ABC, 7 de Octubre de 2019
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

Dos criterios de divisibilidad que probablemente no conocías y no son magia

Adobe Stock

Cuando estudiamos en la escuela las reglas de divisibilidad, aprendemos unos criterios para averiguar de un modo sencillo (sin dividir por el número en cuestión) si un número es divisible por 2, 3, 5, 6, 8, 9 y 10, esto es, si el resto es cero. En planes de estudio más antiguos, también se enseñaba cuando un número era divisible por 11, e incluso por 13. Pero en prácticamente ningún caso, se nos enseñaba **una regla para la división entre 7**. Los alumnos encantados, cuanta menos materia se nos diera, mejor. Pero, quien más, quien menos se preguntaba, aunque no lo manifestara, ¿por qué? ¿Será que el criterio es muy complicado? O a lo mejor ni existe tal criterio.

Hoy trataremos de arrojar alguna luz (confío) sobre el asunto. De paso, satisfacemos a un lector que en una ocasión nos sugirió en un comentario a una entrada anterior que para cuando la regla del 7 (bien es cierto que lo expresó de modo sarcástico ante lo que consideraba una reseña demasiado elemental, pero es una buena excusa para repasar y quizá aprender algo nuevo).

Para empezar, digamos que los criterios de divisibilidad no son únicos. Hemos aprendido los más simples, sencillos y prácticos, pero hay muchos. En el caso del 7, echemos un vistazo a un par de ellos, y cada cual que se quede con el que más le guste, o considere más sencillo de recordar y aplicar.

Primer intento

Cojamos los dígitos del número en orden inverso, es decir, empezando desde las unidades, multiplicándolos sucesivamente por 1, 3, 2, 6, 4, 5, repitiendo esta sucesión de multiplicadores si es necesario. Después sumamos todos esos productos. Esta suma tiene el mismo resto que el número inicial si lo dividimos por 7 (matemáticamente esto se expresa como que ambos son congruentes módulo 7). Comprobémoslo mediante un ejemplo.

Ejemplos: ¿Es 2359 divisible por 7?

9 x 1 + 5 x 3 + 3 x 2 + 2 x 6 = 42

Como 42 es divisible por 7, también lo es 2359.

Observamos que este método se basa en encontrar un número más bajo que tenga las mismas características ante el 7 que el que buscamos, y es el que nos "aclara" lo que sucede.

El inconveniente de este procedimiento es que, si el número original es muy alto, puede resultar más sencillo dividir directamente por 7 (con lo cual, el método no sería práctico). Por ejemplo, queremos saber si 9999999 es divisible por 7. Deberíamos efectuar entonces esta operación:

9 x 1 + 9 x 3 + 9 x 2 + 9 x 6 + 9 x 4 + 9 x 5 + 9 x 1= 198

¿Y ahora qué hacemos con 198? ¿Lo dividimos por 7? Para eso, habíamos dividido el primero y ya habríamos terminado. Aunque siempre podemos volver a repetir el algoritmo:

8 x 1 + 9 x 3 + 1 x 2 = 37

Concluimos por tanto que el original no es divisible por 7.

Pero, ¿por qué funciona el procedimiento? O, dicho de otro modo: hagamos una demostración, porque parece un poco "raro" tomar precisamente esos valores (1, 3, 2, 6, 4, 5). ¿De dónde salen? Mucha gente piensa a veces que las matemáticas son como algo mágico,

en donde las cosas funcionan, pero no se sabe muy bien porqué, y nada más lejos de la realidad (a diferencia de tantas patrañas como nos cuentan diariamente por ahí). Si nos perdemos alguna cosa es, sencillamente, porque o no nos dicen la prueba, o no nos molestamos en pensarla.

Para poder hacer la demostración necesitamos algunas herramientas (como en cualquier otro oficio; aquí no son destornilladores, ni martillos, sino definiciones, propiedades, teoremas).

Recordemos que alguna vez ya hemos hablado de las congruencias , concepto esencial para demostrar muchas propiedades de los números ahorrándonos tediosas operaciones. Brevemente, un número a es congruente con otro b modulo n cuando a – b es un múltiplo de n (es decir, a – b es divisible por n). En lenguaje matemático,

$$a \equiv b \pmod{n} \text{ si, y sólo si, existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = k\,n$$

Las congruencias verifican algunas propiedades respecto a la suma y al producto (las describo porque necesito utilizarlas, no para llenar espacio). Por ejemplo, si en una congruencia sumamos la misma cantidad en ambos miembros, el resultado mantiene la congruencia (es decir, da el mismo resto, en la división). También si multiplicamos los miembros por el mismo número entero. De nuevo, en lenguaje matemático, es visualmente más fácil de recordar:

Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces para cualquier entero s, se cumple que

i) $a + s \equiv b + s \pmod{n}$

ii) $as \equiv bs \pmod{n}$

La demostración de estas propiedades es muy sencilla (los matemáticos decimos “inmediata”, y en ese caso, ni nos molestamos en detallarla, porque basta con ponernos a escribirla para dar con ella; pero aquí la vamos a relata, para que vean que, en efecto, es sencilla). Fíjense que para probar la congruencia i) hay que ver (de acuerdo con la definición previa) que existe

un número entero k tal que (b + s) – (a + s) = k n

Efectuando la resta nos queda b – a = k n, y esa condición es de la que partimos como cierta (a es congruente con b (mod n)), por lo tanto la afirmación está probada.

