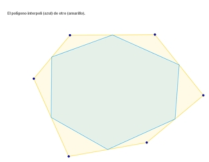
Introducción

La geometría sintética manifiesta su belleza en las relaciones de orden, simetría o regularidad que aparecen en sus construcciones. Pero además, desde la Antigua Grecia, ofrece brillantes ejemplos de cómo aprovechar al máximo recursos relativamente sencillos, ese otro tipo de “belleza” más abstracta e inherente al mundo matemático.

En este artículo usaremos herramientas muy sencillas. Prácticamente, sólo emplearemos un concepto, la semejanza, y un procedimiento, el teorema de Tales. Veremos que con estas simples herramientas podremos ahondar considerablemente en el problema que nos servirá de ejemplo.

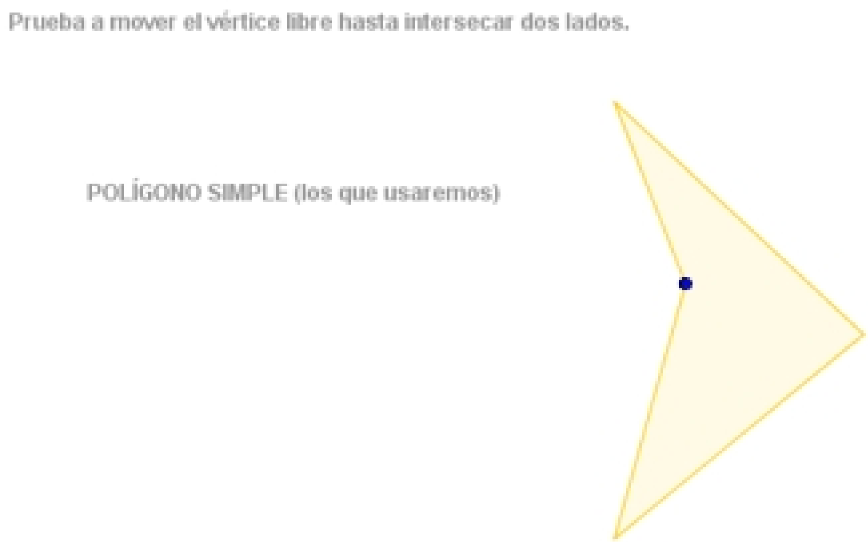
En la primera parte del artículo anterior hablábamos de “polígonos generados al unir los puntos medios de otro polígono”. Debido a lo molesto que resultaría repetir constantemnte esta descripción, hemos inventado el término **interpoli** para referirnos al polígono así creado a partir de otro. Pues bien, mostrábamos en ese artículo cómo una precipitada generalización de la regularidad observada en la proporción de las áreas de un polígono y su interpoli puede conducir a inferir “leyes” falsas. Ahora, en vez de frustrarnos, retomaremos nuestro fracaso para darle la vuelta al problema y alcanzar un resultado general válido.



Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Antes de comenzar

En todo el texto consideraremos los polígonos (trapecios, cuadriláteros, pentágonos, etc.) en el sentido de “polígono simple” o “polígono no cruzado”, es decir, como polígonos en donde no se interseca ningún par de lados no consecutivos.



Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Dando la vuelta a la tortilla

Recordemos la conjetura fallida. El interpoli de un triángulo guarda una razón constante de 1/4 respecto al área original. Lo mismo ocurre, con razón 1/2, en los cuadriláteros. Surge la tentación de generalizar esta constancia pero, al pasar al pentágono u otro polígono de más lados, la razón ya no se mantiene constante.

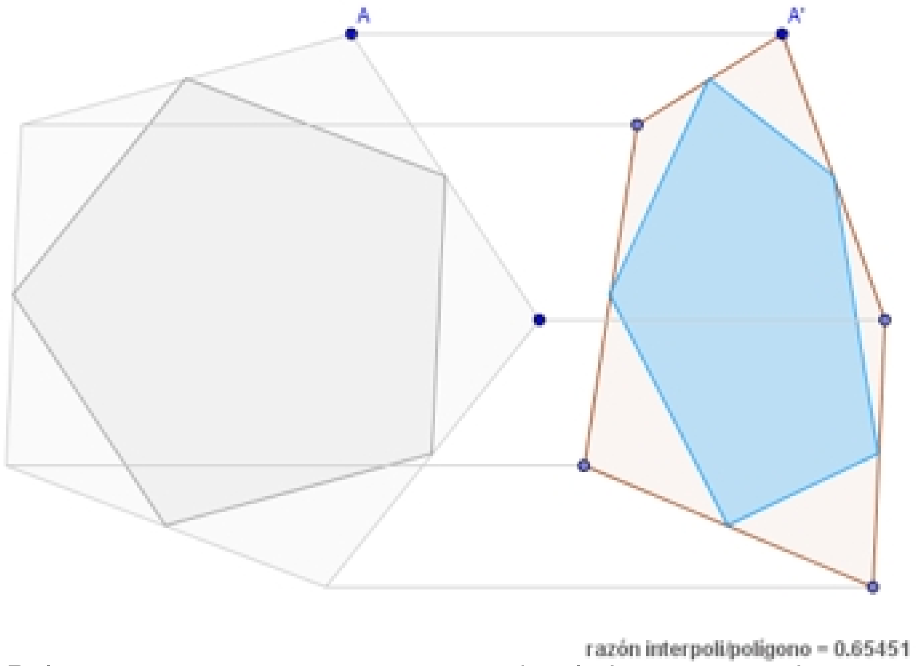
Podemos aprovechar la precipitada generalización anterior, una vez hemos comprobado que “no marcha”, para plantear el problema **al revés**. Si elegimos un polígono al azar, parece razonable pensar que la razón de áreas entre su interpoli y el propio polígono no sea la misma para todos los polígonos con el mismo número de lados, a no ser en algunos **casos particulares** como, de hecho, ya habíamos visto que son los triángulos y los cuadriláteros.

