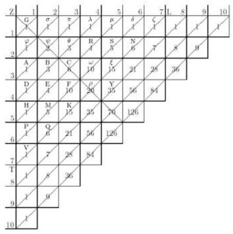
Definición y algunas propiedades del triángulo aritmético

Blaise Pascal nació el 19 de junio de 1623 en Clermont - Ferrand y murió el 19 de agosto de 1662 en París.
Su padre, el matemático Etienne Pascal, que se hizo cargo de su educación, decidió que Blas no iniciara los estudios de matemáticas hasta haber cumplido los quince años. Por tal motivo, los textos consagrados a esta disciplina fueron puestos fuera del alcance del joven Pascal. Sin embargo, la prohibición paterna despertó su curiosidad por la geometría y a los doce años de edad ya había descubierto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos. Ante tal descubrimiento, Etienne cambió de parecer y regaló a su hijo un ejemplar de los *Elementos* de Euclides.
A los catorce años, Blaise acompañaba a su progenitor a las reuniones del padre Mersenne en las que participaban científicos de la talla de Roberval y Desargues, a los dieciséis publicó su *E ssay pour les coniques*
, y a los dieciocho diseñó y construyó una máquina calculadora.
Pascal tuvo, sin duda, una de las mentes más privilegiadas de la historia, pero se interesó más por la teología que por las matemáticas, disciplina a la que se dedicó de forma intermitente. A pesar de ello, sus contribuciones al estudio de las cónicas, al “triángulo aritmético” (que también se conoce como “triángulo de Pascal” y “triángulo de Tartaglia”), y al cálculo de probabilidades le convierten, en palabras del historiador Carl B. Boyer, en el más grande “podría haber sido” de la historia de las matemáticas.

Las investigaciones de Pascal sobre el “triángulo aritmético” se encuentran en el *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*
, publicado en 1665. De este texto hemos extraído los párrafos siguientes:

DEFINICIONES

Llamo triángulo aritmético a una figura construida del modo siguiente:
Desde cualquier punto G dibujo dos líneas perpendiculares GV y Gζ y en cada una tomo tantas partes iguales como quiera, empezando por G, numeradas con 1, 2, 3, 4, etc. Estos números son los “exponentes” de cada una de las divisiones de las líneas.



Después, uno los puntos de la primera división de cada una de las dos líneas mediante otra línea, que es la base del triángulo resultante. Del mismo modo, uno los dos puntos de la segunda división por otra línea, construyendo un segundo triángulo de la que aquella es la base.

De forma similar, uno todos los puntos de división con el mismo exponente y construyo tantos triángulos y bases como exponentes.

Por cada uno de los puntos de división, y paralelamente a los lados, dibujo líneas cuyas intersecciones dan origen a pequeños cuadrados a los que llamo "celdas".

Las celdas entre dos paralelas dibujadas de izquierda a derecha se llaman "celdas de la misma fila". Por ejemplo, las celdas G, σ, π, etc., o las celdas φ, ψ, θ, etc.

Las celdas entre dos líneas paralelas dibujadas de arriba hacia abajo se llaman "celdas de la misma columna". Por ejemplo, G, φ, A, D, etc., o σ, ψ, B, etc.

Las celdas que están cortadas por la misma base se llaman "celdas de la misma base". Por ejemplo, D, B, θ, λ, o A, ψ, π.

Las celdas de la misma base que equidistan de sus extremos se llaman "recíprocas". Por ejemplo, E, R y B, θ son recíprocas porque el exponente de fila de una es igual al exponente de columna de la otra, como puede verse en el ejemplo anterior donde E está en la segunda columna y en la cuarta fila, y su recíproca R está en la segunda fila y cuarta columna. Se demuestra muy fácilmente que las celdas con exponentes recíprocos están en la misma base y equidistan de sus extremos.

También es muy fácil de demostrar que la suma del exponente de columna y el exponente de fila de cualquier celda excede en una unidad al exponente de su base. Por ejemplo, la celda F está en la tercera columna, en la cuarta fila y el la sexta base y la suma de 3 y 4 excede en uno al exponente de la base, que es 6. Una propiedad que surge del hecho de que los dos lados de un triángulo tienen el mismo número de partes. Pero esto es más una observación que una demostración.

Del mismo tipo es la observación de que cada base tiene una celda más que su precedente y que cada base tiene tantas celdas como unidades tiene su exponente. Así, la segunda base φσ tiene dos celdas; la tercera, Aψπ tiene tres, etc.

