La Cubatura y la Cuadratura de la Esfera en *EL MÉTODO* de Arquímedes

«***Entre todos los trabajos que se refieren a las disciplinas matemáticas, parece que el primer lugar puede ser reivindicado por los descubrimientos de Arquímedes, que confunden a las almas por el milagro de su sutilidad*** **».**

E.Torricelli. ***Opera geometrica.*** **Florencia, 1644. Proemio.**

Fragmento de un sello griego de mediados del siglo XX. Se trata de una adaptación del retrato de Arquímedes (con el tradicional ce

miércoles 28/04/1993 Pedro Miguel González Urbaneja

Arquímedes es uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, tanto por la magnitud de su contribución al patrimonio matemático de la humanidad como por la genialidad de sus métodos. Una copiosa tradición legendaria, inmortalizada por la imaginación épica de los más egregios literatos greco-latinos –Polibio, Tito Livio, Plutarco, Cicerón, …– y reivindicada por numerosos escritores y científicos a partir del Renacimiento –Leonardo, Galileo, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, …– elevó la figura de Arquímedes hasta la más alta cima del genio e ingenio humanos, entre el mito y la realidad, magnificados aún más, si cabe, en todos los tiempos, por un ingente despliegue de iconografía arquimediana, que ha embellecido la imagen del sabio personaje hasta cotas casi hagiográficas. No obstante, el retrato que más interesa es el del pensamiento de Arquímedes, plasmado en el sello inmarcesible de sus escritos geométricos, algo que sobrevivirá mientras haya mentes que sigan abriéndose paso hacia el descubrimiento de la verdad matemática persiguiendo encontrar la demostración de la propia verdad. Pero allende el romanticismo que la Literatura ha impregnado a la figura de Arquímedes, interesa sobremanera a la Historia de la Ciencia y sobre todo a la Historia de la Matemática, su ingente contribución a la magnificación del acervo matemático de su época, en una triple vertiente: a) la propia ampliación de los conocimientos euclídeos, b) la consolidación del procedimiento demostrativo, y c) la aplicación de una eficiente metodología nueva en el descubrimiento matemático.

A partir de 1906, fecha en que el gran helenista e historiador de la Matemática J.L.Heiberg exhumó la obra de Arquímedes, *EL MÉTODO*, tras una encomiable labor de paleografía matemática, sabemos que este tratado es una obra singular de Arquímedes, porque en ella revela a la comunidad matemática alejandrina –en carta dirigida a Eratóstenes– la forma de descubrir los resultados matemáticas por medio de la mecánica, que se ocultaba en el resto de

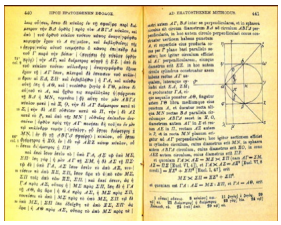
sus escritos científicos. La combinación de Geometría y Estática que Arquímedes había hecho en sus tratados *Sobre el Equilibrio de los Planos* y en *Sobre los Cuerpos Flotantes* para establecer rigurosamente ciertas propiedades relacionadas con el equilibrio de ciertos cuerpos geométricos, la realiza de nuevo en *EL MÉTODO* para descubrir e investigar resultados, que, obtenidos de forma mecánico-geo-métrica en esta obra, demostrará de forma impecablemente rigurosa en sus famosos tratados científicos conocidos. Aquí veremos la aplicación del *Método mecánico* a la cubatura (volumen) de la esfera, de donde Arquímedes descubre a su vez, mediante una feliz intuición, la Cuadratura (superficie) de la esfera.

Primera página de la obra *Sobre la Esfera y el Cilindro* en el Museo Municipal de Trieste.

