La Cuadratura del segmento parabólico en *EL MÉTODO* de Arquímedes

«*Es imposible encontrar en toda la Geometría cuestiones más difíciles y más importantes explicadas con términos más sencillos ni más comprensibles que los teoremas de la inteligencia sobrehumana de Arquímedes* ».

Plutarco. *Vidas paralelas. Marcelo*,XVII.5-8.

Busto de Arquímedes. Museo Nacional de Nápoles. Es uno de los iconos más conocidos del genio de S

Con una inefable capacidad para conjugar a la perfección la intuición del descubrimiento con el virtuosismo de la demostración, Arquímedes es considerado como uno de los matemáticos más fecundos de todos los tiempos. Cuando en el Renacimiento y siglos posteriores tiene lugar la recuperación, reconstrucción y divulgación del legado clásico griego, todos los matemáticos se formulan la pregunta: *¿Cómo había alcanzado Arquímedes sus impresionantes resultados sobre cuadraturas y cubaturas, que luego demostraba rigurosamente mediante el método de exhaución* ? Ante los sorprendentes descubrimientos arquimedianos, muchos matemáticos albergaron la sospecha de que el sabio disponía de un método milagroso que aplicaba en sus investigaciones y que habría ocultado de forma deliberada. Por ejemplo, Wallis que realizó una edición de las *Obras de Arquímedes* , publicada en Oxford en 1676, escribía: «
Al parecer Arquímedes ocultó adrede las huellas de su investigación, como si hubiera sepultado para la posteridad el secreto de su método de investigación
»; y Barrow, que se encargó también de una edición en latín de las
Obras de Arquímedes
, que se publicó en Londres en 1675, escribía: «
Al no poder imaginar qué ingenio mortal pueda llegar a tanto mediante la virtud del razonamiento, estoy seguro que Arquímedes se vio ayudado por el Álgebra, a la que conocía en secreto y que ocultaba de forma estudiada
». Efectivamente, Arquímedes poseía un método de investigación, basado en la aplicación de la ley que rige la más sencilla de sus máquinas «
La Ley de la Palanca
», que plasmó en su obra
El Método relativo a los teoremas mecánicos
dirigido a Eratóstenes

(
EL MÉTODO
), y en la que mediante procedimientos reconocidos por él mismo como no del todo rigurosos, descubría sus famosos teoremas matemáticos sobre cuadraturas y cubaturas, pero fueron los avatares históricos y no su voluntad, quien lo dejó oculto para la posteridad, ya que la obra de Arquímedes,
EL MÉTODO
, desapareció de la circulación en tiempos desconocidos y no fue recuperada hasta 1906, gracias a la sagacidad del eximio helenista y erudito J.L.Heiberg.

1. Imagen venerable de J.L.Heiberg (1854-1928), el gran helenista e investigador de la obra de Arquímedes, que dedicó una pali
2. Portada de la definitiva *Archimedis Opera Omnia* (Leipzig, 1910-1913), de las Obras, de Arquímedes, en la que incluyó su *EL MÉTODO sobre los teoremas* dirigido

La Cuadratura de un segmento parabólico en *Archimedis Opera Omnia* de J.L. Heiberg. Es el primer ejemplo de *método* matemático más sencillo

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES DIRIGIDO A ERATÓSTENES

PROPOSICIÓN I: Cuadratura del segmento parabólico.
Sea ABC un segmento parabólico comprendido entre la recta AC y la sección ABC de un cono rectángulo (parábola); divídase AC por la mitad en D y trácese la recta DBE paralela al diámetro de la parábola, y uniendo B con A y B con C, trácense las rectas AB y BC.
El segmento parabólico ABC es cuatro tercios del triángulo ABC.

Resumen del desarrollo de Arquímedes:

- El segmento parabólico p(ABC) es cuatro tercios del triángulo t(ABC):

En efecto:

De la geometría de la figura resulta: TK/KN = MQ/QO, es decir: QO · TK = MQ · KN.

Se toma: VH=QO [VT=TH], luego: VH · TK = MQ · KN		
Según	***Equilibrio de los Planos***	**16, resulta: «VTH [= QO] está en equilibrio con MQ**

Los segmentos MQ «	***componen***	**» el triángulo t(AZC) y los segmentos QO «**	**componen**	**» el seg**
Ahora de ZK=KA =2BD, resulta: t(AZC) = 4 t(ABC)				

Luego definitivamente se tiene: p(ABC) = (4/3) t(ABC). cqd.

