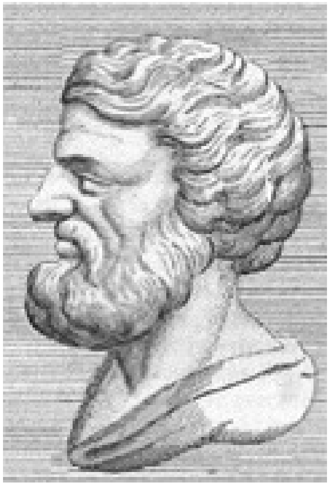


Este artículo está dedicado con admiración a la figura humana, científica y didáctica del Profesor Miguel de Guzmán, egregio espíritu innovador en la Docencia y en la Investigación matemáticas. En diversos escritos manifestó que *su afición a la Geometría le había estimulado a acercarse con gusto a las obras de Apolonio*
.

Apolonio representa [en la Geometría griega] *la grandeza técnica especializada, el virtuosismo geométrico por excelencia. Es verdad que su obra hizo olvidar lo que antes de él se había escrito en el campo de su mayor brillantez, las cónicas, pero por su carácter tan especializado y tan difícil, ni siquiera esta obra maestra, las Cónicas, se conoce hoy en su integridad y más de la mitad de ella permaneció oculta para el mundo occidental hasta que fue publicada por Edmond Halley en 1710.*

Miguel de Guzmán*. Apolonio* (en *Un retablo de historias matemáticas*. *Pensamientos en torno al quehacer matemático*
[CD–ROM], Madrid, 2001)
.

Apolonio, el
Gran Geómetra

Si entre los matemáticos griegos Euclides representa el maestro sistematizador, y Arquímedes el genio investigador por antonomasia, el tercer talento del helenismo, Apolonio de Perga, personifica el virtuosismo geométrico. Mientras Euclides codifica en *Los Elementos* los fundamentos de la Geometría griega de la regla y el compás como cuerpo de doctrina central de la totalidad de las ciencias matemáticas elementales y Arquímedes, en su fecunda y brillante obra, magnifica de forma muy considerable el patrimonio matemático griego, alcanzando incluso el estudio riguroso de multitud de problemas infinitesimales tratados con inefable originalidad, Apolonio polarizó su actividad investigadora en una dirección casi monotemática con una sagacidad tan magistral que sus investigaciones sobre cónicas, donde aparecen sus bellísimos descubrimientos sobre ejes, centros, diámetros, asíntotas, focos, rectas máximas y mínimas –tangentes y normales–, etc., le convierten en el primer especialista que registra la Historia de la Geometría y dan justificación al apelativo de « *gran geómetra* ».

La mayor parte de los exiguos datos conocidos sobre la vida de Apolonio provienen de unas pocas noticias que el propio autor reseña en las introducciones a algunos de los libros de su magna obra *Las Cónicas*. Se sabe que nació hacia el año 262 a.C., en Perga, región de Panfilia (la actual Antalya, Turquía); estudió en el Museo de Alejandría con los sucesores de Euclides; y residió tanto en la propia capital alejandrina como en Éfeso y Pérgamo, urbe que gozaba del prestigio de una Biblioteca y un emporio académico del Saber, similares a los de Alejandría, ciudad donde murió hacia el 190 a.C. Según relata Pappus (siglo IV d.C) en *La Colección Matemática* , donde aparecen numerosas referencias a la obra de Apolonio, el *Gran Geómetra* era de trato difícil y tenía un carácter melancólico e irascible. El gran historiador de la matemática F.Vera en su edición de *Las Cónicas* (en *Científicos griegos* . Aguilar, Madrid, 1970, p.301) dice que « *Apolonio era un genio de mal genio* ».

Debido a que el nombre de Apolonio era muy frecuente en Grecia, se suelen cometer habituales errores de atribución. De hecho, importantes sabios y eruditos griegos tuvieron este nombre: Apolonio de Rodas, Apolonio de Tralles, Apolonio de Atenas, Apolonio de Tyana, Apolonio de Tiro, etc. En particular el busto exhibido pudiera no ser de Apolonio de Perga sino del famoso pitagórico del siglo I d.C. Apolonio de Tyana.

La obra geométrica de Apolonio

ElTesoro del Análisis de *La Colección Matemática* de Pappus estaba constituido en gran parte por obras de Apolonio, perdidas o conservadas entonces de forma fragmentaria, que debían de incluir mucho material geométrico cuyo estudio forma parte hoy de la Geometría Analítica. Como se sabe, durante el siglo XVII hubo una auténtica obsesión, en particular por Fermat, por la reconstrucción de muchas de las obras perdidas de Apolonio y precisamente en esta labor estuvo el origen de su Geometría Analítica.

Según Pappus debemos a Apolonio la clasificación clásica de los problemas geométricos en *planos, sólidos* y *lineales* –según sean resolubles, respectivamente, con rectas y circunferencias, cónicas u otras curvas superiores–, que perseguía la idea de ajustar la envergadura de los instrumentos geométricos a utilizar a la enjundia de los problemas geométricos a resolver.

