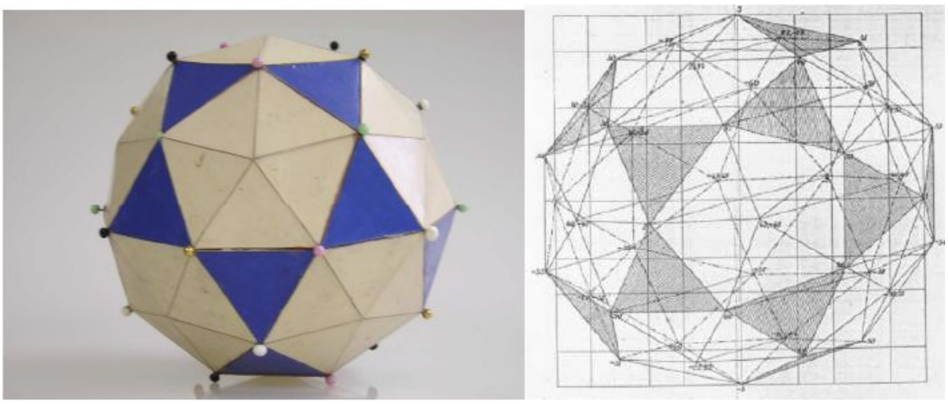

Figura 2: Sección central del 600-cell: Izquierda, modelo de Boole Stott. Derecha, dibujo de Schoute en [10].

El trabajo de Boole Stott de esta época consistió en el cálculo de las secciones en tres dimensiones de los seis politopos regulares, que construyó en modelos de cartón de colores. En el año 1894, el geómetra holandés Pieter Hendrik Schoute calculó, utilizando puramente métodos analíticos, las secciones centrales de los seis politopos regulares. Boole Stott supo acerca de su publicación [10] y observó que los resultados de Schoute y los suyos coincidían. Boole Stott envió fotos de sus modelos a Schoute de las secciones que había calculado (que incluían las series completas, además de la sección central calculada por él).

Schoute le contestó inmediatamente muy sorprendido con sus resultados proponiéndole una colaboración que duraría casi 20 años. Schoute solía viajar a Inglaterra durante las vacaciones de verano, donde trabajaba con Boole Stott en diversos temas relacionados con la cuarta dimensión. Su colaboración fue muy fructífera debido, entre otros motivos, a la combinación de la intuición de Boole Stott en la cuarta dimensión y los métodos analíticos de Schoute. El trabajo de Boole Stott en este tema fue recompensado con un doctorado honorario que le concedió la Universidad de Groningen en 1914 en sus festividades del 300 aniversario.

Boole Stott se dedicó después de la muerte de Schoute en 1913 exclusivamente a su vida de ama de casa. En 1930 retomó su trabajo cuando conoció al geómetra H.S.M. Coxeter. Aunque Coxeter tenía tan sólo 23 años y Boole Stott 60, trabajaron conjuntamente en diversos aspectos de la geometría en cuatro dimensiones hasta la muerte de Boole Stott en 1940. Gracias a numerosas referencias en el trabajo de Coxeter a Boole Stott conocemos muchas de sus aportaciones matemáticas así como diversos aspectos de su vida personal (ver por ejemplo *Regular polytopes* ([3])).

3. Publicación de 1900: secciones de politopos regulares

Boole Stott publicó sus resultados en dos artículos: [1] en 1900 y [2] en 1910. El primero de ellos representa un estudio exhaustivo de las secciones tridimensionales paralelas de los seis politopos regulares. Dichas secciones son el resultado de intersecar espacios tridimensionales con el politopo, siendo dichos espacios tridimensionales paralelos a una de las caras tridimensionales del politopo.

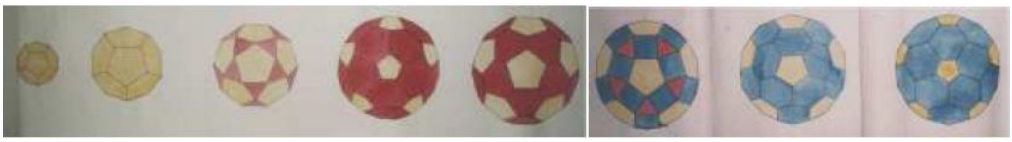

Figura 3: Dibujos de las secciones paralelas del 120-cell. Univ. de Groningen

Los dibujos en la figura 3 representan las secciones paralelas del 120-cell. En la siguiente figura, vemos los modelos construidos por Boole Stott de las secciones *diagonales* del 600-cell (en las secciones diagonales, los espacios tridimensionales considerados son perpendiculares al segmento que conecta uno de los vértices con el centro del politopo).