En su tratado *Sobre la Cuadratura de la Parábola*, Arquímedes había dado ya una primera

demostración mecánica de la cuadratura de la parábola (proposiciones 1-17) –más larga que

la presente de *EL MÉTODO*–, basada en los

postulados de la Estática –extraídos del tratado

Sobre el Equilibrio de los Planos

– y previa a la geométrica por exhaución (proposiciones 18-24), que desarrolla posteriormente

en el mismo tratado y en la que el sabio utiliza la suma de los términos de una progresión

geométrica indefinida de razón ¼ al demostrar un resultado geométrico equivalente a la

fórmula

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}$$

de donde obtiene finalmente el resultado principal: «*la equivalencia entre el segmento de*

parábola y los cuatro tercios del triángulo inscrito

–con el mismo vértice y altura que la parábola–». Se trata del primer ejemplo en la Historia de

la Matemática de la cuadratura de una figura mixtilínea. Arquímedes distingue según que el

diámetro sea perpendicular o no a la base del segmento (proposiciones 14 y 15), pero en

ambos casos la solución es la misma.

Ya que el *método mecánico* de investigación de *EL MÉTODO* de Arquímedes apunta

históricamente hacia los indivisibles e infinitesimales de las técnicas de cuadratura del siglo

XVII que condujeron al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz, mientras

que el *método demostrativo de*

exhaución apunta hacia

las técnicas aritméticas de los límites que fundamentan el Análisis moderno en el siglo XIX, la

conjunción de ambos métodos, uno heurístico y empírico y otro riguroso y apodíctico, sitúan a

Arquímedes en las raíces históricas del Cálculo Integral. Por eso, como afirma E.Rufini (

Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità,

p.187):

«*Arquímedes anticipa nuestro Cálculo Integral, tanto en el tiempo como en los procedimientos*

y en la genialidad de los artificios no superados por los precursores del siglo XVII .»

Pero más allá de la Matemática, la obra arquimediana, pródiga en asombrosos resultados y

modelo de exposición rigurosa, al aplicar –como hemos visto en la cuadratura del segmento de

parábola– la Mecánica a la investigación de los teoremas, desarrolla una concepción

matemático-experimental que está en la raíz de una tradición científica –llamada después *Filos*

ofía Natural

y mucho más tarde

Física Matemática

–, que retomada por Leonardo, Galileo y Newton, establece las bases de la Revolución

Científica del siglo XVII, y en particular constituye un sólido punto de partida tanto para la

configuración de la nueva Física como para la invención del Cálculo Infinitesimal. Muy acertado

es, pues, lo que escribe en el siglo XVII Montucla en su famosa Historia de las Matemáticas:

«*Arquímedes abrió nuevas vías en la Geometría e hizo tan gran número de descubrimientos,*

que la antigüedad le ha concedido de común acuerdo el primer lugar entre los geómetras ».

Bibliografía

[A] Fuentes originales y textos sobre Arquímedes y *El Método*:

1. ARCHIMEDES: ***Archimedis Opera Omnia***. Edición de J. L. Heiberg. Leipzig,

1910-1913.

2. ARCHIMÈDE : ***Les Oeuvres complètes d'Archimède***. Introducción y notas de P.Ver

Eecke, Vaillant-Carmanne. Liège, 1960.

3. ARQUÍMEDES (en ***Científicos Griegos***. Antología. Recopilación, estudio preliminar,

preámbulo y notas de F. Vera). Aguilar, 1970.

4. ARQUÍMEDES: ***El Método***. Introducción y notas de J. Babini. Eudeba, Buenos Aires,

1966.

5. ARQUÍMEDES: ***El Método***. Introducción y notas de L. Vega. Alianza Editorial, Madrid,

1986.

6. BABINI,J.: Arquímedes. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1948.

7. DIJKSTERHUIS,E.: ***Archimedes***. Princeton University Press, 1987. Cap.X.

8. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M, VAQUÉ,J.: ***El método relativo a los teoremas***

mecánicos de Arquímedes . Edición con

facsímil. Universitat Autónoma de Barcelona, Universitat. Politècnica de Catalunya. Colección

Clásicos de las Ciencias.

Barcelona, 1993. Edición crítica en español de esta obra de Arquímedes.

9. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M, VAQUÉ,J.: ***Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes***. Fundació

Bernat Metge. Barcelona, 1997. Edició crítica en català d'aquesta obra d'Arquimedes.

10. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (Coautor): ***De Arquímedes a Leibniz, tras los pasos***

del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico

. Fundación Canaria

Orotava

de Historia de la Ciencia, Santa Cruz de Tenerife, 1995.

11. GONZALEZ URBANEJA, P.M. (coautor): ***Estudios preliminares y Notas a la traducción*** de "***Arquímedes***, ***Obras***

escogidas ”.

Edición con facsímile del Manuscrito X-I-14 de la Biblioteca de El Escorial. Editor: A. Durán.

RSME, International Congress of Mathematicians (ICM06), Patrimonio Nacional. Madrid, 2006.

12. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: ***A un siglo del descubrimiento de El Método de***

Arquímedes por Heiberg . La Gaceta de la Real

Sociedad Matemática Española, Vol. 9.3, 715–744, 12/2006.

http://www.rsme.es/gacetadigital/vernumero.php?=63

ArquímedesGacetaRSME93.pdf

13. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: ***Arquímedes. Obras escogidas*** **(ICM06).** Revista

SUMA (FESPM), núm.54, pp.118–122, 02/07.

14. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: (coautor): ***El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*** (en ***Dios creó***

los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia

. Edición de Stephen Hawking, págs. 163–202). Editorial Crítica. Barcelona, 2006.

15. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: ***El método mecánico de Arquímedes y las raíces históricas del Cálculo Integral*** (en ***La Historia de la***

Matemática en Ciencia en Acción

)

. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 10.1, 215–220, 2007.

http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_deta

ils&gid=660&Itemid=75

16. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: ***Arquimedes en el Congrés Internacional de***

matemàtics de Madrid (ICM2006). Butlletí de la

Societat Catalana de Matemàtiques. Volum: 22: núm. 1 (juliol 2007). En prensa.

17. GOULD,S,H.: ***The Method of Archimedes***. American Mathematical Mon-thly, LXII, 473-476, 1955.

18. HEATH,T.: ***The Method of Archimedes recently discovered by Heiberg (A supplement to the works of Archimedes***

,

1897

). Cambridge University Press, 1912.

19. HEIBERG,J.L: ***Eine neue Archimedeshandschrift***. *Hermes*, vol.XLII, págs.234-303,

Berlín, 1907.

20. HEIBERG,J.L.: ZEUTHEN,H.G.: ***Eine neue Schrift des Archimedes***. Bibliotheca

Mathematica de Teubner, págs. 321-363, Vol. VII3, Leipzig, juny, 1907.

21. HEATH, T.L.:***The Works of Archimedes.*** Dover, New York, 2002.

22. **MUGLER,C.: Archimède : 4 volúmenes. *Les Belles Lettres*, París, 1970-1972.**

23. NETZ;R. , Noel,W.: ***El código de Arquímedes.*** Temas de hoy, Madrid, 2007.

24. RAEDER,H.: ***Johan Ludving Heiberg.*** Isis, Vol. 11, 367-74, 1928.

25. REINACH,T.: ***Un traité de Géométrie inédit d'Archimède. Restitution d'après un***

manuscrit récemment découvert **.** Revue général des Sciences pures

et appliquées, nos de 30/11/1907, 15/12/1907, XVIII, París, 1907.

26. RUFINI,E. : ***Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità.*** Casa Editrice Alberto Stock, Roma, 1926. Nueva edición de

Feltrinelli, Milán, 1961.

27. WILSON, N.: The Archimedes Palimpsest, A Progress Report. Lincoln College Oxford.

http://www.archimedespalimpsest.org/index.htm

[B] Obras generales sobre Historia de la Matemática y del Cálculo Infinitesimal:

1. BARON,M.E.: ***The Origins of the Infinitesimal Calculus****,* London, Pergamon, 1969.

Caps 1,2.

2. BELL, E.T. ***Les grands mathématiciens***. Payot. París, 1950. Cap.II.

3. BOYER, C.B.: ***Historia de las Matemáticas***. Alianza Universidad, Madrid, 1986. Cap. VIII.

4. BOYER, C.B.: ***The History of the Calculus and its conceptual development.*** Dover, NY. 1949. Cap.2.

5. COLERUS, E.: ***Breve historia de las Matemáticas.*** Doncel, Madrid, 1972. Vol. 1, Cap.

3.

6. EDWARDS, C.H.:***The Historical Development of the Calculus.*** Sprin-----ger-Verlag,

New York, 1979. Cap. 2.

7. EVES, E.: ***An Introduction to the History of Mathematics.*** CBS Coll. Publ. N. York, 1983. Cap. 11.

8. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M.: ***Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII.***

Alianza Editorial, Madrid, 1992. Cap. 2.2.

9. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (coautor).: ***Matemáticas y matemáticos en el mundo griego*** (en ***El legado de las Matemáticas,***

de Euclides a Newton). RSME,

SAEM Thales, Univ. Sevilla, 2000, Cap.1.

10. GRATTAN-GUINNESS,I.: *Del Cálculo a la Teoría de Conjun-tos*. Alianza Universidad, Madrid, 1984. Cap. 1.

11. HEATH, T.L.: ***History of Greek Mathematics.*** Vol.2, Cap.XIII.

12. KLINE,M.: ***El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.*** Alianza

Editorial, Madrid, 1992. Cap.5.3.

13. MONTUCLA, J. : ***Histoire des Mathématiques***. Blanchard. París, 1968. Tomo I, Libro

IV, Cap.V