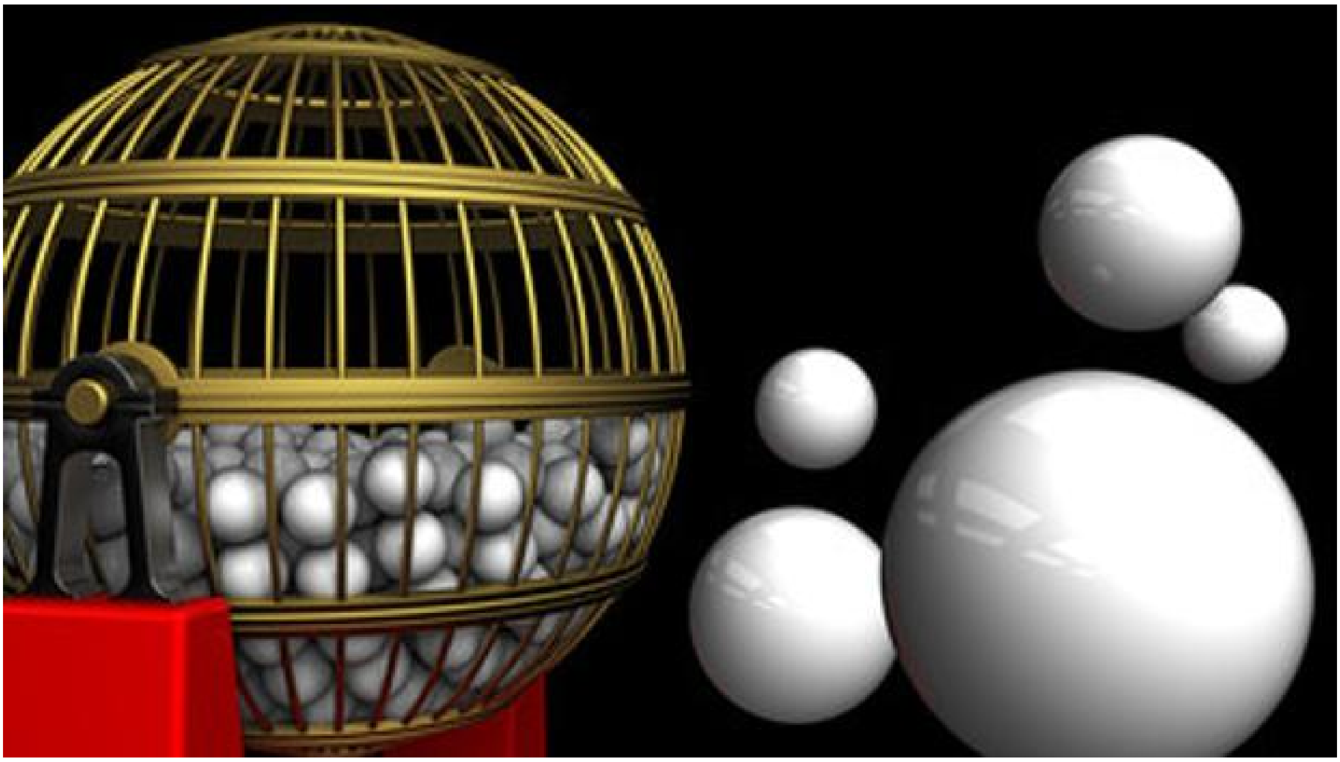
ABC, 16 de Diciembre de 2019
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

Y las de ganar en la ruleta y otros juegos de azar



Adobe Stock

A los matemáticos (y a los profesores de matemáticas) nos gustan los juegos. Y nos gustan no solo por su componente lúdica, entretenida y divertida (que también), sino porque es una actividad que desarrolla en los alumnos aspectos que no consigue ninguna otra tarea. Para empezar, todos los juegos están regidos por una serie de reglas que hay que respetar. En matemáticas sucede lo mismo, las operaciones que definimos tienen una serie de propiedades que hay que cumplir: la suma, producto o cociente de fracciones se hace de una determinada manera y no de otra, la manipulación algebraica de expresiones también, o la forma de derivar o integrar funciones responden a unos parámetros perfectamente definidos y que son de ese modo y no de otro, porque han sido demostrados rigurosamente, por poner algunos ejemplos concretos. En el parchís, la oca, los juegos de cartas, en cualquier juego, hay que seguir estrictamente unas normas.

Por otra parte, cuando uno juega a algo tiene un objetivo claro: ganar. Si no, uno no perdería el tiempo. Desea ganar. Después valoramos también el buen rato que hemos pasado, etc., etc., que está muy bien y debe ser el espíritu que hay que tener, el respeto, el valorar la participación por encima de todo, etc., pero mientras uno está en la partida, su objetivo es ganar. Y este aspecto no es malo dentro de unos parámetros didácticos, porque te motiva a pensar más, a esforzarte. Cuando a la mayoría de los alumnos se les propone un ejercicio para resolver, para pensar, o le sale rápidamente, o suele abandonar a las primeras de cambio. No le motiva, salvo que le gusten las matemáticas y se lo planteé como un reto. Pero eso no pasa cuando compite con otro u otros en un juego.

A medida que uno juega, va desarrollando una serie de **estrategias**. Para ello, se plantea una serie de acciones, y, de acuerdo a las circunstancias, al desarrollo del juego, toma un conjunto de **decisiones** que considera las **óptimas** para su objetivo. Estas tres palabras que he puesto en negrita, son tres aspectos esenciales en la investigación matemática, en el análisis de los problemas a resolver. Por tanto, un juego promueve la creatividad y la iniciativa, algo que necesitamos que pongan en práctica los alumnos.