Figura 4: Modelos de las secciones diagonales del 600-cell. Museo de la Universidad de Groningen

En relación al método utilizado por Boole Stott en su artículo, varios puntos merecen ser mencionados. Al igual que un sólido platónico puede ser desdoblado a un plano, un politopo de cuatro dimensiones puede ser desdoblado a un espacio tridimensional. Una vez en dicho espacio, los cálculos de las secciones se simplifican considerablemente, facilitando en gran medida su visualización. Comenzamos explicando dicha metodología en el caso de dos dimensiones.

Nos planteamos calcular las secciones del tetraedro paralelas a una de las caras (triángulos). Una manera de abordar el problema es desdoblando el tetraedro como se ve en la figura 5. Si consideramos el plano que contiene una de las caras, por ejemplo, el triángulo amarillo, la intersección del tetraedro con el plano será claramente el triángulo mismo de vértice a.

Para calcular la segunda sección, el plano se traslada paralelamente a la cara en dirección al centro del poliedro hasta que pasa por el punto b. En la figura desdoblada, esto se traduce en que las aristas del triángulo amarillo se mueven paralelamente a una misma distancia hasta que pasan por el vértice b, formando de nuevo un triángulo de menor tamaño (triángulo rojo en la figura 5). Repitiendo de nuevo el proceso, se ve claramente que todas

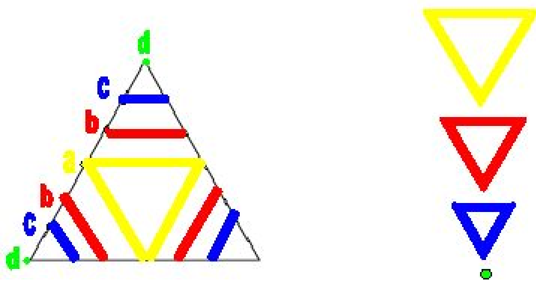

Figura 5: Tetraedro desdoblado y sus secciones paralelas

las secciones son triángulos que van disminuyendo en tamaño, finalizando en el vértice d. Como hemos visto, es posible calcular las secciones de dos dimensiones del tetraedro sin necesidad de visualizar el objeto tridimensional.

Un método similar puede ser usado en una dimensión más. El método de Boole Stott parte de desdoblar el objeto en cuatro dimensiones a un espacio de tres dimensiones, análogamente al caso anterior. Aunque la visualización en el caso de los politopos en cuatro dimensiones se complica considerablemente, con el fin de clarificar las explicaciones de Boole Stott, explicamos el caso del cálculo de las secciones del hipercubo, por ser éste un ejemplo sencillo.

En la figura 6 se muestra parte del hipercubo desdoblado (dibujo original de Boole Stott). Se observa en la figura que algunas de las caras de dos dimensiones (cuadrados) deben ser identificadas para recuperar el hipercubo original (esta identificación tiene por supuesto sólo sentido en la cuarta dimensión). La primera sección tridimensional es el resultado de intersecar el politopo P con un espacio tridimensional H_1 que contenga al cubo $ABCDEFGH$.

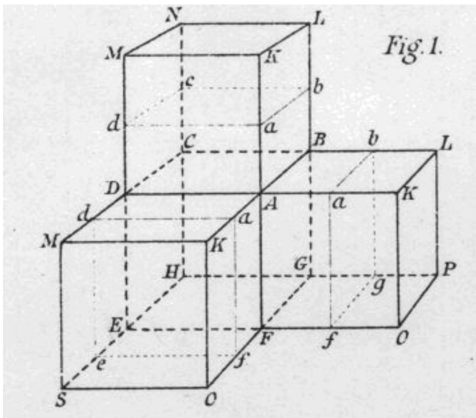

Figura 6: Parte del hipercubo desdoblado [1]

Para obtener la segunda sección, el espacio H_1 se traslada en dirección al centro del politopo hasta que pasa por el punto a. Si llamamos a dicho espacio H_2, la siguiente sección será $H_2 \cap P$. Notar que las caras de la nueva sección deben ser paralelas a las caras del cubo $ABCDEFGH$. En particular, la sección $H_2 \cap P$ contiene los cuadrados $abcd$, $abfg$ y $adef$. Tras las identificaciones necesarias de los vértices correspondientes, y utilizando la simetría del politopo, se concluye que la segunda sección $H_2 \cap P$ es de nuevo un cubo isomorfo al cubo $ABCDEFGH$. De manera análoga, la tercera sección será de nuevo un cubo.

Este ejemplo sencillo proporciona una idea del método de Boole Stott. Siguiendo el mismo razonamiento, se pueden calcular las secciones de los politopos regulares restantes. Un estudio detallado, junto con dibujos de los resultados, se puede encontrar en el artículo de Boole Stott y en [7].