Ahora bien, ¿estos casos particulares obedecen sólo al número de lados o a otra “propiedad” desconocida? ¿Existirán “familias” de polígonos, con más de cuatro lados, que tengan esa misma propiedad y por tanto mantengan todos la misma proporción entre sus áreas y las de sus interpolis respectivos? ¿Son todos los triángulos y cuadriláteros miembros de esas familias? ¿Cuál es, si existe, esa misteriosa “propiedad”?

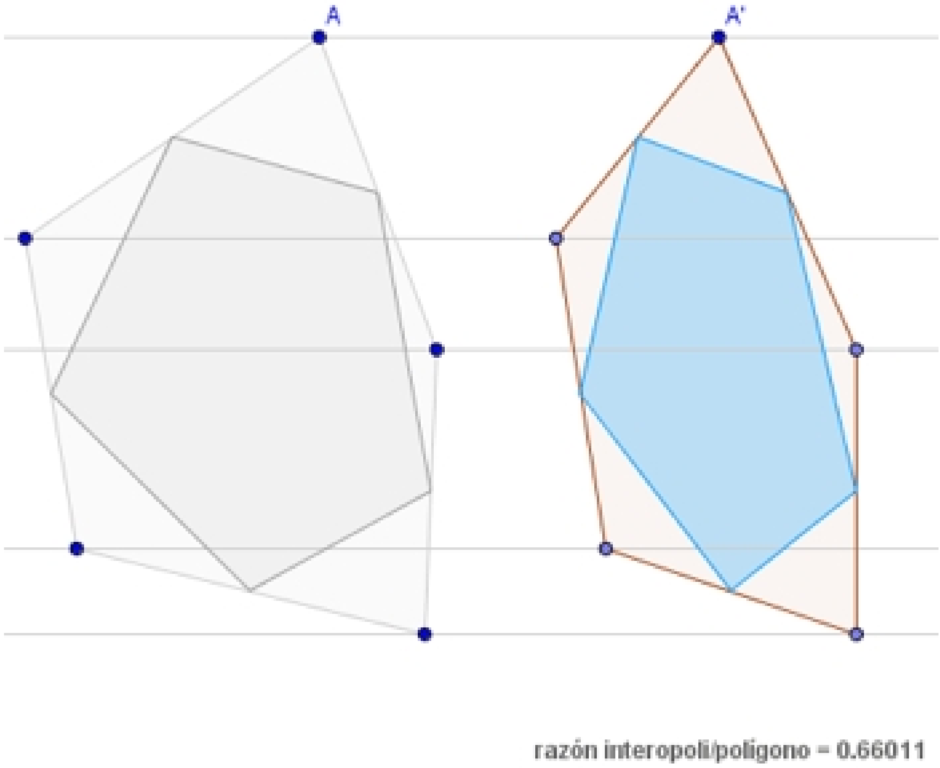
A lo largo de este artículo mostraremos que esa **propiedad** existe. Nuestro objetivo será mostrar que, dado un polígono, la propiedad que debe cumplir para mantener su área en razón constante con la de su interpoli se puede definir como:

la posibilidad de unir sus vértices mediante un haz de rectas paralelas con los de un polígono regular de igual número de lados.

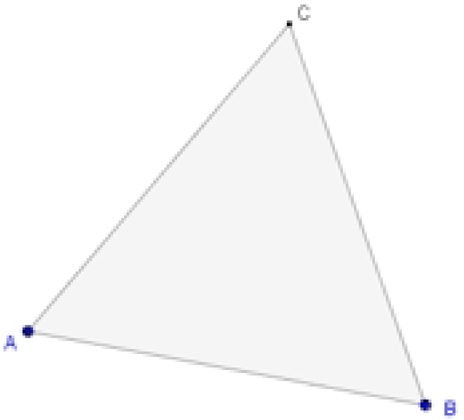
En la siguiente construcción podemos ver un ejemplo. El pentágono rojo de la derecha mantiene siempre la misma razón con su interpoli azul porque sus cinco vértices se desplazan sobre un haz de rectas paralelas que lo conectan con los vértices de un pentágono regular.

