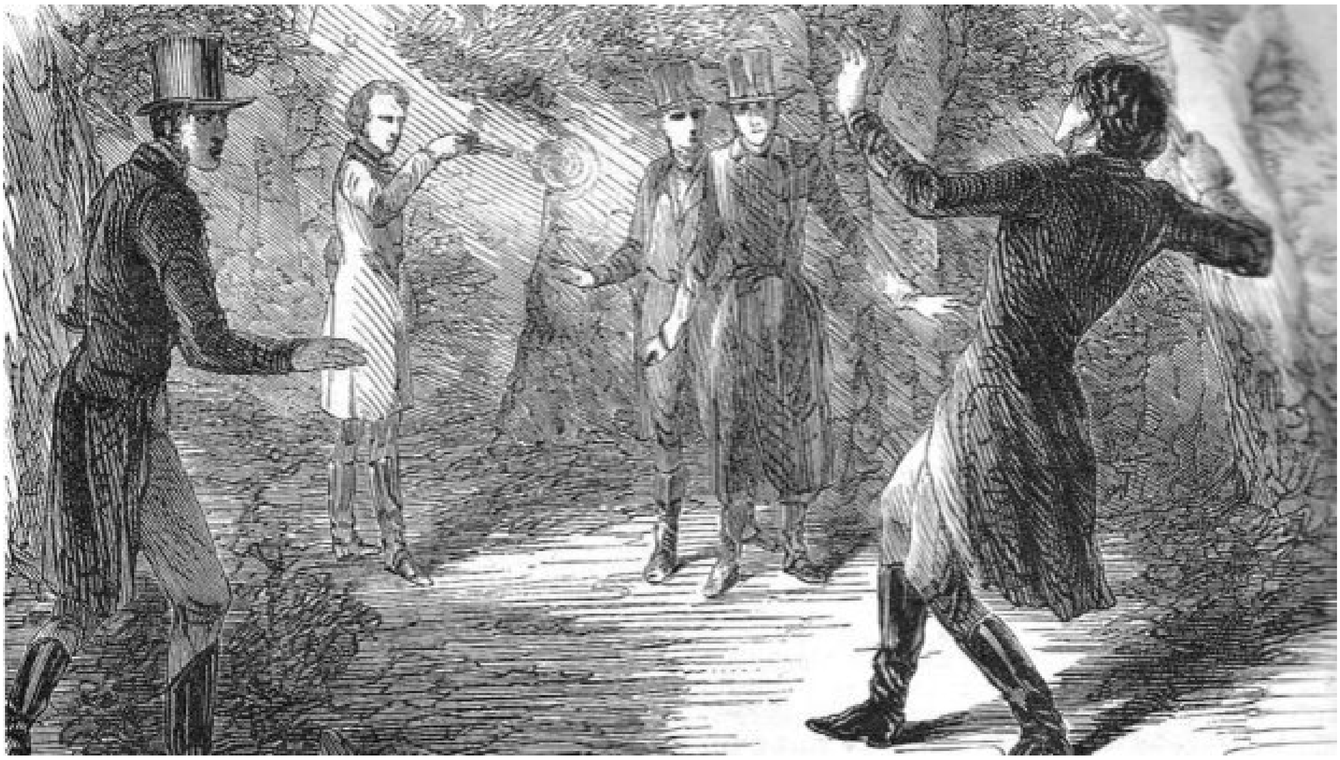
ABC, 15 de Febrero de 2021
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Iván Blanco Chacón

El genial matemático dejó tres cartas por testamento antes de morir en un duelo: una a sus correligionarios republicanos, otra a su amigo Auguste Chevalier, y otra a sus colegas de siglos futuros

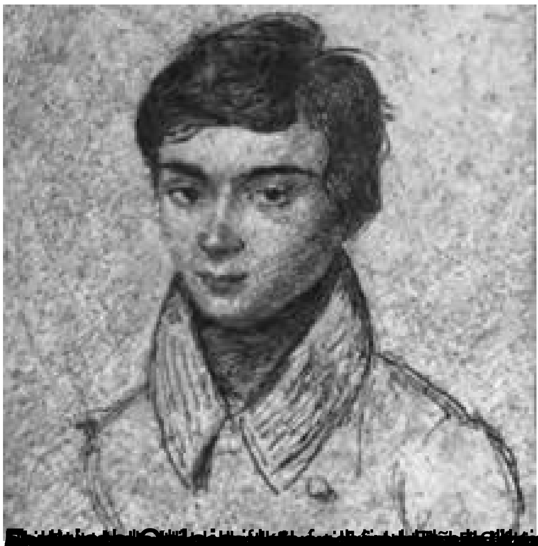


Duelo de pistolas en el siglo XIX, similar al que participó el matemático Galois y en el que perdió la vida - Beauce et Rouget

«No llores, Alfred. Necesito todo mi valor para morir a los veinte años». Quien así hablaba, una noche de mayo de 1832, se disponía a conquistar el Olimpo de las mitologías como el pionero de una teoría llamada a revolucionar las matemáticas. Con ella, Evariste Galois había resuelto un problema que traía en vilo a la comunidad matemática desde hacía dos siglos, pero el alcance de su enfoque excedería con mucho el objetivo original.