Los dos Libros sobre *Los Lugares Planos* estudiaban lugares geométricos rectilíneos o circulares. Mediante un lenguaje geométrico moderno buena parte del Libro I se puede resumir diciendo que la homotecia, la traslación, la rotación, la semejanza y la inversión, transforman un *lugar plano* en otro *lugar plano*. En el Libro II aparecen dos importantes lugares geométricos:

-

«*El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos* A, B, *es constante, es una recta perpendicular al segmento* AB».

-

«*El lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijoses constante, es una circunferencia*».

En el libro *Secciones en una razón dada* –el único que ha sobrevivido además de siete de los ocho Libros de *Las Cónicas*–, traducido por Edmond Halley del árabe al latín, en 1710– Apolonio resuelve diversos casos del siguiente problema:

«*Dada dos rectas y sendos puntos en ellas, trazar por un tercer punto otra recta que corte a las anteriores en segmentos, que medidos sobre ellas desde los respectivos puntos dados, estén en una razón dada* ».

Este problema conduce a una ecuación cuadrática de la forma $ax-x^2=bc$. También en el libro *Secciones en un área dada* se resuelve un problema similar que pide que los segmentos determinados por las intersecciones formen un rectángulo equivalente a otro dado. En este caso el problema lleva a una ecuación cuadrática de la forma $ax+x^2=bc$. Con la potencia de nuestra herencia cartesiana y fermatiana, la Geometría Analítica, los problemas se reducen fácilmente a una intersección de cónicas. El geómetra griego aplicaba con suma habilidad el Álgebra geométrica de los Libros II y VI de *Los Elementos* de Euclides, para, mediante transformaciones geométricas sucesivas, reducir la *ecuación* –permítasenos un anacronismo matemático– a una forma canónica en la que se reconocía alguna de las tres cónicas. De esta forma podemos imaginar cómo merced a sus extensos conocimientos sobre las curvas cónicas pudo proceder Apolonio en la resolución de problemas tan brillantes.

En el Libro *Secciones determinadas*, Apolonio plantea el problema siguiente:

«*Dados cuatro puntos* A, B, C, D, *sobre la misma recta, hállese un quinto punto* P *sobre ella, de modo que el rectángulo construido sobre* AP y CP *esté en una razón dada con el construido sobre* BP y DP».

Como en los casos anteriores el problema es equivalente a la resolución de ecuaciones cuadráticas, con las que se tratan todas las variantes que se presentan en los datos y las correspondientes soluciones.

En los dos Libros *De las Inclinaciones*, aparecen problemas *sólidos* y *lineales* donde se renueva una técnica utilizada por Arquímedes en *Sobre las espirales*, por ejemplo:

«*Dadas dos líneas y un punto, trazar por él una recta tal que las líneas dadas corten en ella un segmento de longitud dada* ».

Finalmente mencionamos las siguientes obras de Apolonio:

-

Las Tangencias (obra conocida también por el nombre de *Los Contactos* que alude a la concepción de la tangente en la Geometría griega) donde aparece el histórico *Problema de los círculos Apolonio* que veremos más adelante.

-

El Okytokion (o *Tratado sobre Cálculo rápido*), una obra de *Logística* –la Aritmética práctica de los griegos de uso en el comercio y los oficios artesanales– con técnicas para el manejo de números grandes más operativas que las del *Arenario* de Arquímedes.

-

Un tratado acerca del tornillo, *Sobre la hélicecilíndrica*, citado por Gémino (hacia 77 a.C.).

-

Un *Tratado universal*, citado por Marino (hacia 475 d.C.), que examinaba, tal vez con intención y espíritu crítico, los fundamentos de las Matemáticas, y que incluía observaciones sistemáticas de tipo axiomático. Algunos restos remanentes de esta obra pudieran haber subsistido en las *Definiciones* de Herón (hacia 65 a.C.) y sobre todo en el *Comentario al Libro I de Los Elementos de Euclides* de Proclo (hacia 460 d.C.).

-

Sobre los irracionales desordenados, obra que glosaría el Libro X de *Los Elementos* de Euclides sobre los inconmensurables cuadráticos, llamado por Stevin « *la cruz de los matemáticos* ».

-

Sobre el Icosaedro y el Dodecaedro, obra dedicada a la comparación de poliedros regulares inscritos en una esfera. Algunos de los resultados geométricos de esta obra pasaron al apócrifo Libro XIV de *Los Elementos* de Euclides, que se atribuye a Hipsicles (hacia 150 a.C.). Los dos teoremas más interesantes son:

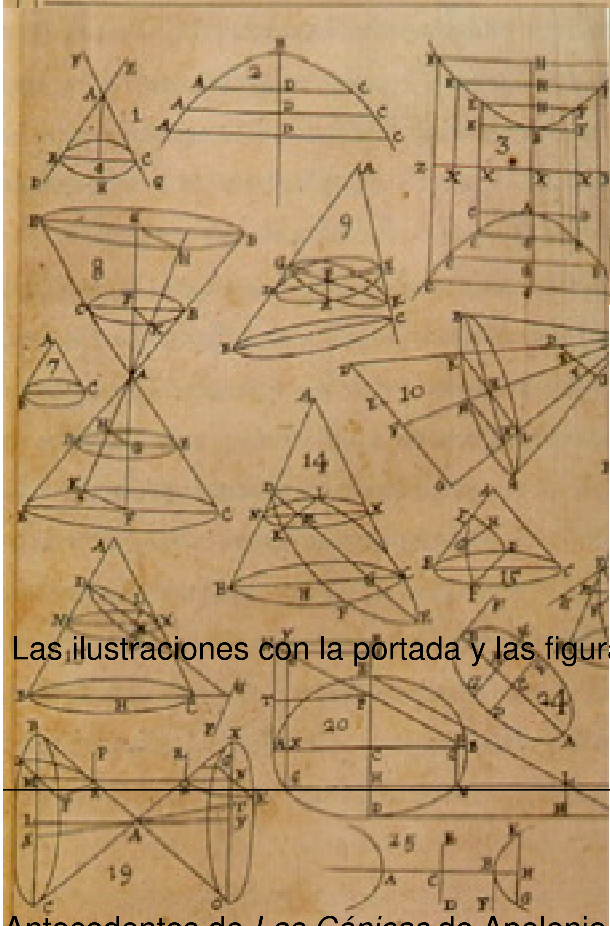
«*La circunferencia circunscrita al pentágono regular del dodecaedro y la circunscrita al triángulo equilátero del icosaedro, ambos inscritos en la misma esfera, es la misma* ».

«*Si se inscribe un cubo, un dodecaedro y un icosaedro en una esfera, los lados del cubo y del icosaedro son proporcionales a las áreas y a los volúmenes del dodecaedro y del icosaedro, siendo el factor de proporcionalidad la razón áurea, es decir, la razón entre los segmentos que divide una recta en media y extrema razón* ».

Pero sin duda alguna la obra que ha inmortalizado a Apolonio en la Historia de las Matemáticas es *Las Cónicas* una de las obras cumbres de la Matemática griega junto con *Los Elementos* de Euclides, los grandes tratados de Arquímedes, El Almagesto de Ptolomeo, *La Aritmética* de Diofanto y *La Colección Matemática* de Pappus. La obra de Apolonio supera con creces y oscurece lo que con anterioridad habían escrito sobre el tema Menecmo, Euclides y otros, cuyos trabajos, reproducidos por Apolonio, vamos a estudiar someramente a continuación...

La Edición de BARROW de las Cónicas de Apolonio

Archimedis opera; Apollonii Pergæi Conicorum libri IIII, Theodosii Sphaerica. Edición de Barrow de Las Cónicas de Apolonio (Londres, 1675). C



Las ilustraciones con la portada y las figuras de Apolonio procede de la Biblioteca del Real Instituto y O

Antecedentes de *Las Cónicas* de Apolonio

Las cónicas de Menecmo y el problema de la Duplicación del Cubo.

Se atribuye a Menecmo (hacia 350 a.C.) de la *Academia* platónica –el más famoso de los discípulos de Eudoxo y maestro de Aristóteles y Alejandro Magno–, la introducción de las secciones cónicas, es decir, el descubrimiento de las curvas que después recibieron el nombre de elipse, parábola e hipérbola, la llamada «
Triada de Menecmo
». Veremos que el descubrimiento fue un feliz hallazgo en relación con el problema délico de la «
duplicación del cubo
». Menecmo detectó que para la resolución del problema había una familia de curvas adecuadas, los tres tipos de cónicas obtenidos por el mismo método, a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos de tres tipos, según que el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso.

Partiendo de un cono circular recto de una sola hoja con ángulo recto en el vértice, Menecmo descubrió que al cortar el cono por un plano perpendicular a una de sus generatrices, la curva intersección es tal que su *ecuación* (utilizando de nuevo un anacronismo en términos de Geometría Analítica moderna) puede escribirse en la forma $y^2=lx$, donde l es una constante, que depende exclusivamente de la distancia del vértice del cono al plano de la sección. Ignoramos como obtuvo exactamente Menecmo esta propiedad, pero como quiera que depende nada más de algunos teoremas de Geometría elemental, se supone que Menecmo utilizaría los conocimientos geométricos familiares a los matemáticos de la Academia platónica.

Sea, pues, ABC el cono y sea EDG la curva obtenida al cortarlo por un plano perpendicular en el punto D a la generatriz ADC del cono. Sea P un punto cualquiera de la curva sección y un plano horizontal que corta al cono en la circunferencia PVQR, siendo Q el otro punto de intersección de la curva sección con esta circunferencia.

Por razones de simetría resulta que los segmentos PQ y RV son perpendiculares en el punto O, de modo que OP es la media proporcional entre RO y OV. Por tanto $OP^2=RO\cdot OV$.

Ahora de la semejanza de los triángulos DOVD y DBCA se tiene: OV/DO = BC/AB, y de la semejanza de los triángulos DSDA y DABC se tiene: SD/AS = BC/AB.

Tomando OP=y, OD=x, como «*coordenadas*» del punto P, se tiene $y^2 = RO\cdot OV$, de modo que sustituyendo: $y^2 = OP^2 = RO\cdot OV = SD\cdot OV = AS\cdot(BC/AB)\cdot DO\cdot(BC/AB) = ([AS\cdot BC^2]/AB^2)\cdot x$.