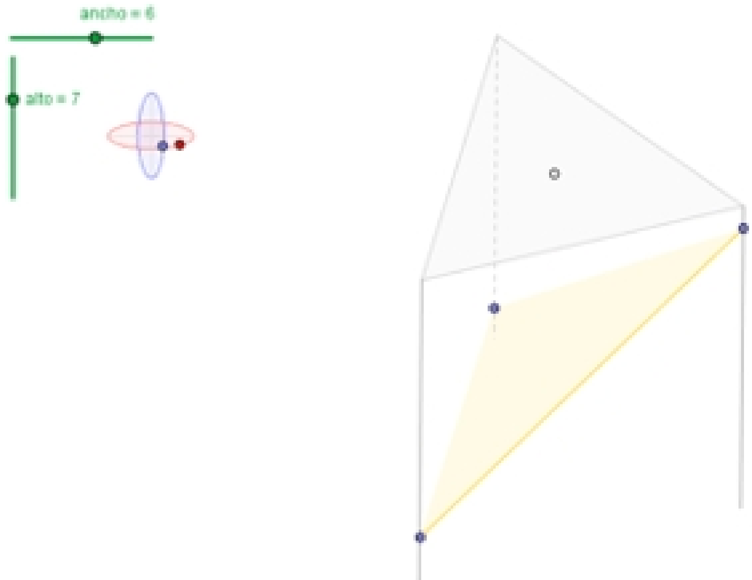


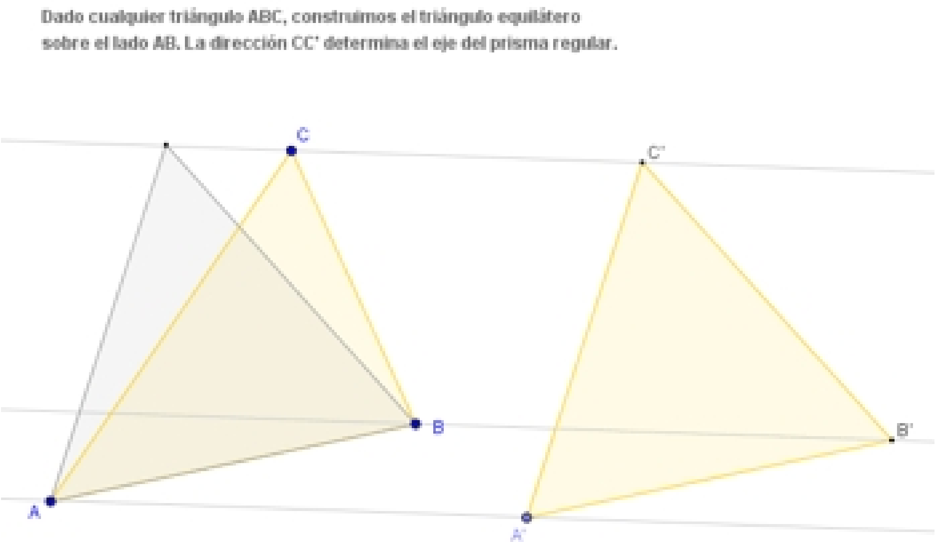
Pulse [illegible] sobre la imagen para interactuar [illegible] con ella