Nuestra historia es, matemáticamente, de una belleza insólita, pero en todo lo demás se trata de uno de los episodios más amargos de la historia de la ciencia. En efecto, una noche antes de dirigir esas palabras a su hermano, nuestro protagonista se preparaba para morir en un duelo a pistola. Tres cartas por testamento: una a sus correligionarios republicanos, otra a su amigo **Auguste Chevalier**, y otra a sus colegas de siglos futuros.

Semblanza trágica de un genio



Ecuaciones algebraicas: de la antigüedad al siglo XIX

En el último año de EGB (hoy segundo de ESO) se enseñaba que la ecuación de segundo grado

(1)

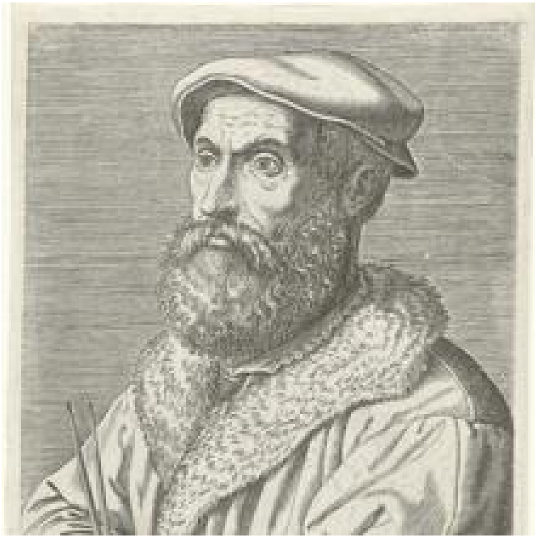
$$ax^2 + bx + c = 0$$

admite como soluciones

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este resultado fue descrito en el Siglo IX por el persa **Al-Juarizmi** y se basa en el procedimiento de completar cuadrados, por el que la ecuación (1) se transforma en una ecuación directa:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$



Siete siglos más tarde, **Hierolamo Cardano** y **Nicolo Fontana**, apodado Tartaglia debido a su tartamudez, abordaron la ecuación de tercer grado:

(2)

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

cuyas soluciones, demostraron, son:

$$x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}} - a/3$$

donde $p = \frac{3b - a^2}{3}$, $q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$, $\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$.

En esta expresión, la raíz cúbica

$$u = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}}$$

es arbitraria (siempre que dado un número real o complejo no nulo siempre existen tres raíces cúbicas distintas), y

$$v = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}}$$

se escoge de tal manera que p=–3uv. Por ejemplo, para la ecuación

$$x^3 + 2x - 2 = 0$$

se tiene

$$\Delta = 35/27$$

Por lo que tomando la raíz cúbica real

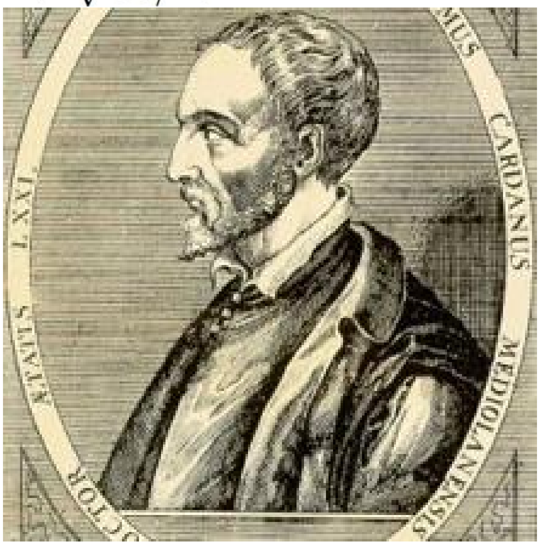
$$u = \sqrt[3]{1 + \sqrt{35/27}}$$

se obtiene

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{35/27}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{35/27}}$$

Las otras soluciones se obtienen de tomar las otras dos raíces cúbicas de

$$1 + \sqrt{35/27}$$



El cuarto grado

Parece que fue Ludovico Ferrari, alumno de Cardano, el primero en resolver la cuártica:

(3)

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

(4) $$P(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0,$$

Con raíces $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, podemos factorizarlo como

(5) $$P(X)=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n).$$

Desarrollando (5) e igualando con (4), expresaremos los coeficientes de P(X) como sumas de productos de las raíces tomadas 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, etcétera. Por ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & (-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \\ a_{n-1} & = & -(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n) \end{array},$$

$$u_{i,j,k,l}=\frac{1}{4}(\alpha_i+i\alpha_j+i^2\alpha_k+i^3\alpha_l)$$

$$\prod(X-u_{i,j,k,l}).$$

El trabajo de Galois

Familiarizado como estaba con la obra de Lagrange, Galois había llegado al mismo resultado que Abel, razón por la que Cauchy rechazó el manuscrito. Pero este contenía mucho más. Veámoslo.

