Christian Goldbach nace el 18 de marzo de 1690 en el seno de la familia del profesor de Historia y Retórica Bartolomeus Goldbach de la Universidad de Königsberg. El primer maestro de Goldbach fue su padre, quien sin dudas ejerció una notable influencia en la amplitud de intereses culturales que durante toda su vida mostró Christian.

Poco sabemos de los años escolares, pero a partir de los 19 años comenzó un diario que se conserva y ha sido estudiado. Su padre murió cuando Christian tenía 18 años de edad y su espíritu inquieto aún no había encontrado el camino cierto para su realización. El hermano mayor de Christian Goldbach estudiaba en la Universidad de Leipzig que era una de las más antiguas de Europa y tenía una reconocida fama. Goldbach también matricula en esta universidad para estar con su hermano mayor y en un ambiente intelectual que le apetece. En Leipzig contacta con Christian Wolff, confeso discípulo de Leibniz en Matemáticas y Filosofía Natural. Será Wolf quien le facilite su primer encuentro con Leibniz, cuando Goldbach acaba de cumplir 21, mientras Leibniz ya contaba con 65 años de edad. No obstante, Leibniz lo estimula a continuar con sus preocupaciones científicas, particularmente matemáticas. Aunque esta no fue la única vez que estos dos sabios se encontraron, la mayor parte de su relación se llevó a cabo por cartas, ya que Goldbach emprende un largo viaje por Europa. En el diario se observa que en la época de este peregrinaje, sus intereses siguen siendo, amplios, sin preferencias científicas o humanistas.

En total Leibniz y Goldbach se escribieron 11 cartas, las últimas dedicadas a temas de la teoría matemática de la música y el movimiento de los planetas. La última carta fue escrita por Leibniz en 1713 y Goldbach no continúa la correspondencia a pesar de que Leibniz muere tres años más tarde. Quizás la razón de ello sea el temor a verse envuelto en la penosa polémica con Newton y la Royal Society, que podría obstaculizar su carrera profesional y sus íntimas aspiraciones que fueron estimuladas con el nombramiento el 3 de diciembre de 1714 como *Consejero* de Federico Guillermo I, Rey de la emergente y pronto poderosa Prusia.

En sus prolongados viajes por Europa Goldbach conoció a tres de los miembros de la afamada familia matemática de los Bernoulli: Nicolaus I, sobrino de los hermanos Jacob y Johann, y a dos de los hijos de este último, Nicolaus II y Daniel. Con Nicolaus I se encontró en Londres, en 1712 y después en Padua e intercambiaron sobre los temas científicos de la época. En el primer encuentro, Nicolaus, Goldbach y también el matemático francés exiliado en Inglaterra, Abraham de Moivre, discutieron sobre problemas simples de los números enteros en particular sobre la posibilidad de solución en enteros de las ecuaciones. $x^p - 3 = 9n$ o $x^p - 6 = 9n$.Tambié n Nicolaus obsequió a Goldbach la tesis desarrollada bajo la guía de su tío Jacob sobre *sumas infinitas y su aplicación a la cuadratura de áreas y la rectificación de curvas*, la cual en ese momento resultaba para él oscura y difícil de comprender. Así todo parece indicar que desde entonces se ven estimulados sus intereses por los dos temas principales de sus reflexiones matemáticas: *las propiedades de los números enteros y las sumas infinitas.*

A Nicolaus II, Goldbach lo conoció en Venecia en1721. En este encuentro y en la intensa correspondencia que mantuvieron durante un año, hasta la prematura muerte de Nicolaus, discutieron sobre temas relacionados con el nuevo cálculo de los diferenciales. Fue Nicolaus II quien recomendó a Goldbach que escribiera a su hermano Daniel, quien se interesaba tanto por los temas teóricos de las Matemáticas, como por sus aplicaciones. El intercambio epistolar entre Goldbach y Daniel Bernoulli duró más de 8 años y consta de más de 70 cartas. Al principio eran frecuentes los temas de Teoría de Números, pero también intercambiaron ideas sobre diferentes variantes de la ecuación de Riccati, sobre el llamado *juego o paradoja de San Petersburgo* relacionado con el cálculo de probabilidades y sobre temas de integración de funciones irracionales y sumación de series.