Ya que los segmentos AS, BC y AB son los mismos para todos los puntos de la curva EQDPG, podemos escribir la *ecuación de la curva* o «*sección del cono rectángulo*» en la forma: $y^2=lx$, donde l es una constante que más tarde se llamaría el «*latus rectum*»

De una forma totalmente análoga para conos con ángulo agudo y obtuso en el vértice Menecmo obtendría expresiones de la forma:

$y^2= lx - (b^2/a^2)\cdot x^2$,*sección de cono acutángulo*,

$y^2= lx + (b^2/a^2)\cdot x^2$,*sección de cono obtusángulo*.

donde a y b son constantes y el plano de corte es perpendicular a una generatriz.

Se observa una gran similitud entre los desarrollos de Menecmo en relación a expresiones equivalentes a *ecuacione*s y el uso de *coordenadas*, lo que induce a los historiadores a afirmar que este geómetra ya conocía ciertos aspectos de la Geometría Analítica. De hecho ignorando el lenguaje de ésta se hace difícil explicar el hallazgo de Menecmo.

Las cónicas de Menecmo tienen su origen en los intentos de Hipócrates de Quíos (hacia 400 a.C.) de resolución del problema clásico de la *Duplicación del Cubo* mediante la interpolación de dos medias proporcionales.

Sea un cubo de arista a. A partir de la proporción continua: $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$, resultado de interpolar dos medias proporcionales entre a y su doble 2a, se obtienen las parábolas $x^2=ay$, $y^2=2ax$, y la hipérbola equilátera $xy=2a^2$.

Tanto la intersección de las dos parábolas como la intersección de una de las parábolas y la hipérbola proporciona $x^3=2a^3$, es decir, la arista del cubo de volumen doble.

Lo que en nuestro lenguaje geométrico analítico realizamos utilizando las ecuaciones de las cónicas, Menecmo lo hallaría mediante la construcción de puntos de intersección de las cónicas obtenidas, desplazando convenientemente el plano de corte con el cono a fin de hallar cónicas con *latus rectum* conveniente al objetivo propuesto.

Aunque según el testimonio de Proclo y Eutociusfue Menecmo el primero que descubrió las secciones cónicas, tal vez no fue así, ya que antes Arquitas de Tarento (hacia 400 a.C.), gran político reformador y maestro de Platón, había estudiado el problema de la *Duplicación del Cubo*, obteniendo las dos medias proporcionales mediante una compleja intersección de un cono de revolución, un cilindro de revolución y una superficie tórica. Así pues, Arquitas pudo haber estudiado la elipse como sección oblicua del cilindro. Por otra parte, después de la línea recta, es la elipse la curva más habitual en la experiencia, ya que los objetos circulares mirados de forma oblicua, así como la sombra que arrojan, son elípticos.

Se ha especulado a veces incluso con un origen de las cónicas por generación cinemática como la Cuadratriz de Hipias o la Espiral de Arquímedes, pero parece desmentirlo la persistencia hasta el siglo XVII del nombre que los griegos dieron de *Problemas sólidos* a los que dependían de las cónicas para su resolución, como si se quisiera insistir en su origen estereométrico.

Las cónicas se definen ahora como lugares de puntos en el plano para los que las distancias a una recta –directriz– y a un punto –foco– están en una determinada razón –excentricidad–. Esta definición se traslada de forma muy simple al lenguaje algebraico de ecuaciones de nuestra Geometría Analítica y además, la trigonometría permite mediante la rotación de ejes pasar fácilmente de la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes a la referida a sus asíntotas. De modo que realmente impresiona la extraordinaria habilidad de Menecmo descubriendo la más útil familia de curvas de toda la Matemática y de toda la Ciencia y en ausencia del instrumento y el simbolismo algebraicos. Pero no sólo esto, sino que, independiente de su origen plano o estereométrico, Menecmo fue capaz de vincular ambos aspectos de las cónicas, mostrando que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como lugares planos, traducibles en básicas expresiones geométricas (equivalentes a nuestras *ecuaciones*), que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas, que serían plasmadas por Apolonio en los primeros libros de *Las Cónicas*. Es bajo esta visión sobre el trabajo de Menecmo que algunos historiadores modernos (Zeuthen, Coolidge, Loria y Heath) reclaman para los griegos, y empezando por Menecmo, la paternidad de la Geometría Analítica, al establecer como la esencia de esta rama de la Matemática el estudio de los lugares por medio de *ecuaciones*.

Euclides escribió, además de *Los Elementos*, otras muchas obras de las que tenemos constancia e incluso fragmentos a través de *ElTesoro del Análisis* de Pappus. Una de ellas fue un trabajo sobre secciones cónicas, incorporado más tarde a *Las Cónicas* de Apolonio.

Asimismo, los importantes resultados de Arquímedes acerca del área del segmento parabólico, aplicando el *método de exhaución* en la obra *Sobre la Cuadratura de la Parábola* y el *método mecánico* en la obra *Sobre el Método relativo a los teoremas mecánicos dedicado a Eratóstenes* pone de relieve el avanzado desarrollo de la teoría de las secciones cónicas en la época de Arquímedes, ya muy próxima a los tiempos en que Apolonio concibió *Las Cónicas.*

Las Cónicas de Apolonio

Durante más de ciento cincuenta años, las curvas introducidas por Menecmo se llamarían a partir de la descripción trivial de la forma cómo habían sido descubiertas, es decir, mediante las perífrasis: *sección* (perpendicular a una generatriz) *de cono acutángulo, rectángulo y obtusángulo* para la elipse, parábola e hipérbola, respectivamente.