Del mismo modo, para ii), habría que demostrar que bs – as es un múltiplo de n, y como b – a = k n, y bs – as = s (b – a), entonces bs – as = sk n, y habríamos encontrado un múltiplo entero de n (el entero sk).

Volvamos al primer método de divisibilidad por 7. Las potencias de 10 tienen los siguientes restos al ser divididos por 7:

$$
\begin{aligned}
1 &\equiv 1 \pmod 7\\
10 &\equiv 3 \pmod 7\\
10^2 &\equiv 2 \pmod 7\\
10^3 &\equiv 6 \pmod 7\\
10^4 &\equiv 4 \pmod 7\\
10^5 &\equiv 5 \pmod 7\\
10^6 &\equiv 1 \pmod 7\\
10^7 &\equiv 3 \pmod 7\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Obsérvense que los restos que salen son (¡¡oh, magia!!) justamente los números por los que multiplicábamos los dígitos del número que queríamos ver si era o no divisible por 7. A partir del séptimo (la potencia 10 6 ; ¡¡más magia!!), se empiezan a repetir.

Un número m cualquiera puede escribirse en la forma $a_n\, a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2\, a_1\, a_0$. Su expresión decimal es entonces

$$m = a_0 + a_1\, 10 + a_2\, 10^2 + \ldots + a_n\, 10^n$$

$$\begin{aligned} a_0\, 1 &\equiv a_0\, 1 \pmod 7 \\ a_1 10 &\equiv a_1\, 3 \pmod 7 \\ a_2\, 10^2 &\equiv a_2\, 2 \pmod 7 \\ a_3\, 10^3 &\equiv a_3\, 6 \pmod 7 \\ a_4\, 10^4 &\equiv a_4\, 4 \pmod 7 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Y finalmente, una última propiedad de las congruencias:

Si $a \equiv b \pmod n$, y $c \equiv d \pmod n$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod n$

Así que

$$m = a_0 + a_1\, 10 + a_2\, 10^2 + a_3\, 10^3 + \ldots\ldots \equiv a_0\, 1 + a_1\, 3 + a_2\, 2 + a_3\, 6 + \ldots\ldots \pmod 7$$

Es decir, m en expresión decimal tiene el mismo resto al ser dividido por 7 que

$$a_0\, 1 + a_1\, 3 + a_2\, 2 + a_3\, 6 + \ldots\ldots$$

Segundo método

A partir del número del que deseamos saber si es divisible por 7, multiplicamos por dos su cifra de las unidades, y restamos la cantidad resultante del número que queda al eliminar del original la mencionada cifra de las unidades. Repetimos este proceso con el número obtenido hasta que nos quede un solo dígito. Si éste es 0 o 7, entonces el número original es divisible por 7.

Ejemplo: Volvamos a probar con el 2359. La cifra de las unidades es un 9, que doblamos, resultándonos 18. Entonces restamos 235 – 18 = 217. Repetimos el algoritmo con éste número, esto es, 21 – 14 = 7. Como el resultado ha sido 7, el número inicial es divisible por 7.

Para el segundo número, 9999999, procederíamos así:

$$999999 - 18 = 999981$$
$$99998 - 2 = 99996$$
$$9999 - 12 = 9987$$
$$998 - 14 = 984$$
$$98 - 8 = 90$$
$$9 - 0 = 9$$

Y 9 no es divisible por 7, de modo que el original tampoco. Como $9999999 \equiv 9 \pmod 7$, sabemos además que el resto de la división de 9999999 entre 7 es el mismo que el de 9 entre 7, es decir, 2.

Como antes, analicemos porqué este procedimiento "funciona". Supongo que todo el mundo entiende que $21 \equiv 0 \pmod 7$ (21 es divisible por 7; 7 x 3 = 21, es de Perogrullo). De la propiedad ii) de antes, es obvio que $21B \equiv 0 \pmod 7$, siendo B cualquier número entero. Y $21B = B + 20B$, por lo que $B \equiv -20B \pmod 7$ (seguro que piensan ¿y esto qué tiene que ver con lo que se quiere probar? Paciencia. En la vida todo lo bueno se hace esperar). Por la propiedad i),

$$10A + B \equiv 10A - 20B \pmod 7,$$

o, dicho de otro modo,

$$10A + B \equiv 10(A - 2B) \pmod 7$$

[redacted] Matemática Española (RSME) [redacted] Real Sociedad [redacted]