Tras un largo peregrinar por Europa que duró alrededor de 6 años, Goldbach regresa a Prusia en 1724, donde conoció personalmente al matemático Jacob Hermann, discípulo de Jacob Bernoulli, quien se aprestaba a viajar a San Petersburgo, para laborar en la recién creada Academia de Ciencias. Goldbach se entusiasmó con la idea y envió una carta al Presidente de la nueva Academia, preguntando por la posibilidad de contratación. Aunque, por ese entonces no tenía resultados científicos significativos, sí poseía experiencia como consejero del reino de Prusia, a lo que sumaba una vasta cultura adquirida en sus viajes y visitas a los más ilustres sabios de la época. Después de algunas negociaciones fue nombrado Secretario de la Academia, con la obligación de escribir las actas de las reuniones, preparar la edición de las obras y conservar los documentos que se precisaran para llevar la historia de la institución y, junto con el Bibliotecario, se ocuparía de la correspondencia entre los académicos y otros sabios de Europa.

A las gestiones de Goldbach como Secretario de la Academia se debió la contratación de los hermanos Nicolaus y Daniel Bernoulli, el primero para la cátedra de Mecánica y el segundo para la de Fisiología. Al fallecer Nicolaus, Daniel pasó a la cátedra de Mecánica y propuso a su coterráneo y amigo Leonhard Euler para la plaza de Fisiología. Así conoció Goldbach a quien, a pesar de ser 17 años más joven, sería el mejor corresponsal y confidente de su elucubraciones matemáticas. La correspondencia entre Euler y Goldbach duró hasta poco antes de su fallecimiento y consta de casi 200 cartas sobre diferentes temas. En toda esta correspondencia se manifiesta la gran estima que Euler siempre profesó a las opiniones y consejos de Godbach, a quien escogió como padrino de su primogénito.

Durante su estancia en San Petersburgo, Goldbach no solo realizó su trabajo como Secretario de la Academia de Ciencias, sino que pronto se vio inmerso en el torbellino de la alta política rusa de la época. Primero como preceptor del Zar Pedro II, sobrino de Pedro I (el Grande), que contaba con solo 10 años, después como consejero de la emperatriz Anna Ivanovna, también sobrina de Pedro I. Esta labor como consejero de los zares la continuó desarrollando aún cuando retornó a ocuparse de los asuntos de la Academia de Ciencias. Un mérito extraordinario de Goldbach es haber conseguido mantenerse dentro de los confidentes en la corte rusa mientras se sucedieron una tras otras las purgas administrativas y políticas. Cierto es que Goldbach poseía una cultura exquisita, además del alemán dominaba el latín y el francés, y entendía algo de ruso, además de poseer un amplio círculo de amigos influyentes y un indiscutible tacto diplomático. Desde 1742 es aceptado en el colegio de asuntos extranjeros con el rango de Consejero de Estado, realizando funciones que hoy denominaríamos como *crip tógrafo oficial*
. Muestra del respeto y el prestigio ganado sea que se le asignó uno de los aposentos del Palacio de Invierno, residencia de los zares rusos, y allí lo encontró la muerte el 1 de diciembre de 1764.

El legado matemático de Goldbach

Por supuesto que si comparamos los aportes matemáticos de Goldbach con los de cualquiera de los grandes sabios de la primera mitad de este siglo, resultan insignificantes. Pero si valoramos con justicia y objetividad sus influencias en el desarrollo de la comprensión de la naturaleza íntima de las matemáticas puras, sus estímulos al desarrollo de las investigaciones a través de sus contactos personales, de su correspondencia, de sus discursos en la Academia; y no centramos el análisis en sus pocas publicaciones originales o en la ausencia de premios obtenidos, sin dudas puede afirmarse que Christian Goldbach fue uno de los más influyentes sabios del siglo XVIII. Su nombre ha quedado prendado en una conjetura de la teoría de números que aún reclama resolución, pero sus más originales ideas son del campo de las sumas infinitas.

En una carta a su amigo Daniel Bernoulli en 1723, Goldbach cuenta cómo comenzó su interés en el tema de la sumación de series. El primo de Daniel, Nicolaus I Bernoulli, le obsequió la tesis que había desarrollado con su tío Jacob sobre el tema de las sumas infinitas. Pero, la tesis de Nicolaus era la quinta y última de las que asesoró Jacob Bernoulli y Goldbach todavía desconocía las cuatro anteriores, por tanto, su ignorancia no le permitió inmediatamente apreciar el arte de calcular que subyacía en la tesis, y la dejó a un lado. Cinco años después lee un artículo de Leibniz "*Sobre una relación exacta del círculo con un cuadrado inscrito expresada en números racionales*" donde aparecen dos resultados sorprendentes relacionados con sumas infinitas:

1. *Una cuadratura aritmética del círculo*: [1] $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.$
.
2. *Una cuadratura aritmética de la hipérbola*: $\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} + \ldots.$
.