Fue Apolonio en *Las Cónicas* quien no sólo demostró que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones, variando la inclinación del plano que corta al cono, lo cual era un paso importante en el proceso de unificar el estudio de los tres tipos de curvas, sino que demostró que el cono no necesita ser recto y consideró, asimismo, el cono con dos hojas, con lo que identifica las dos ramas de la hipérbola.

LA GENERACIÓN DE LAS CÓNICAS DE APOLONIO

Construcción de Apolonio de las tres secciones cónicas mediante un cono único, variando la inclinación

- Parábola: el plano de corte es paralelo a una sola generatriz.
- Elipse: el plano de corte no es paralelo a ninguna generatriz.
- Hipérbola: el plano de corte es paralelo a dos de sus generatrices.

Además, siguiendo probablemente una sugerencia de Arquímedes, Apolonio acuñó para la posteridad los nombres de *elipse*, *parábola* e *hipérbola* para las secciones cónicas. A lo largo de la Historia de la Matemática, los conceptos han sido siempre más importantes que la terminología utilizada, pero en este caso el cambio de nombre de las secciones cónicas debido a Apolonio, tiene una importancia más allá de lo meramente nominalista. Los términos adoptados en realidad no eran nuevos, sino que procedían, como sabemos, del lenguaje pitagórico de la solución de ecuaciones cuadráticas del método de *Aplicación de las Areas*. *Elipse* significa *deficiencia*; *Hipérbola* significa *exceso* (en el lenguaje ordinario una *hipérbole* es una *exageración*); y por ultimo *Parábola* significa *equiparación* . El cambio de nomenclatura envolvía un cambio conceptual, toda vez que las cónicas ya no serían descritas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes, que daban en cada caso la propiedad característica de definición de la curva y expresaban sus propiedades intrínsecas. Por ejemplo, la conocida ecuación de la parábola con vértice en el origen es $y^2=lx$, donde l es el *latus rectum* o *parámetro doble* que se representa por 2p. Esta expresión de la parábola en forma de *ecuación* sintetiza precisamente el farragoso y larguísimo enunciado de la Proposición I.11 de *Las Cónicas* en forma de propiedad que cumple *la sección cónica* considerada, bautizada por Apolonio justamente aquí con el nombre de *Parábola* . Este enunciado muy resumido viene a decir:

«*La Parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abcisa x y el latus rectum l* ».

Análogamente, Apolonio hará lo propio para la hipérbola y la elipse en las dos proposiciones siguientes que redactadas en un retórico lenguaje abstruso y prolijo, se puede simplificar en la forma siguiente Proposición I.12 (resp. I.13):

«*En la sección cónica considerada* [llamada hipérbola (resp. llamada elipse)], *el cuadrado de la ordenada equivale a un área rectangular aplicada siguiendo el latus rectum, es decir, teniendo*

el latus rectum como altura, y teniendo la abscisa como base, aumentada (resp. disminuida) de otra área semejante a la que tenga el eje transverso o diámetro como base, y la mitad del latus rectum como altura
».

Simplificando todavía más, mediante *ecuaciones*, como en el caso de la parábola, el complejo lenguaje de Apolonio, designando: para la hipérbola a el eje transverso o diámetro y b el eje no transverso, para la elipse a y b los ejes, y para ambas cónicas y la ordenada, x la abscisa, y l el *latus rectum*, podemos traducir los enunciados de las proposiciones I.12 y I.13 en las relaciones:

Hipérbola: $y^2= lx + (b^2/a^2) \cdot x^2$ o bien $[(x+a)^2/a^2] – [y^2/b^2] = 1$

Elipse: $y^2= lx – (b^2/a^2) \cdot x^2$ o bien $[(x–a)^2/a^2] + [y^2/b^2] = 1$

ecuaciones de la hipérbola y de la elipse, respectivamente, referidas a uno de sus vértices como *origen de coordenadas* donde concurren como *ejes de coordenadas* un diámetro y la tangente a la cónica en su extremo, y donde el *latus rectum* o parámetro l es: $l=2b^2/a$.

Veamos, en efecto, como se llega a estas ecuaciones en el caso de la elipse:

Lo que demuestra Apolonio en la Proposición I.13, con un lenguaje retórico, es que hay una relación constante entre ciertas áreas, el cuadrado de lado la cuerda PQ y el rectángulo determinado por los segmentos OQ, QR del diámetro.

En particular se verificará:

.

Tomando coordenadas con origen en el vértice O, y llamando x, y, a, b y l, como antes, se tiene: , de donde resulta:

, es decir:

, donde $l=2b^2/a$ es el *latus rectum*, como se quería probar.

Vemos que las relaciones de áreas de Apolonio, que expresan propiedades intrínsecas de la curva, se prestan, con suma facilidad, a ser traducidas en el ulterior lenguaje del Álgebra simbólica de ecuaciones, lo cual permitirá la asociación de curvas y ecuaciones, que es la principal finalidad programática de la Geometría Analítica.