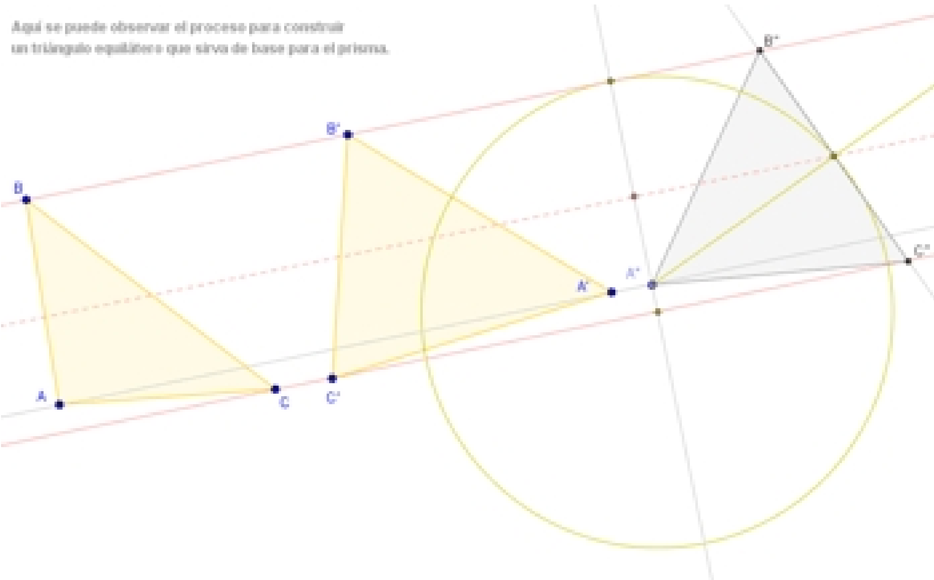


Pulse [illegible] sobre la imagen para interactuar [illegible] con ella

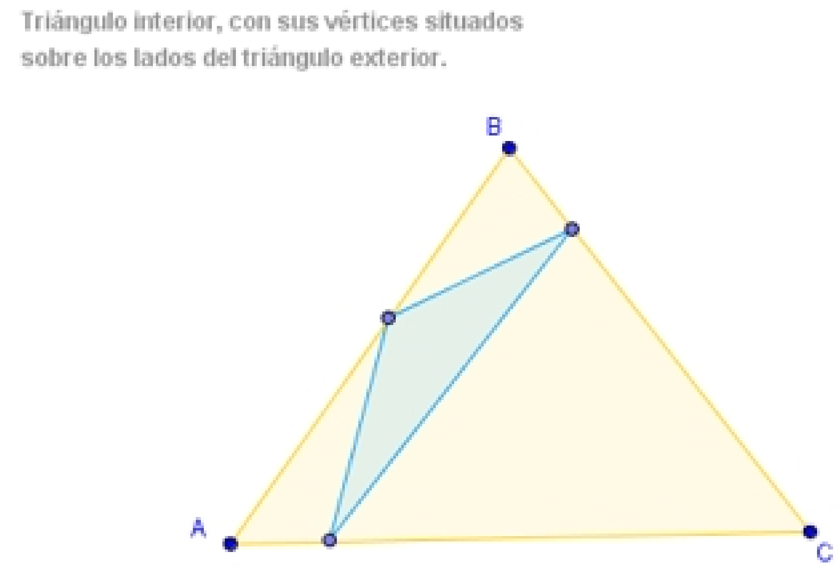

C
A
B


ancho = 6
alto = 7

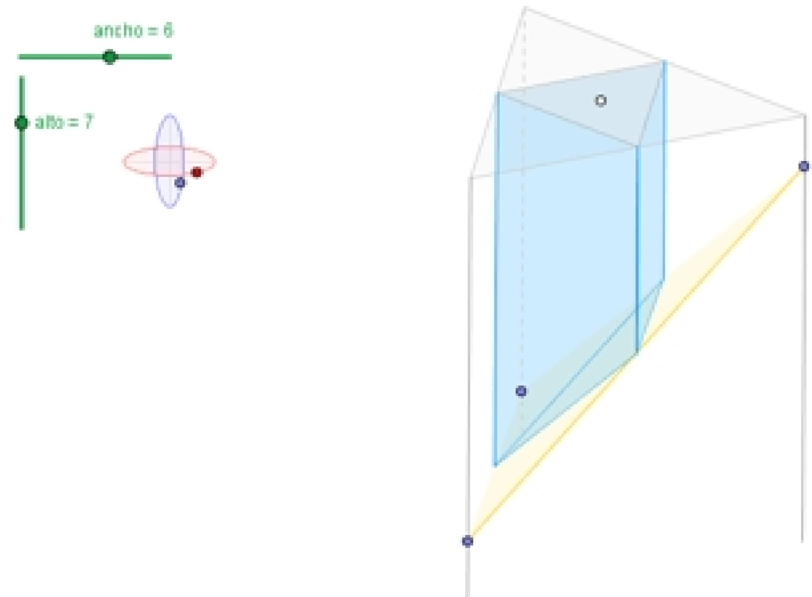

Dado cualquier triángulo ABC, construimos el triángulo equilátero
sobre el lado AB. La dirección CC' determina el eje del prisma regular.
C
C'
A
B
A'
B'