El atractivo de estos resultados lo decidió a aprender lo necesario para apreciar mejor el arte del cálculo. Así Goldbach se dio a la tarea de indagar más sobre las series a través de los trabajos de algunos de sus contemporáneos, muy especialmente en las tesis dirigidas por Jacob Bernoulli. Así aparece la primera publicación de Goldbach en 1720, unas notas con algunas recetas ingenuas para expresar las sumas parciales de una serie, de forma que la estimación de su suma total fuera más expedita. Pero en sus publicaciones Goldbach no hizo ningún aporte prominente al arte de la sumación de series, ni en este primer artículo ni en los dos siguientes que se publicarían en 1729 y 1732. Sus ideas más originales y fructíferas las expuso en su correspondencia con Daniel Bernoulli y, principalmente, con Leonhard Euler. Era como si Goldbach poseyera un talento especial para componer agraciadas melodías de forma tal que sus brillantes corresponsales se sintieran estimulados a elaborarlas y presentarlas en muy diversas variantes.

Fué Goldbach quién motivó a Euler para que se interesara por el famoso problema de Basilea: hallar la suma de la serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots$$

.

Christian Golbach elaboró un original método de aproximación que lo llevó a estimar el valor de *S* entre 1,64 y 1,66, envió sus ideas por carta a Euler con el reto de mejorarlo. Dos años más tarde Euler hizo pública una asombrosa aproximación de 6 cifras decimales exactas: 1,643934. Y como es sabido, mas tarde encontró el valor exacto en función de la cuadratura del círculo unidad.

Otro ejemplo de la fructífera relación con Euler ha quedado rubricado con el único teorema que enlaza sus nombres y también se refiere a las sumas infinitas. Goldbach conocía una forma de probar la igualdad

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \ldots$$

y desafió a Euler para que encontrara otra demostración más precisa y concisa. En un extenso y maduro trabajo sobre series, Euler publica la demostración de este hecho y según él mismo reconoce, es la misma demostración que Goldbach le comunicó. Este es el resultado que actualmente se conoce como *Teorema de Goldbach-Euler*.

La ingenuidad de Goldbach en el tratamiento de las sumas infinitas está acorde con el estilo fresco y artificioso de la época dorada del arte de sumación. Pero las ideas rudimentarias de Goldbach, corregidas, aumentadas y mejor expresadas por Euler, se pueden considerar como germen de lo que en la encrucijada de los siglos XIX y XX se conformaría como “*Teoría de los algoritmos de sumación”.*

La verdad histórica sobre la enunciación de la conjetura de Goldbach

En 1742 Euler se había trasladado a Berlín y Goldbach le escribe a su amigo sobre nuevas proposiciones que ha concebido relacionadas con los números primos:

[…] quisiera aventurar una conjetura: todo número que esté formado por dos números primos es una suma de tantos números primos como se desee (contando entre ellos a las unidades), hasta alcanzar solo unidades.

Pero su especulación no se detiene allí. Al leer lo ya escrito reconoce que pudiera mejorar su conjetura y escribe al margen:

[...] Al volver a leer esto encuentro que esta conjetura se pudiera demostrar con sumo rigor en el caso n+1, si se cumple en el caso n y n+1 se divide en dos números primos. La demostración es muy sencilla. Parece ser al menos que todo número de ese tipo que sea mayor que 1 es suma de tres números primos.

En esencia, Goldbach indica cómo demostrar, mediante el método que hoy denominamos de inducción matemática, la siguiente tesis:

Si un número se puede representar como suma de dos números primos, entonces también se pue

Luego, el problema se reduce a determinar cuáles números se pueden representar como suma de dos números primos.

Euler envía como respuesta a Goldbach la consideración siguiente:

*Que un número que sea resoluble en dos números primos, se puede descomponer a la vez en tantos números primos como se quiera, puede ser ilustrado y confirmado a partir de una observación que su excelencia me había comunicado anteriormente, que todo número par es una suma de dos números primos. Puesto que el número propuesto n es par, entonces n es una suma de dos números primos y como n-*2 *también es una suma de dos números primos, entonces n es una suma de tres, y también de cuatro, etc. Si n es un número impar entonces él es una suma de tres números primos, porque n* -1
es una suma de dos y por tanto se puede resolver varias partes.