A la vista de las expresiones obtenidas para las cónicas, trasunto de la propiedad fundamental que satisfacen como lugares planos, se aprecia que, en el caso de la elipse $y^2<lx$, mientras que para la hipérbola y
2
>lx. Estas propiedades de las curvas expresadas por estas desigualdades son las que sugirieron, con base en el lenguaje griego ordinario, los nombres de las cónicas: parábola, elipse e hipérbola, bautizadas por Apolonio hace más de dos mil años. Así los nombres no sólo no son arbitrarios sino que responden a la semántica de los términos y han sido tan afortunados que han quedado firme y unánimemente asociados al diccionario geométrico de las cónicas para siempre.

Las Cónicas de Apolonio fueron escritas en ocho libros de los que conservamos siete gracias a los trabajos de Thabit ibn Qurra (hacia 856 d.C.) y de Edmond Halley (1656-1742).

El Libro I de *Las Cónicas* de Apolonio se inicia con la generación de las cónicas, pero una vez que se obtienen mediante consideraciones estereométricas las relaciones básicas entre lo que llamaríamos las *coordenadas* de un punto de la curva en el plano, expresadas por las *ecuaciones* descritas, Apolonio se dedica a estudiar por métodos planimétricos las propiedades fundamentales de las cónicas, incluyendo tangentes y diámetros conjugados, a partir de esas *ecuaciones* planas, obviando toda referencia explícita al cono generador. Apolonio utiliza de forma sistemática un par de diámetros conjugados o un diámetro y una tangente como equivalente de un *sistema de coordenadas oblicuas*, habiendo demostrado previamente que si se traza una recta por un extremo de un diámetro de una elipse o de una hipérbola, paralela a su diámetro conjugado, la recta trazada es tangente a la cónica. El *sistema de referencia* diámetro–tangente se muestra de una significativa utilidad ante la invariancia de la *ecuación* de la cónica frente a un *cambio de referencia* diámetro–tangente de un punto a otro punto de la cónica (Proposiciones 41 a 49). En particular, Apolonio conocía las propiedades de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas $xy=a^2$.

El Libro II abunda en nuevas propiedades y hace un estudio exhaustivo de las asíntotas. Al final del Libro estudia el problema de trazar una tangente que forme un ángulo dado con el diámetro que pasa por el punto de contacto.

El Libro III estudia primero propiedades de triángulos y cuadriláteros determinados por tangentes y diámetros conjugados y otras propiedades de las tangentes, entre ellas se establece, en la Proposición 41, cómo tres tangentes a la parábola se cortan en la misma razón de modo que la parábola resulta envolvente de las rectas con esta propiedad. En la proposición 43 aparece la hipérbola como lugar de puntos tales que xy=constante, donde x e y son abscisa y ordenada respecto a los ejes constituidos por las asíntotas. Después Apolonio estudia una serie de hermosas propiedades focales, entre las que destacan las Proposiciones 51 y 52 que permiten el trazado de estas cónicas mediante una composición de movimientos continuos y que sirven para definirlas de forma planimétrica como *lugares geométricos*:

«*En una hipérbola la diferencia de distancias de cada punto a los focos es constante e igual al eje transverso* », «*En una elipse la suma de distancias de cada punto a los focos es constante e igual al eje mayor* ».,

En el Libro IV se estudian los puntos de intersección de las cónicas. Destaca la Proposición 9 que exhibe un método de trazar dos tangentes a una cónica desde un punto.

El Libro V es una de las principales obras maestras de la Geometría griega. Está dedicado a los *segmentos máximos y mínimos*, es decir, a la distancia máxima y mínima de un punto a los de una cónica –las rectas normales–. En este Libro encontramos el germen de la teoría de evolutas y evolventes que figura en la obra de Huygens *Horologium Oscilatorium* de 1673. Al intuir el concepto de curvatura, Apolonio se sitúa en las raíces de la Geometría Diferencial. En las Proposiciones 51 y 52,mediante métodos puramente sintéticos, Apolonio obtiene la evoluta de las cónicas como lugar de los centros de curvatura, mediante la determinación del número de normales distintas desde cada punto. Por ejemplo, para la elipse y la hipérbola: $(x^2/b^2)+ (y^2/b^2)=1$,el brillante resultado equivale a describir de forma sintética las curvas que en el lenguaje de la Geometría Analítica tendrían por ecuación:

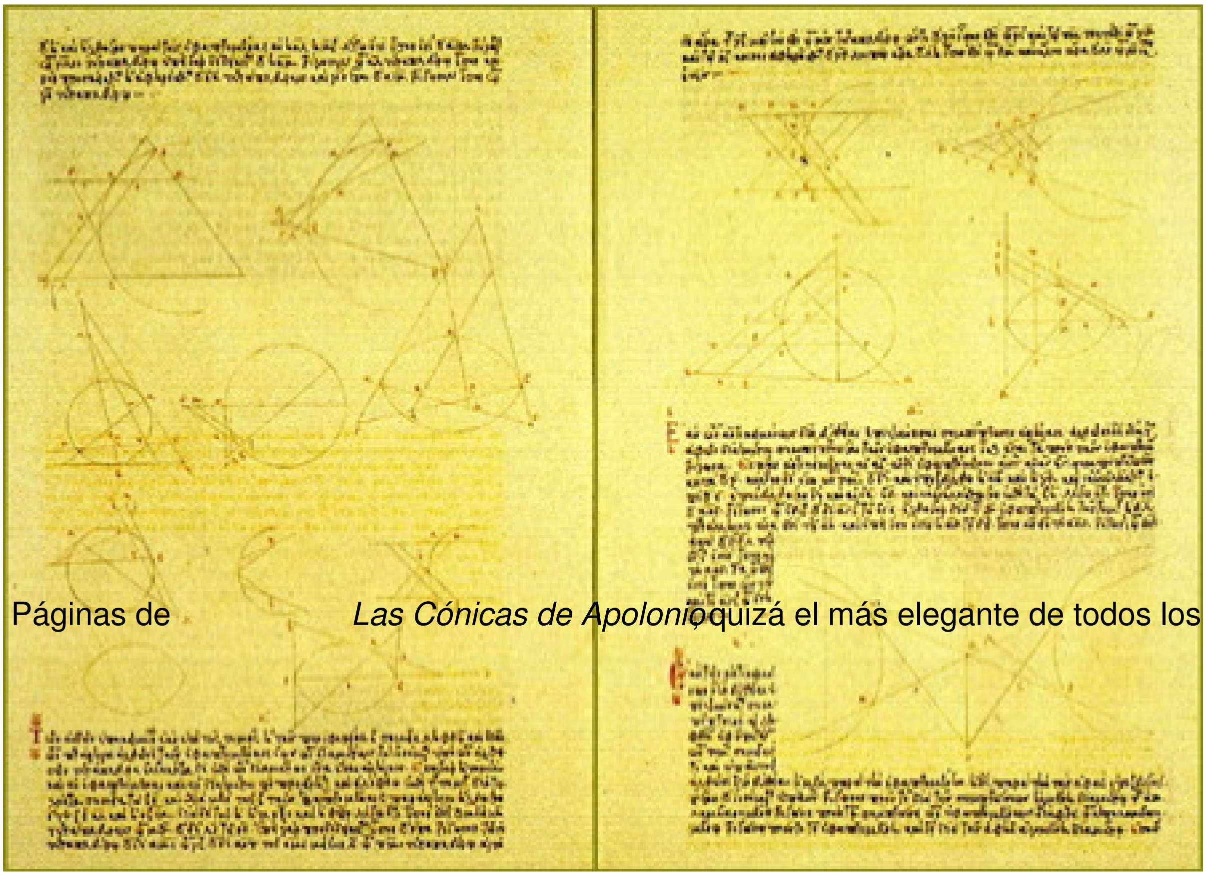
$(ax)^{2/3} \pm (by)^{2/3} = (a^2 \pm b^2)^{2/3}$, [signo + para la elipse, signo – para la hipérbola].

En las proposiciones 55-63 Apolonio construye la normal a una cónica desde un punto exterior mediante la intersección de la cónica dada con una hipérbola equilátera, llamada *Hipérbola de Apolonio* asociada al punto.

El Libro VI está dedicado a la igualdad y semejanza de cónicas. Sobresalen en este Libro las Proposiciones 28, 29 y 30, donde se resuelve el problema de dados una cónica y un cono circular recto hallar una sección del cono que sea igual a la cónica dada.

El Libro VII relaciona numerosas propiedades de los diámetros conjugados entre las que sobresalen las de las Proposiciones 12 y 13 acerca de la constancia de la suma en la elipse y la diferencia en la hipérbola de los cuadrados de los diámetros conjugados.

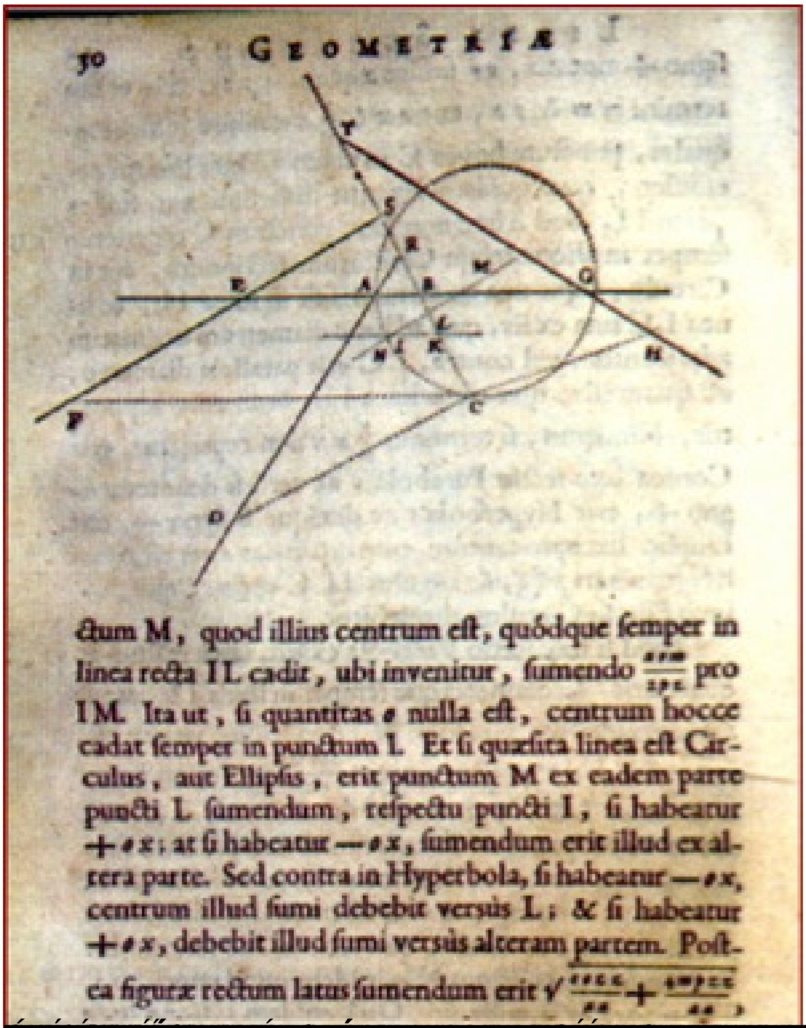
Las Cónicas de Apolonio en los manuscritos Vaticanos