La obra de Arquímedes *Sobre la Esfera y el Cilindro* consta de dos Libros. El primer Libro es un complemento natural del Libro XII de *Los Elementos* de Euclides. Ambos tratan de las figuras esferas, cilindros y conos, pero Arquímedes trasciende de forma muy considerable los resultados euclídeos, al demostrar aquí, de forma magistral, mediante el *método de exhaución*, nuevos y fundamentales teoremas sobre el volumen (Proposición I.34 y su Corolario) y la superficie de la esfera (Proposición I.33).
Los trabajos geométricos desarrollados por Arquímedes en esta obra son probablemente considerados los más importantes por el científico, hasta el punto que, según testimonio de Plutarco (Marcelo, XVII.12), ratificado por Cicerón (*Tusculanas* V.23), el sabio exhortó a sus deudos a que se grabara en su tumba lo que sería el primer epitafio científico de la historia, las figuras de un cilindro circunscrito a una esfera junto con un epigrama que describiese la relación que las vincula, sencillas proporciones que debieron imp
resionar al propio Arquímedes:

«*La esfera y el cilindro circunscrito a ella están en la relación de 2 a 3, tanto en volumen como en superficie total.* »

«*los volúmenes de un cono, una semiesfera y un cilindro de la misma altura y radio están en la razón* 1:2:3.»

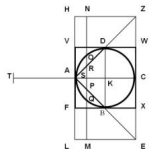


La cubatura de la esfera en *EL MÉTODO* de Arquímedes
La Cubatura de la Esfera es, sin duda, el ejemplo de descubrimiento
La Proposición 2 de *Archimedis Opera Omnia* de Heiberg, es la más ilustrativa de la aplicación del *método de la exhaustión*

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES DIRIGIDO A ERATÓSTENES

PROPOSICIÓN II: Cubatura y Cuadratura de la Esfera.
Toda esfera es cuádruple del cono cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y

cuya altura sea igual al radio de la esfera; a su vez el cilindro cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al diámetro de la esfera, es igual a vez y media la esfera.



Sea una esfera cuyo círculo máximo sea ABCD, siendo AC y BD dos diámetros perpendiculares. Sea también en la esfera un círculo de diámetro BD, perpendicular al círculo ABCD; y a partir de ese círculo constrúyase un cono que tenga por vértice el punto A. Prolongada la superficie del cono, córtese éste por un plano que pase por C y sea paralelo a la base, que dará un círculo perpendicular a AC, cuyo diámetro será la recta EZ. Constrúyase después a partir de este círculo un cilindro de eje igual a AC y sean EL y ZH generatrices del mismo. Prolónguese CA y tómese en su prolongación una recta AT igual a ella, y considérese CT como una palanca cuyo punto medio sea A. Trácese una paralela cualquiera MN a BD, que corte al círculo ABCD en Q y O, al diámetro AC en S, a la recta AE en P y a la recta AZ en R. Levántese sobre la recta MN un plano perpendicular a AC, que cortará al cilindro según el círculo de diámetro MN, a la esfera ABCD según el círculo de diámetro QO y al cono AEZ según el círculo de diámetro PR.

De la geometría de la figura, Arquímedes va obteniendo:
$AQ^2 = AC \cdot AS$ [*Euclides* III.31], $AQ^2 = QS^2 + SP^2$ [*Euclides* I.47].
$MS \cdot SP = AC \cdot AS = AQ^2 = QS^2 + SP^2$.
$AT/AS = MS/SP = MS^2/MS \cdot SP = MS^2/(QS^2 + SP^2)$.

Sean ahora c(MN), c(QO), c(PR) los círculos de diámetro MN, QO, PR, respectivamente.

$$\frac{AT}{AS} = \frac{MS^2}{QS^2 + SP^2} = \frac{MN^2}{QO^2 + PR^2} = \frac{c(MN)}{c(QO) + c(PR)}$$

[*Euclides* XII.2],
relación geométrica básica para emprender *el método mecánico de la palanca*: el círculo c(MN) del cilindro, « *per maneciendo en su lugar* » estará en equilibrio respecto del punto A (fulcro de la palanca) con los círculos c(QO), c(PR) trasladados y colocados sobre el punto T, de tal manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea T.