4. Publicación de 1910: politopos semi-regulares obtenidos a partir de regulares

En su segundo trabajo [2], Boole Stott desarrolló un método para obtener politopos semi-regulares a partir de regulares. Su método consiste en aplicar la operación *expansión* (y su inversa, *contracción*) a un politopo regular dado (esto es, se desplaza el conjunto de sus vértices (equivalentemente aristas, caras, etc.) del centro del politopo hasta que el resultado forma un politopo semi-regular). En el caso de dos dimensiones, se puede expandir un polígono regular de n lados respecto a las aristas, resultando en un polígono regular de $2n$ lados, como se muestra en la figura 7.

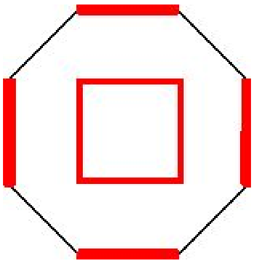

Figura 7: Expansión respecto a las aristas de un cuadrado da lugar a un octógono

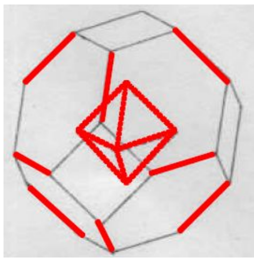

Figura 8: Expansión (aristas) de un octaedro es un octaedro truncado

En el espacio tridimensional, un sólido platónico se puede expandir respecto a sus aristas dando lugar al mismo sólido truncado (ver figura 8).

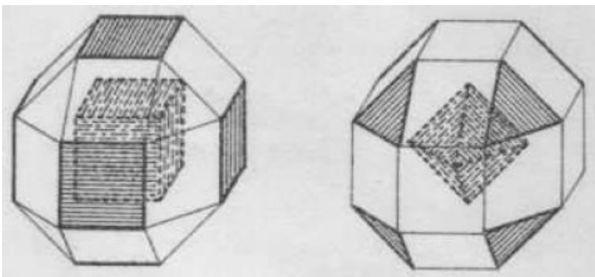

Figura 9: Expansión del cubo y del octaedro con respecto a sus caras ([2])

La operación expansión de un sólido platónico con respecto a sus caras da lugar al mismo poliedro semi-regular cuando se aplica a un sólido y a su dual, como se aprecia en la figura 9.

Aplicando estas operaciones a politopos regulares en cuatro dimensiones, Boole Stott obtuvo 45 tipos de politopos semi-regulares. Aunque dichos politopos son conocidos por el trabajo de Whythoff de 1918 ([11]), fueron descubiertos previamente por Boole Stott. Un resumen de su trabajo puede encontrarse en [8].

5. Conclusión

Alicia Boole Stott, constituye un gran ejemplo de matemática *amateur* nacida en el siglo XIX. A pesar de no haber tenido apenas contacto con la comunidad matemática de la época, o quizás debido a ello, desarrolló una enorme intuición hacia la cuarta dimensión. Su método para trabajar con objetos en cuatro dimensiones, muy diferente al analítico utilizado en la época, la llevó a sus descubrimientos. De su trabajo conservamos además sus modelos de cartón de colores que nos recuerdan la belleza de sus resultados.

Bibliografía

[1] A. Boole-Stott, *On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids*, VKAWA 7 (3), 1-21, 1900.
[2] A. Boole-Stott, *Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings*, VKAWA 11 (1), 3-24, 1910.
[3] H.S.M. Coxeter, *Regular polytopes*, Methuen and Co., 1948.
[4] C.H. Hinton, *A new era of thought*, Sonnenschein & Co. Ltd., 1888.
[5] C.H. Hinton, *The fourth dimension*, Ayer Co. Kessinger Pub., 1904.
[6] D. McHale, *George Boole: his life and work*, Boole Press, 1985.
[7] I. Polo Blanco, *Alicia Boole Stott, a geometer in higher dimension*, Historia Mathematica 35 (2), 123-135, 2008.
[8] I. Polo Blanco, *A classical approach to the study of Archimedean four-dimensional polytopes*, Mathematische Semesterberichte, en prensa.
[9] L. Schlaefli, *Theorie der vielfachen Kontinuität*, Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft 38, 1-237, 1910.
[10] P.H. Schoute, *Regelmässige Schnitte und Projektionen des Achtzelles und des Sechszehnzelles im vierdimensionalen Räume*, VKAWA 2, 3-12, 1894.
[11] W.A. Wythoff, *A relation between the polytopes of the C_{600} family*, VKAWA 20, 966-970, 1918.

VKAWA es Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

Irene Polo-Blanco
Universidad de Cantabria
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas,
Estadística y Computación
Avenida de los Castros s/n
39005 Santander
e-mail: ***irene.polo@unican.es***