Además, los números asignados a cada celda se encuentran por el método siguiente:

El número de la primera celda, que está en el ángulo recto, es arbitrario; pero una vez que este número ha sido asignado, todos los demás están determinados. Por esta razón, dicho número se llama "generador" del triángulo. Cada uno de los restantes números se determina así:

El número de cada celda es igual a la suma de los números de las celdas perpendicular y horizontal que le preceden inmediatamente. Así, la celda F, o el número de la celda F, es igual a la suma de la celda C y la celda E, y así para las demás.

De donde se deducen algunas consecuencias. Siguen las más importantes, en las que *considero triángulos generados por la unidad. No obstante, lo que diga de ellos se mantiene para todos los demás.*

PRIMERA CONSECUENCIA

En todo triángulo aritmético, todas las celdas de la primera fila y primera columna son iguales a la celda generadora.
Por definición, cada celda del triángulo es igual a la suma de las celdas perpendicular y horizontal que le preceden inmediatamente. Pero las celdas de la primera fila no tienen celdas perpendiculares que las precedan y las celdas de la primera columna no tienen celdas horizontales que las precedan. Por tanto, todas son iguales entre sí y, consecuentemente, al número generador.
Así, $\varphi = G + 0$, *es decir:* $\varphi = G$,
$A = \varphi + 0$, *es decir:* $A = \varphi$
$\sigma = G + 0$, $\pi = \sigma + 0$, *y de modo similar para el resto.*

SEGUNDA CONSECUENCIA

En cualquier triángulo aritmético, cada celda es igual a la suma de todas las celdas de la fila precedente, desde su propia columna hasta la primera, ambas inclusive.
Tómese cualquier celda, por ejemplo la ω. *Digo que es igual a* $R + \theta + \psi + \varphi$, *que son las celdas de la fila inmediata superior desde la columna de* ω *hasta la primera columna.*
Esto resulta evidente si consideramos una celda como suma de sus celdas componentes.

$$\varpi = R + \underbrace{C}_{\theta + \underbrace{B}_{\psi + \underbrace{A}_{\varphi}}}$$

dado que A y φ *son iguales en virtud de la consecuencia anterior.*

Por tanto: $\omega = R + \theta + \psi + \varphi$.

TERCERA CONSECUENCIA

En todo triángulo aritmético, cada celda es igual a la suma de todas las celdas de la columna precedente, desde su propia fila hasta la primera, ambas inclusive.
Tómese una celda cualquiera, por ejemplo la C. Digo que es igual a $B + \psi + \sigma$, que son las celdas de la columna precedente desde la fila de C hasta la primera fila.
Esto también se ve, como antes, por simple interpretación de las celdas.

$$C = B + \underbrace{\theta}_{\psi + \underbrace{\pi}_{\sigma}}$$

dado que $\pi = \sigma$, en virtud de la primera consecuencia.
Por tanto: $C = B + \psi + \sigma$.

CUARTA CONSECUENCIA

En cualquier triángulo aritmético, cada celda excede en una unidad a la suma de todas las celdas limitadas por su fila y columna, ambas exclusive.
Tómese una celda cualquiera, por ejemplo ξ.
Digo que ξ - $G = R + \theta + \psi + \varphi + \lambda + \pi + \sigma + G$, que son todas las celdas entre la fila $\xi\omega CBA$ y la columna $\xi S\mu$, ambas exclusive.
Esto se hace comprensible por interpretación de las celdas.

$$\xi = \lambda + R + \underbrace{\varpi}_{\pi + \theta + \underbrace{C}_{\sigma + \psi + \underbrace{B}_{G + \varphi + \underbrace{A}_{G}}}}$$

Por tanto: $\xi = \lambda + R + \pi + \theta + \sigma + \psi + G + \varphi + G$.

Advertencia

En el enunciado he dicho que cada celda "excede en una unidad" dado que el generador es la unidad. Si fuese otro número, entonces el enunciado diría: cada celda "excede en el número generador" .

Referencias bibliográficas

- BOYER, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial, S. A.

Referencias on line

- Cambridge University Library.
  Pascal's Treatise on the Arithmetic Triangle.
  http://www.lib.cam.ac.uk/RareBooks/PascalTraite/
- David Pengelley.
  Pascal's Treatise on Arithmetical Triangle: Mathematical Induction, Combinations, the Binomial Theorem and Fermat's Theorem. A Historical Project in Three Parts.
  http://www.math.nmsu.edu/hist_projects/pascalII.pdf
- The MacTutor History of Mathematics archive
  http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Pascal.html