Realizando el mismo proceso para todas las paralelas MN a EZ y los círculos que se obtienen sobre la esfera, el cilindro y el cono, resulta que «*llenados*»con tales círculos el cilindro, la esfera y el cono, el cilindro, « *permaneciendo en su lugar* »
,
estará en equilibrio, respecto del punto A, con la esfera y el cono juntos, trasladados y colocados sobre la palanca en el punto T, de manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea T. De aquí aplicando la
Ley de la Palanca
[
Sobre el Equilibrio de los Planos
I.6 y I.7] resulta que: «
la razón del cilindro a la esfera y el cono juntos, será la misma que la razón de
AT
a
AK».

Desarrollando simbólicamente los cálculos que Arquímedes describe retóricamente, sean:

e = esfera ABCD; c = cilindro de diámetro EZ y generatrices EL, ZH.
d = cilindro de diámetro BD y generatrices XF, WV.
a = cono cuya sección es el triángulo AEZ ; b = cono cuya sección es el triángulo ABD.

Aplicando *el método mecánico*, Arquímedes muestra que c = 2(e+a).
Pero como según *Euclides* XII.10 se verifica que d=3b y c = 3a, se tiene: a = 2e.
Ahora de *Euclides* XII.12 resulta: a = 8b y de *Euclides* XII.14 se obtiene: c = 2d.
Combinando los resultados se obtiene finalmente los resultados del enunciado: **e = 4b, d = (3/2)e.**

Utilizando el primer resultado obtenido, Arquímedes emprende a continuación el cálculo de la superficie de la esfera. Y lo hace, de forma retórica, con estas palabras:

«*Habiéndose visto que toda esfera es cuádruplo del cono que tiene por base un círculo máximo y cuyo eje es igual al radio de la esfera, se me ocurrió que la superficie de toda esfera es cuádruplo del círculo máximo de la esfera; porque tenía la intuición de que, puesto que todo círculo es equivalente al triángulo cuya base es igual a la circunferencia del círculo y cuya altura es igual al radio* [*Sobre la Medida del Circulo*, Proposición 1], *toda esfera es equivalente al cono cuya base es la superficie de la esfera y cuya altura es igual al radio*
».

La feliz intuición de Arquímedes le lleva al resultado correcto. En efecto sean:

S = superficie de una esfera e de radio r.
s = área de un círculo máximo de la esfera e.
C = cono de base S y altura r.
c = cono de base s y altura r.

Del resultado de Arquímedes: e = 4c .

De la sagaz intuición de Arquímedes, obtenida por analogía con la Proposición 1 de *Sobre la Medida del Círculo*
, se tiene: e = C.

Por tanto C = 4c, de donde según *Euclides*, XII.11, se deduce: **S = 4s**, es decir, la superficie de una esfera es cuatro veces un círculo máximo.

Arquímedes tiene muy claro que la argumentación mecánica de *EL MÉTODO*, que tan fructífera había sido para conocer áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos, no le servía para determinar áreas de superficies curvas, lo que le lleva a soslayar tal impedimento mediante un razonamiento por analogía, comparando la situación entre el volumen y superficie de la esfera con la situación entre el área y el perímetro de un círculo, cambiando cono por triángulo, es decir, ya que se verifica:

Área del círculo = triángulo de base la circunferencia y altura el círculo.

Análogamente debe verificarse:

Volumen de la esfera = cono de base la superficie de la esfera y altura igual al radio.

Arquímedes da muestras de una intuición genial, pero en este lugar no cabe duda de que ha tenido una idea feliz, porque no siempre la analogía conduce a un resultado correcto. Por ejemplo, un triángulo es igual a la mitad de un paralelogramo de igual base y altura, pero en cambio la pirámide no es equivalente a la mitad del prisma de igual base y altura, sino a su tercera parte.

Observemos que Arquímedes, en *EL MÉTODO*, encuentra el volumen de una esfera antes que el área de la misma y deduce ésta de aquél. No obstante, como hemos mencionado anteriormente, Arquímedes demuestra el resultado del área de la esfera, en la Proposición 33 del Libro I de su tratado *Sobre la Esfera y el Cilindro*, es decir, antes y de forma independiente del volumen de la esfera, que lo demuestra en la proposición siguiente. Es por tanto muy interesante observar que en Arquímedes, y así también en otros geómetras griegos, la secuencia de las proposiciones en los grandes tratados clásicos no es la misma que la seguida en el proceso heurístico del descubrimiento.