Si bien no existe una fórmula general que exprese las soluciones de una ecuación de grado 5 o superior en términos de los coeficientes usando sólo sumas, productos y radicales, eso no es óbice para que algunas ecuaciones particulares de grado superior sí se puedan resolver por radicales. Pues bien, la memoria de Galois contiene también la condición necesaria y suficiente para que, dada una ecuación particular, podamos decidir si esta es resoluble o no por radicales. Damos a continuación algunas pinceladas sobre su prueba.

Arranca la memoria con varias definiciones. En concreto, dada una ecuación algebraica f(x)=0 de grado n, cuyos coeficientes pueden ser números o letras (lo que cubre también el caso de Abel), explica Galois lo que entiende por función racional de los coeficientes, a saber, un elemento del cuerpo K donde viven dichos coeficientes. Supondremos que K será el cuerpo de números racionales.

A continuación, dado un radical b, raíz n-ésima de un número a, se considera el cuerpo $K(b)$ formado por todos los cocientes de expresiones polinomiales en el radical b y con coeficientes en K. A este cuerpo se le llama ampliación de K por adjunción del radical b. Llamemos F al cuerpo obtenido adjuntando a K las soluciones de $f(x)=0$.

Si tras un número finito de adjunciones el cuerpo final llega a contener todas las raíces de f decimos que f es resoluble por radicales.

A partir de aquí desarrolla Galois su enfoque, cuya idea clave es la noción de grupo: un grupo es un conjunto sobre el que se ha definido una operación asociativa, con elemento neutro y tal que cada elemento posee un inverso.

Galois sólo considera el grupo de todas permutaciones de n elementos con la operación de composición (la composición de dos funciones f y g es la función que a todo x le asocia $f(g(x))$). Concretamente, Galois asocia a la ecuación f el grupo $S(f)$ tal que una función racional de las raíces lo es también de los coeficientes de f si y sólo si queda invariante por $S(f)$.

Por ejemplo, la ecuación $f(x)=(x^2+1)(x^2-2)=0$ tiene 4 raíces: i, −i, y las dos raíces cuadradas de 2. Así, $S(f)$ consta de 4 permutaciones: la que lleva i a −i y fija las raíces de 2, la que cambia las raíces de 2 y fija i y −i, la composición de ambas y la permutación identidad.

A continuación, prueba Galois que si p es primo, al adjuntar a K un radical b de grado p y las raíces p-ésimas de la unidad, también se adjuntan automáticamente las otras raíces de su ecuación definidora. Nos referimos a esta propiedad diciendo que el cuerpo $K(b)$ es extensión normal de K. Así, si f es resoluble por radicales existe una sucesión de extensiones normales desde K hasta F de tal modo que cada eslabón tiene grado primo. A esta propiedad nos referimos diciendo que $S(f)$ es un grupo resoluble y es la idea central de su trabajo. Para mayor detalle remitimos al lector al anexo III del opúsculo «Gauss y el álgebra de su tiempo», de **Ignacio Sols**, en la serie de Historia de la Matemática en el Siglo XIX, de Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Galois en las estrellas

Hemos dicho que la obra de Galois trasciende con mucho la teoría de ecuaciones algebraicas y así es: en primer lugar, su trabajo establece una correspondencia entre las extensiones algebraicas de K y ciertos subgrupos de permutaciones. Es más, cuando nos restringimos a las extensiones normales antes referidas, la correspondencia es biyectiva y puede verse como un diccionario entre el conjunto de dichas extensiones y el conjunto de los subgrupos del grupo de Galois. Es quizá el primer ejemplo de una equivalencia entre categorías matemáticas, que tan felices consecuencias había de tener.

En segundo lugar, aunque Galois sólo consideró grupos de permutaciones, la idea general de grupo es hoy omnipresente en matemáticas y hasta cierto punto en física teórica.

También la teoría algebraica de números y con ella la prueba de **Taylor** y **Wiles** (entre tantos otros nombres) del último teorema de Fermat serían impensables sin la aportación de Galois.

En cuanto a aplicaciones «del mundo real» diversos sistemas de comunicaciones inalámbricas tienen en su base la teoría de Galois. Nos referimos, por ejemplo, al código de Alamouti, o a los códigos Golden y Golden+ incluidos en el standard IEEE Wimax 802.16e.

La Unión Astronómica Internacional bautizó un cráter lunar con el nombre del genial francés. Descanse al fin en paz en el silencio de los astros y en la eternidad de su legado .

Iván Blanco Chacón es profesor e investigador en la Universidad de Alcalá de Henares.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)