Entonces Euler añade:

Pero el que todo número par sea una suma de dos primos lo considero un teorema, a pesar de que no puedo demostrarlo…

Sin dudas Euler aplicó su gran ingenio para tratar de demostrar lo que el considera un teorema:

Todo número par mayor que 2 puede ser escrito al menos de una forma como suma de dos núme

Pero ni la perspicacia de Euler ni la de todos los matemáticos que por más de 260 años han dedicado sus esfuerzos a la prueba o refutación de esta afirmación han tenido éxito. Esta conjetura se conoce en la actualidad con el nombre de *Conjetura Binaria o Fuerte de Goldbach*.

A partir de la veracidad de la Conjetura Fuerte de Goldbach, resulta sencillo deducir la llamada *Conjetura Débil o Ternaria de Goldbach* que se acerca más a lo planteado por Goldbach en su carta a Euler y se expresa en la forma actual:

Todo número impar mayor que 5 puede ser escrito al menos de una forma como suma de tres núr

La demostración de esta afirmación a partir de la validez de la Conjetura Fuerte de Goldbach es muy sencilla, pues si n es un número impar mayor que 3, entonces se cumple que $n=3+m$, al considerar a m un número par mayor que 2, el cual, a su vez, según la Conjetura Fuerte de Goldbach, es la suma de dos números primos $m=p+q$. Luego, $n=3+p+q$.

Aunque la Conjetura Débil de Goldbach se deduce directamente de la Conjetura Fuerte, también se han dedicado grandes esfuerzos a demostrarla directamente. En los años 30 del siglo pasado se avanzó considerablemente en el acercamiento a una demostración al probarse que existe un número entero bien determinado C de modo que todo número natural n puede ser escrito como suma de no más de

C números primos, es decir, $n=p_1+p_2+...+p_m$, tales que p_i es primo ($i=1,...,m$) y $m \leq C$. Más adelante se logró probar que $C \leq$ 300000. La cota para esta constante C se ha logrado disminuir de forma sucesiva, así en los años 70 se logra probar que $C \leq$ 169 y, en esa misma década, se reduce sucesivamente hasta obtener que $C \leq$ 26. La mejor cota superior encontrada hasta el momento es 6. Sin dudas, con esto nos vamos acercando a la conjetura de Goldbach.

Con el avance vertiginoso de la computación es de esperar que la brecha entre los valores comprobados de la conjetura y los aún dudosos se continúe reduciendo. La gran dificultad no consiste en el desarrollo de algoritmos eficientes para la determinación de las descomposiciones de un número dado en suma de dos números primos, sino, precisamente, en la poca eficiencia que tienen las pruebas para determinar cuando un número es primo.

Como el propio Christian Goldbach reconociera, “*aquellas proposiciones que son muy probables aunque falte una verdadera demostración”* son sumamente útiles, “*pues aún cuando se descubra que son incorrectas, pueden conducir al descubrimiento de una nueva verdad”*.

Bibliografía

De las biografías de Goldbach, la que consideramos más completa es la de los historiadores rusos

- **A. P. Yushkevich; Y. J. Kopelievich** (1994) *Christian Goldbach. 1690-1764. Aus dem Russischen übersetzt von Annerose und Walter Purkert*
.
Vita Mathematica. 8. Basel: Birkhäuser.

Por supuesto, recomendamos la más reciente publicada en castellano que hemos utilizado como sustento de esta síntesis

- **C. Sánchez y R. Roldán** (2009) *Goldbach*. *Una Conjetura Indomable*. Ed. Nivola. Madrid.

Una interesante lectura en el maravilloso mundo de los problemas abiertos de la teoría de números y con su primer capítulo dedicado a la conjetura de Goldbach es

- **Guy, R. K**. (2004) " *Unsolved Problems in Number Theory* ", 3rd ed. New York: Springer Verlag.

La correspondencia entre Goldbach y Euler constituye una lectura de gran interés que recomendamos fuertemente. Se puede consultar, por ejemplo, en

- http://www.informatik.uni-giessen.de/staff/richstein

Nota:
[1] En la época se denominaba *cuadratura* de una curva al cálculo de algún área determinada por ella.