sobre la imagen para interactuar con ella



sobre la imagen para interactuar con ella

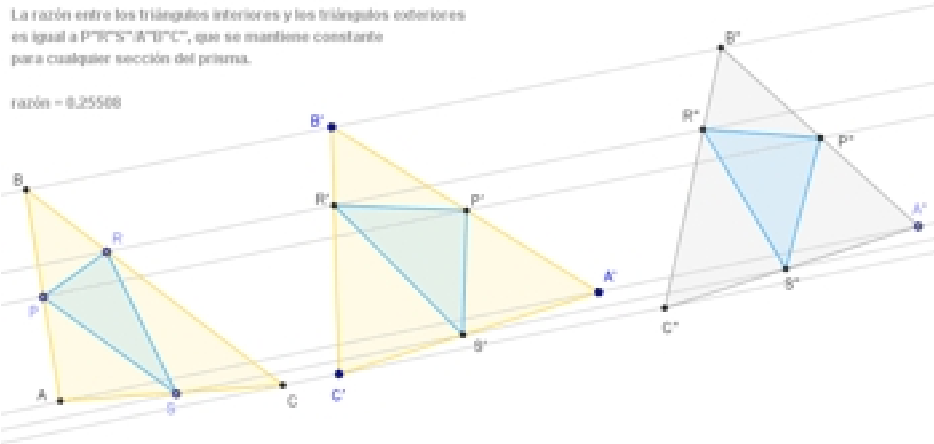


~~Pulsa~~ sobre la imagen para interactuar con ella

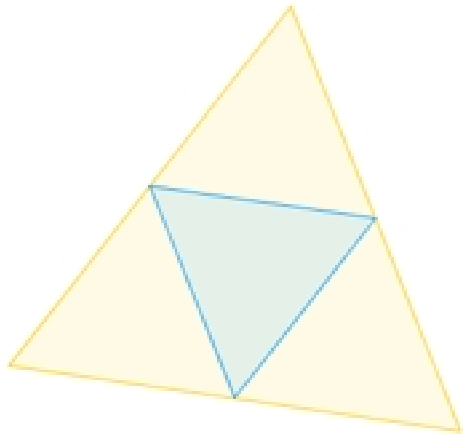
Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)

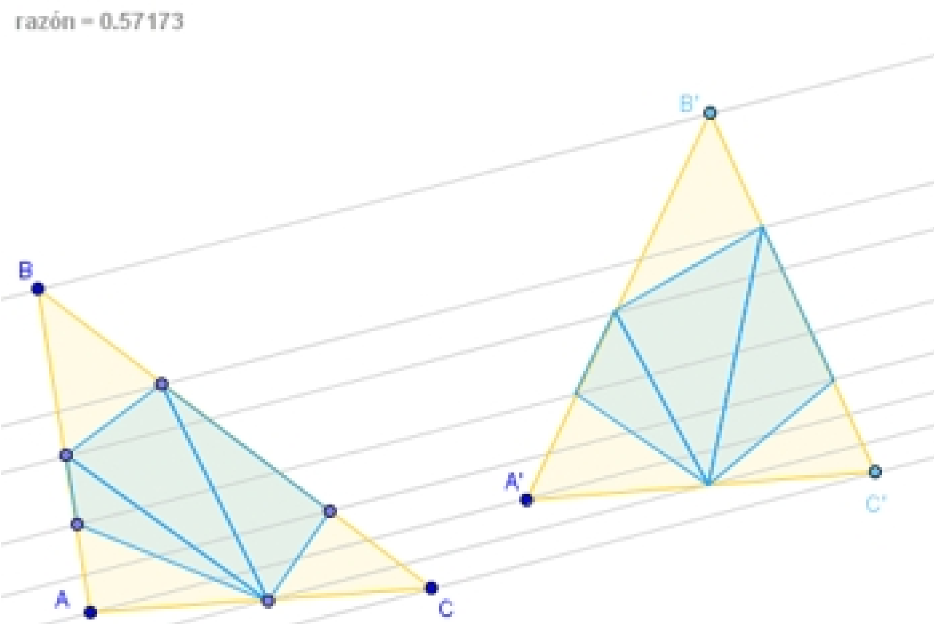
Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38

$$\frac{PRS}{ABC}=\frac{P'R'S'}{A'B'C'}$$



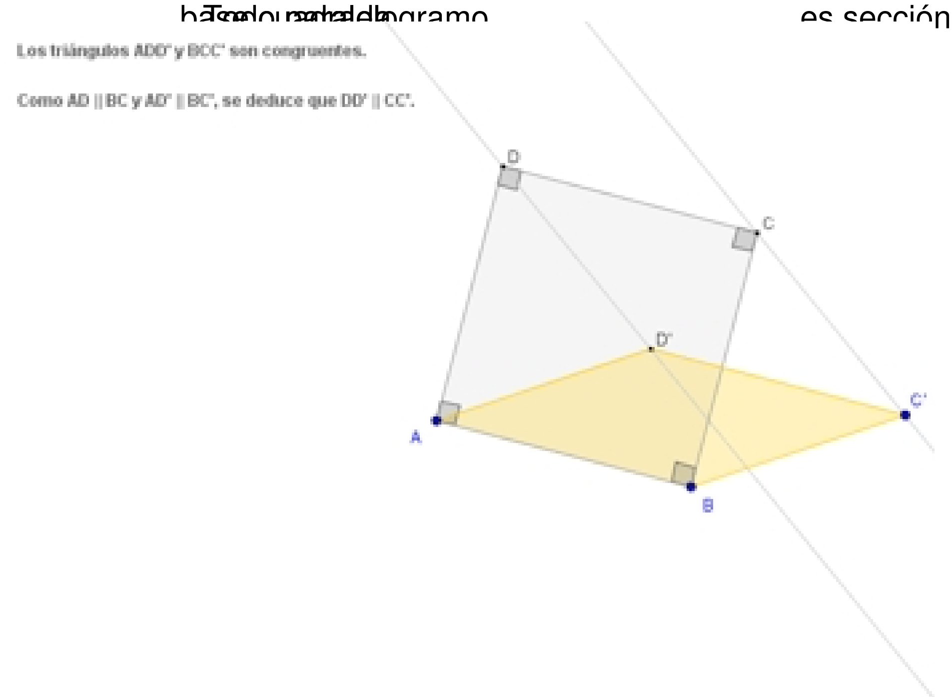
Pulse sobre la imagen para interactuar con ella