Páginas de *Las Cónicas de Apolonio*, quizá el más elegante de todos los manuscritos maten

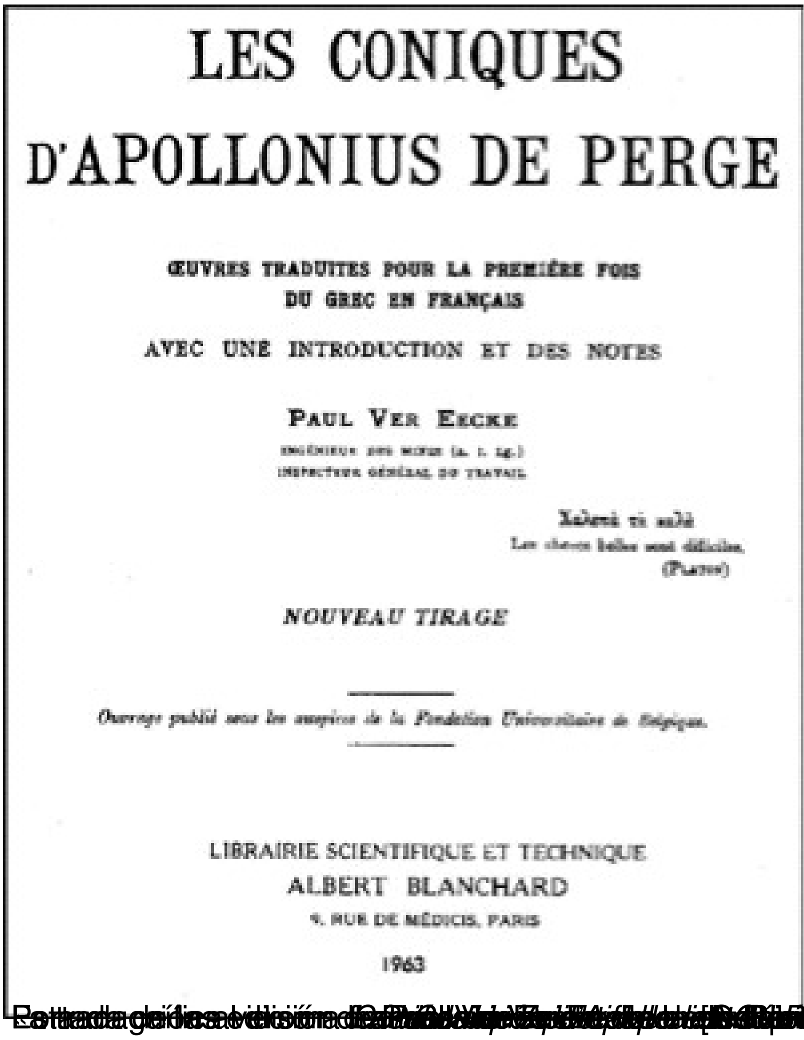

Aristippus Philosophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodiensi
litus animadvertisset Geometrica schemata descripta, exclamavisse ad
comites ita dicitur, Bene speremus, Hominum enim vestigia video.


L'ALGEBRE
NOUVELLE DE
M. VIETE M.
DES REQUESTES
ROY.
TRADUICTE EN
FRANCOIS
PAR
A. VASSET.



30 GEOMETRIÆ

ctum M, quod illius centrum eſt, quódque ſemper in linea recta IL cadit, ubi invenitur, ſumendo $\frac{aom}{2pz}$ pro IM. Ita ut, ſi quantitas o nulla eſt, centrum hocce cadat ſemper in punctum L. Et ſi quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis, erit punctum M ex eadem parte puncti L ſumendum, reſpectu puncti I, ſi habeatur $+ox$; at ſi habeatur $-ox$, ſumendum erit illud ex altera parte. Sed contra in Hyperbola, ſi habeatur $-ox$, centrum illud ſumi debebit versùs L; & ſi habeatur $+ox$, debebit illud ſumi versùs alteram partem. Poſtea figuræ rectum latus ſumendum erit $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$,



LES CONIQUES

D'APOLLONIUS DE PERGE

ŒUVRES TRADUITES POUR LA PREMIÈRE FOIS
DU GREC EN FRANÇAIS

AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES

PAUL VER EECKE

INGÉNIEUR DES MINES (A. I. Lg.)
INSPECTEUR GÉNÉRAL DU TRAVAIL

Χαλεπὰ τὰ καλά
Les choses belles sont difficiles.
(PLATON)

NOUVEAU TIRAGE

Ouvrage publié sous les auspices de la Fondation Universitaire de Belgique.

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
9, RUE DE MÉDICIS, PARIS

1963