Al aunar lo heurístico del *método mecánico de descubrimiento* con lo apodíctico del *método de demostración por exhaución*, el trabajo de Arquímedes –desarrollado con una asombrosa intuición que produce un vibrante entusiasmo intelectual ante un inusitado despliegue de teoremas geométricos que el sabio había descubierto mediante los procedimientos mecánicos de *EL MÉTODO* – tuvo una influencia histórica decisiva en los orígenes y la evolución del Cálculo Integral. No es extraño que los matemáticos del siglo XVII –grandes artífices de los primeros rudimentos del Cálculo Integral– pensaran que Arquímedes disponía de un método milagroso secreto como piedra filosofal del descubrimiento geométrico. Tampoco es sorprendente o extraordinario, aunque sí maravilloso, que D'Alembert proclamara (*Discurso Preliminar de la Enciclopedia.* Orbis, Barcelona, 1984. p.63):

«*La imaginación no actúa menos en un geómetra que crea que en un poeta que inventa.* [...] *De todos los grandes hombres de la antigüedad, es acaso Arquímedes el que más merece figurar al lado de Homero*
».

Bibliografía

[A] Fuentes originales y textos sobre Arquímedes y *El Método*:

1. ARCHIMEDES: ***Archimedis Opera Omnia***. Edición de J. L. Heiberg. Leipzig, 1910-1913.
2. ARCHIMÈDE : ***Les Oeuvres complètes d'Archimède***. Introducción y notas de P.Ver Eecke, Vaillant-Carmanne. Liège, 1960.

3. ARQUÍMEDES (en ***Científicos Griegos***. Antología. Recopilación, estudio preliminar, preámbulo y notas de F. Vera). Aguilar, 1970.
4. ARQUÍMEDES: ***El Método***. Introducción y notas de J. Babini. Eudeba, Buenos Aires, 1966.
5. ARQUÍMEDES: ***El Método***. Introducción y notas de L. Vega. Alianza Editorial, Madrid, 1986.
6. BABINI,J.: Arquímedes. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1948.
7. DIJKSTERHUIS,E.: ***Archimedes***. Princeton University Press, 1987. Cap.X.
8. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M, VAQUÉ,J.: ***El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*** . Edición con facsímil. Universitat Autónoma de Barcelona, Universitat. Politècnica de Catalunya. Colección *Clásicos de las Ciencias.*
Barcelona, 1993. Edición crítica en español de esta obra de Arquímedes.

9. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M, VAQUÉ,J.: ***Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*** . Fundació

Bernat Metge. Barcelona, 1997. Edició crítica en català d'aquesta obra d'Arquimedes.

10. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (Coautor): ***De Arquímedes a Leibniz, tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico***
. Fundación Canaria
Orotava
de Historia de la Ciencia, Santa Cruz de Tenerife, 1995.

11. GONZALEZ URBANEJA, P.M. (coautor): ***Estudios preliminares y Notas a la traducción*** de "***Arquímedes***, ***Obras escogidas*** ".
Edición con facsímile del Manuscrito X-I-14 de la Biblioteca de El Escorial. Editor: A. Durán. RSME, International Congress of Mathematicians (ICM06), Patrimonio Nacional. Madrid, 2006.

12. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: (coautor): ***El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*** (en ***Dios creó los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia***
).
Edición de Stephen Hawking, págs. 163–202
). Editorial Crítica. Barcelona, 2006.

13. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: ***A un siglo del descubrimiento de El Método de Arquímedes por Heiberg*** . La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 9.3, 715–744, 12/2006.
http://www.rsme.es/gacetadigital/vernumero.php?id=63
ArquimedesGacetaRSME93.pdf

14. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: ***Arquímedes. Obras escogidas*** **(ICM06).** Revista SUMA (FESPM), núm.54, pp.118–122, 02/07.

15. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: ***El método mecánico de Arquímedes y las raíces históricas del Cálculo Integral*** (en ***La Historia de la Matemática en Ciencia en Acción***
)
. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 10.1, 215–220, 2007.
http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_details&gid=660&Itemid=75

16. GONZALEZ URBANEJA, P.M.: ***Arquimedes en el Congrés Internacional de matemàtics de Madrid*** (ICM2006). Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques. Volum: 22: núm. 1 (juliol 2007). En prensa.

17. GOULD,S,H.: ***The Method of Archimedes***. American Mathematical Mon-thly, LXII, 473-476, 1955.

18. HEATH,T.: ***The Method of Archimedes recently discovered by Heiberg (A supplement to the works of Archimedes***
,
1897
). Cambridge University Press, 1912.

19. HEIBERG,J.L: ***Eine neue Archimedeshandschrift***. *Hermes*, vol.XLII, págs.234-303, Berlín, 1907.

20. HEIBERG,J.L.: ZEUTHEN,H.G.: ***Eine neue Schrift des Archimedes***. Bibliotheca Mathematica de Teubner, págs. 321-363, Vol. VII3, Leipzig, juny, 1907.

21. HEATH, T.L.:***The Works of Archimedes.*** Dover, New York, 2002.

22. MUGLER,C.: **Archimède:** 4 volúmenes. ***Les Belles Lettres***, París, 1970-1972.

23. NETZ;R. , Noel,W.: ***El código de Arquímedes.*** Temas de hoy, Madrid, 2007.

24. RAEDER,H.: ***Johan Ludving Heiberg.*** Isis, Vol. 11, 367-74, 1928.

25. REINACH,T.: ***Un traité de Géométrie inédit d'Archimède. Restitution d'après un manuscrit récemment découvert*** **.** Revue général des Sciences pures et appliquées, nos de 30/11/1907, 15/12/1907, XVIII, París, 1907.

26. RUFINI,E. : ***Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità.*** Casa Editrice Alberto Stock, Roma, 1926. Nueva edición de Feltrinelli, Milán, 1961.

27. WILSON, N.: The Archimedes Palimpsest, A Progress Report. Lincoln College Oxford. http://www.archimedespalimpsest.org/index.htm

[B] Obras generales sobre Historia de la Matemática y del Cálculo Infinitesimal:

1. BARON,M.E.: ***The Origins of the Infinitesimal Calculus,*** London, Pergamon, 1969. Caps 1,2.

2. BELL, E.T. ***Les grands mathématiciens***. Payot. París, 1950. Cap.II.

3. BOYER, C.B.: ***Historia de las Matemáticas***. Alianza Universidad, Madrid, 1986. Cap. VIII.

4. BOYER, C.B.: ***The History of the Calculus and its conceptual development.*** Dover, NY. 1949. Cap.2.

5. COLERUS, E.: ***Breve historia de las Matemáticas.*** Doncel, Madrid, 1972. Vol. 1, Cap. 3.

6. EDWARDS, C.H.:***The Historical Development of the Calculus***. Sprin-----ger-Verlag, New York, 1979. Cap. 2.

7. EVES, E.: ***An Introduction to the History of Mathematics.*** CBS Coll. Publ. N. York, 1983. Cap. 11.

8. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M.: ***Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII.*** Alianza Editorial, Madrid, 1992. Cap. 2.2.

9. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (coautor).: ***Matemáticas y matemáticos en el mundo griego*** (en ***El legado de las Matemáticas, de Euclides a Newton***). RSME, SAEM Thales, Univ. Sevilla, 2000, Cap.1.

10. GRATTAN-GUINNESS,I.: *Del Cálculo a la Teoría de Conjun-tos*. Alianza Universidad, Madrid, 1984. Cap. 1.

11. HEATH, T.L.: ***History of Greek Mathematics.*** Vol.2, Cap.XIII.

12. KLINE,M.: ***El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.*** Alianza Editorial, Madrid, 1992. Cap.5.3.