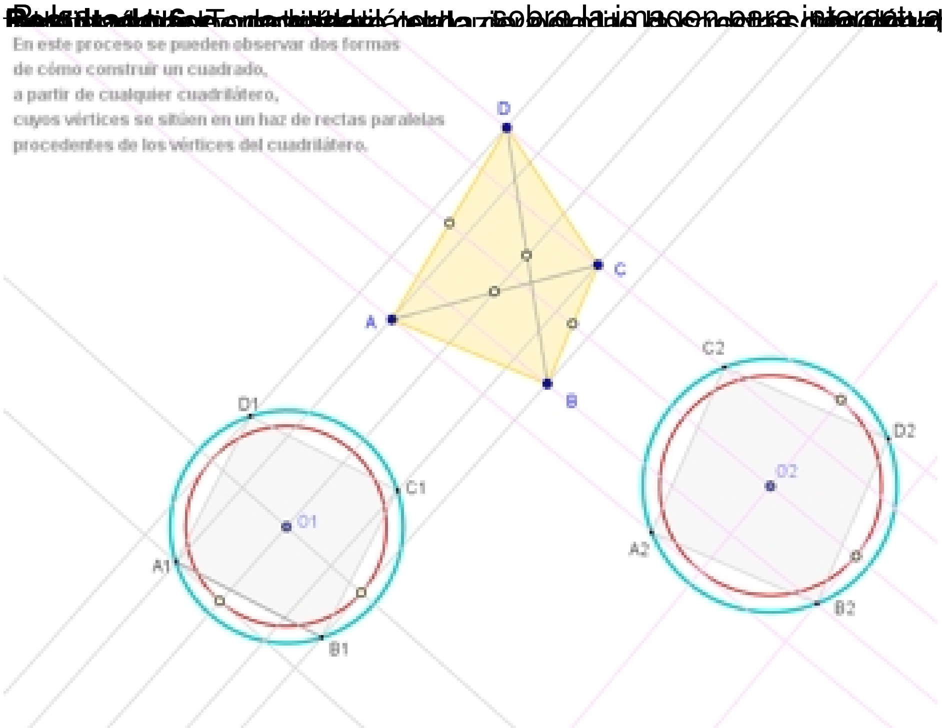


Pulse sobre la imagen para interactuar con ella

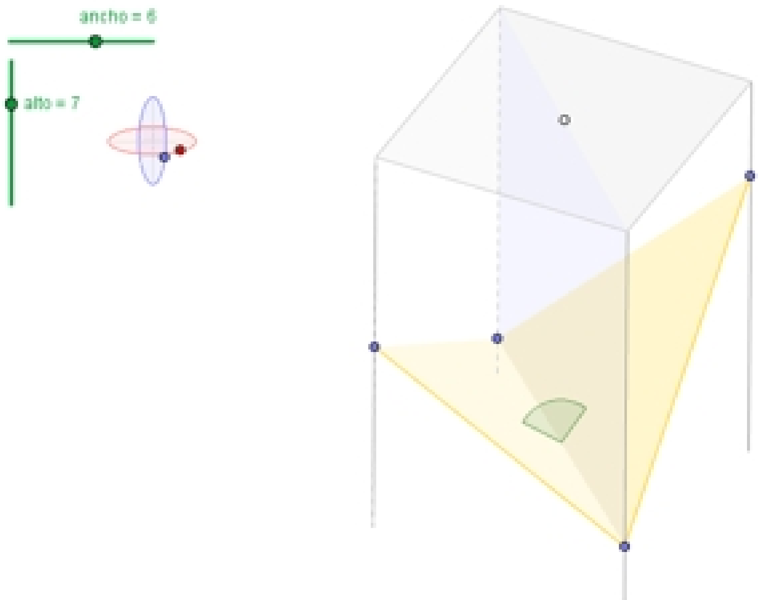
Todo cuadrado ... base un paralelogramo ... es sección de algún prisma de



