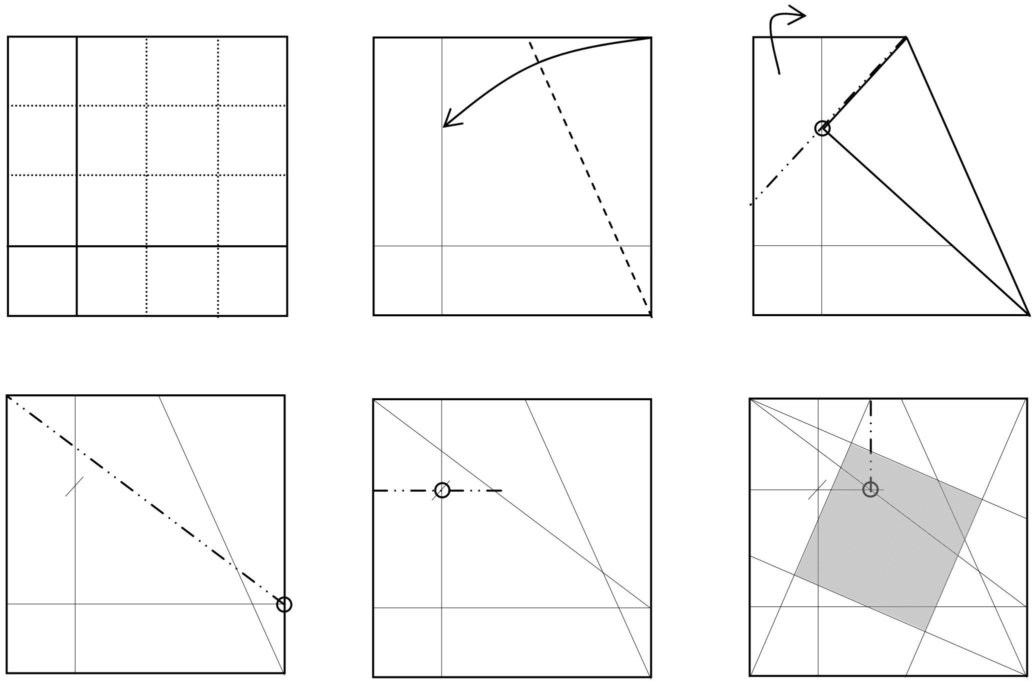
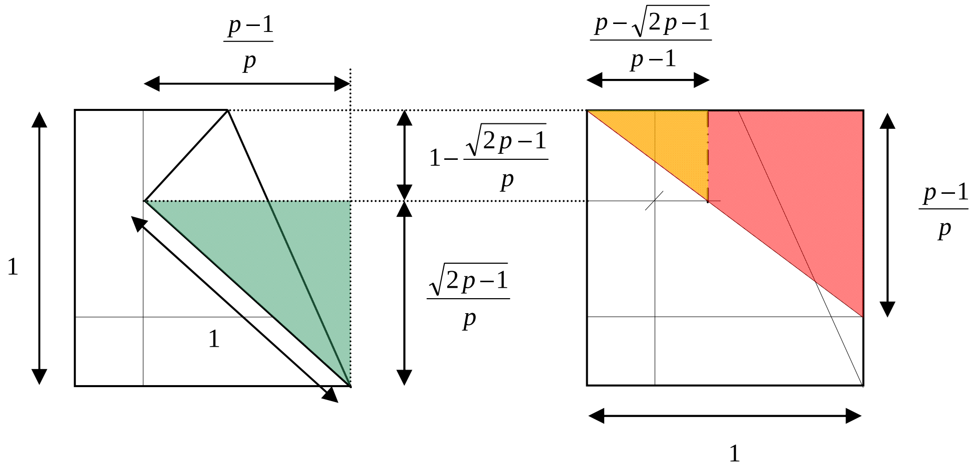
<u>Solución al Problema del Verano 2010</u>

Martí Bayer (ti.bay@hotmail.com)

Diagramas para obtener un cuadrado central de área $1/p$ a partir de un cuadrado unidad. Método valido para $p>1$ con diagramas dibujados para el caso $p=4$. Dividir el papel en p partes en el paso 1.



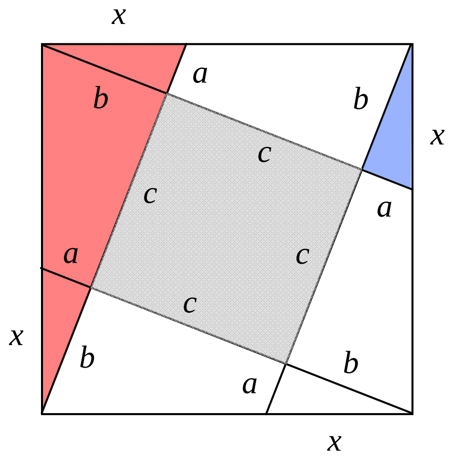
Análisis de la secuencia de doblado:



Se construye un triangulo rectángulo (verde) de hipotenusa 1 y cateto $\frac{p-1}{p}$, el cateto situado en la vertical mide $\frac{\sqrt{2p-1}}{p}$ y el segmento restante del cuadrado es de $1-\frac{\sqrt{2p-1}}{p}$.

Los triángulos de la derecha son semejantes; dividiendo por $\frac{p-1}{p}$ se obtiene $\frac{p-\sqrt{2p-1}}{p-1}$.

Para la resolución analítica, definimos las longitudes a, b y c como se indica en la figura



Por construcción, los triángulos rojo y azul son semejantes y en un cuadrado unidad cumplirán la relación $x = a/b$. Los catetos miden a y b (azul) e x y 1 (rojo) y cumplen las relaciones $a^2 + b^2 = x^2$ y $x^2 + 1 = (a+b+c)^2$.Con estas tres ecuaciones se puede encontrar c en función de x:

$$\begin{cases} x = a/b \\ a^2 + b^2 = x^2 \\ x^2 + 1 = (a+b+c)^2 \end{cases} ; \begin{cases} a = bx \\ b^2x^2 + b^2 = x^2 \\ c = \sqrt{x^2+1} - a - b \end{cases} ; \begin{cases} a = x^2 \big/ \sqrt{x^2+1} \\ b = x \big/ \sqrt{x^2+1} \\ c = (1-x) \big/ \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

A partir de aquí encontramos el área del cuadrado interior $A = c^2$ con

$$A = c^2 = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}.$$

Introduciendo $A = 1/p$ se obtiene la ecuación de segundo grado

$$(p-1)x^2 - 2px + (p-1) = 0 \ .$$

Como $x < 1$ la solución que buscamos es

$$x = \frac{p - \sqrt{2p-1}}{p-1}$$