Pulse ... sobre la imagen para interactuar con ella

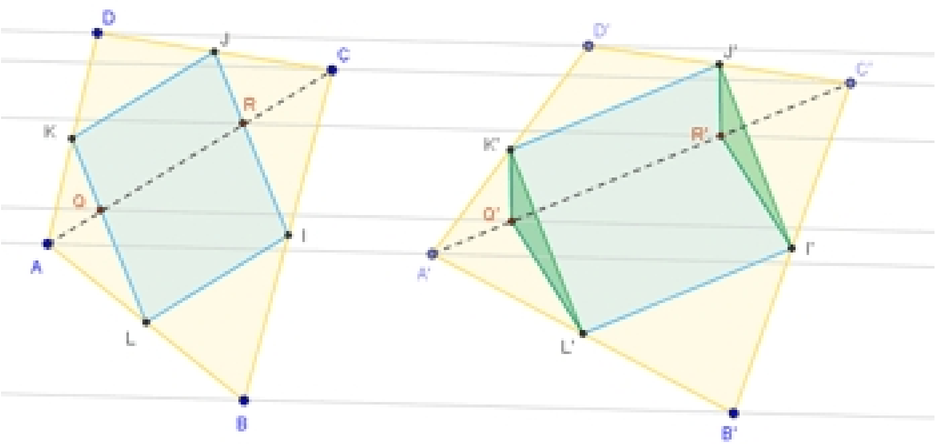


Pulse ... sobre la imagen para interactuar con ella

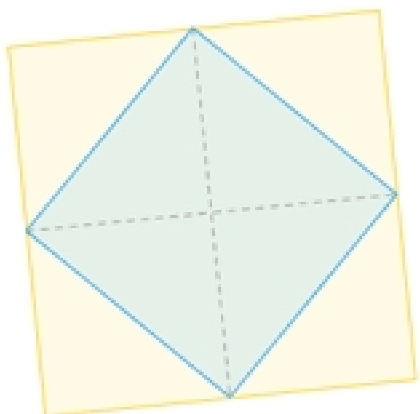


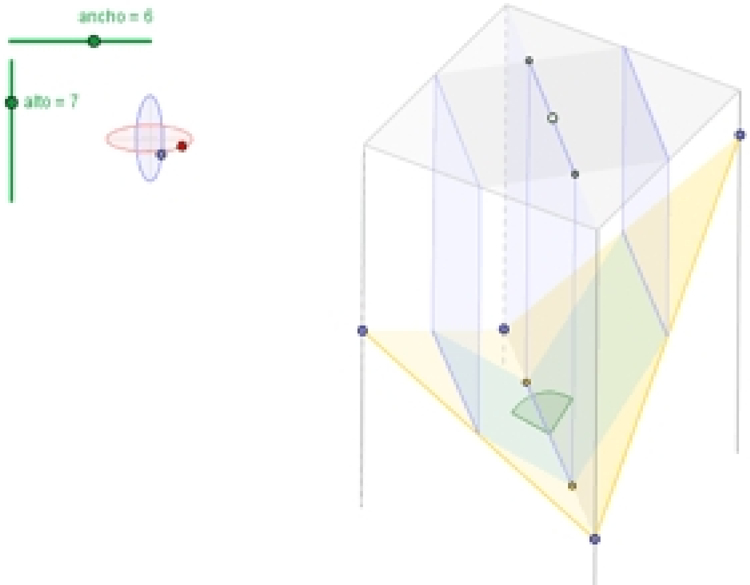
Pulse sobre la imagen para interactuar con ella

$$\frac{I'J'K'L'}{A'B'C'D'}=\frac{I'L'Q'R'}{A'B'C'D'}+\frac{Q'R'J'K'}{A'B'C'D'}=\frac{ILQR}{ABCD}+\frac{QRJK}{ABCD}=\frac{IJKL}{ABCD}$$

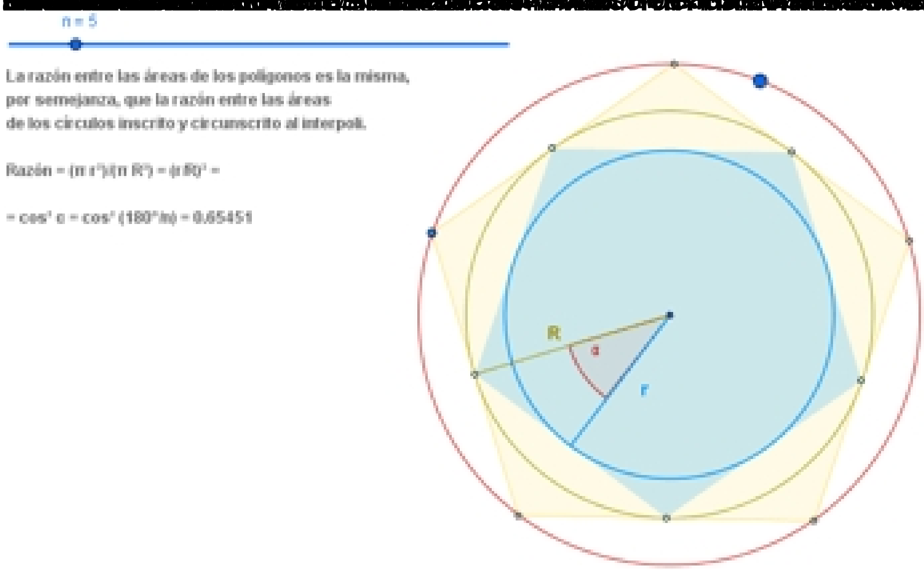


Pulse sobre la imagen para interactuar con ella

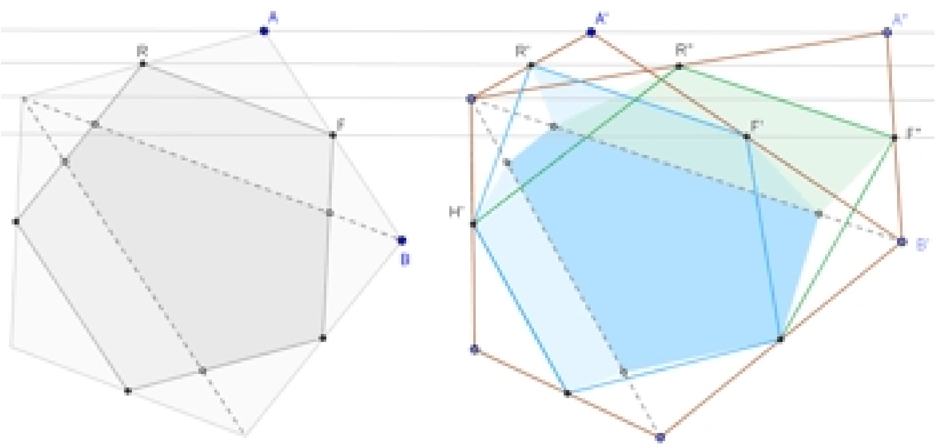




Pulse sobre la imagen para interactuar con ella



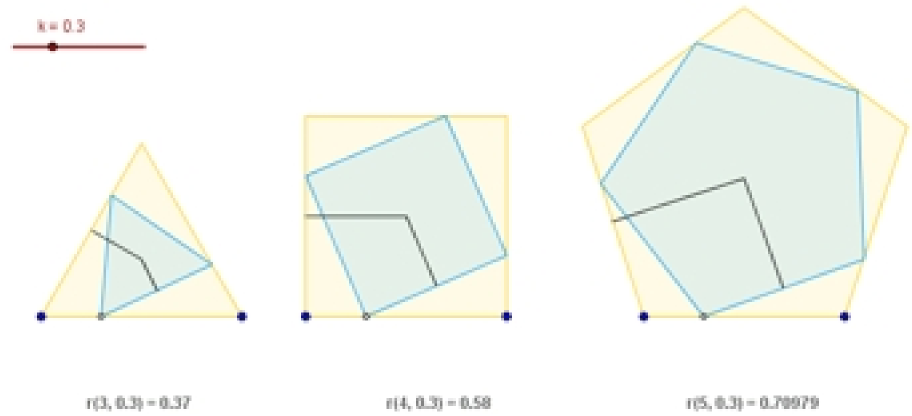
Pulse sobre la imagen para interactuar con ella



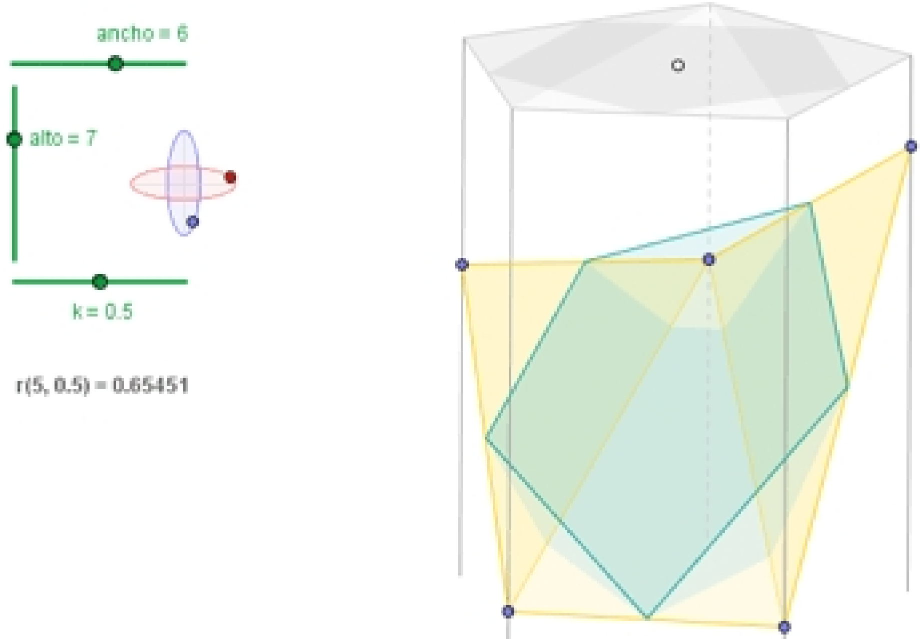
Pulse sobre la imagen para interactuar con ella

[illegible]

$$r(n,k)=\left(\frac{apotema}{Apotema}\right)^2=(2k-1)^2\,\mathrm{sen}^2(180°/n)+\cos^2(180°/n)$$



[illegible] con ella



~~Pulsa~~ sobre la imagen para interactuar con ella