Seguramente hayamos oído alguna vez hablar de la **teoría de juegos** como una rama de las matemáticas. En realidad, en este contexto la palabra "juego" no designa exclusivamente lo que popularmente conocemos como juego, sino un concepto un poco más general: cualquier confrontación, del tipo que sea, entre dos o más personas, países, entes cualesquiera. Dicha teoría analiza las estrategias a llevar a cabo para lograr un objetivo concreto. Por eso se aplica mucho en economía, por ejemplo.

Estas confrontaciones, estos "juegos" pueden ser de muy diversa índole. Aprovechando la cercanía del célebre sorteo de Navidad, y por tanto sin demasiada incidencia en el comportamiento de los lectores, al menos para este sorteo (quiero decir que lo que ya se hayan gastado, hecho está; el país siempre necesita recaudar fondos, y esto de la lotería es, básicamente, la modalidad de impuesto a la que a la gente no sólo no le importa pagar, sino que, además, está súper feliz con ello), vamos a describir hoy un par de ideas relacionadas con los **juegos de apuestas.**

En primer lugar, dejar claro que las matemáticas no son un mecanismo de adivinación, sino de análisis y reflexión. No podemos afirmar con rotundidad que un determinado suceso se va a cumplir. Nadie (salvo que haya trampas de por medio) puede asegurar nada en asuntos en los que tenga que ver el azar en la medida que sea. Ahora bien, podemos estudiar las posibilidades que existen de ganar, y a partir de ellas, decidir si jugamos o no. Precisamente una de las características que más atrae al personal en muchos aspectos de la vida es el riesgo, y la dosis de adrenalina que produce.

Entremos en la parte estrictamente matemática. Dos son los conceptos más elementales que se utilizan a la hora de analizar los juegos de apuestas: la **probabilidad** y la **esperanza matemática**. El

cálculo de probabilidades es más o menos complejo dependiendo de las condiciones, de las reglas del juego. En la mayor parte de los casos, es suficiente para su cálculo la conocida
regla de Laplace
de número de casos favorables dividido entre el número de casos posibles, aunque en determinados momentos puede ser necesario echar mano de la
probabilidad condicionada
y la
fórmula de Bayes
. Estas herramientas afinan más la estimación cuando tenemos conocimiento de lo que ha sucedido previamente, es decir, cuando un determinado suceso se repite varias veces. No obstante, en este artículo me voy a centrar más en la esperanza matemática, de manera que, dejaremos un tanto al margen el cálculo de las probabilidades, aunque necesitamos echar mano de ellas, por supuesto. Pero los ejemplos que propondremos serán en este sentido, muy elementales. Recordemos que el origen del cálculo de probabilidades está precisamente en una cuestión que el célebre
caballero de Méré
(Antoine Gombaud) realizó a
Pascal
y a
Fermat
en el siglo XVII sobre los juegos de azar (en la literatura se le atribuyen varias cuestiones; una de ellas es: ¿Qué es más probable, sacar un seis en cuatro tiradas de un dado, o sacar un seis doble tirando 24 veces dos dados? ¿A qué opción te jugarías todo?)

Esperanza matemática

Dada una variable aleatoria X, con una cantidad finita de resultados x_i, cada uno de los cuales se verifica con probabilidades p_i, respectivamente, la esperanza matemática o valor esperado se define como

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

Por ejemplo, con un dado usual de seis caras, en el que los valores se designan mediante puntos, si X es el resultado obtenido al lanzarlo una vez, ¿cuál es el número de puntos que veremos? Echemos la cuenta, únicamente aplicando la definición; después analizamos si tiene sentido la pregunta y lo que obtenemos.

Hay seis posibles resultados: obtener 1, 2, 3, 4, 5, 6. Cada uno con probabilidad 1/6 (suponemos que el dado no está trucado ni sesgado, para lo cual, se necesita, de acuerdo con nuestra experiencia, un dado nuevo, porque después de haber usado un dado, todos vemos que las esquinas están un poco redondeadas, puede tener algún agujerito, etc.; todos esos dados están sesgados, no tienen idénticas probabilidades en cada cara. Que lo sepan (ya lo habrán sufrido) cuando estas Navidades jueguen al parchís). Entonces,

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

Este ejemplo es únicamente para que veamos cómo se calcula la esperanza matemática, pero no tiene más que un valor teórico. ¿Por qué? Porque preguntar por el número esperado de puntos que vamos a ver **en una única tirada**, es prácticamente como querer saber qué cara va a salir, y eso no es posible. Es decir, ese valor esperado de 3.5, es el promedio del número de puntos que vamos a obtener después de unas cuantas tiradas. Cuantas más sean, más nos acercamos a ese valor, más fiable es el resultado. Obviamente, cuando el número de tiradas sea muy grande (n tendiendo a infinito en el caso extremo), el valor es exactamente ese, la media de los posibles valores. Fíjense que es la misma cuenta: (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6. Esa es una idea que nos puede ayudar a centrar qué mide la esperanza matemática: la **media**
es el promedio de los valores que ya han ocurrido, la esperanza matemática es el promedio de los valores que pueden ocurrir.

Apliquemos esto a las ganancias en los juegos de apuestas, que es el objetivo final de esta reseña.

Supongamos que nos plantean el siguiente juego: se lanza una moneda al aire; si sale cara, ganas un euro, si sale cruz, pagas (pierdes) un euro. En este caso

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} - 5 = -5$$

La ruleta

Empecemos con las apuestas simples. Consideraremos la ruleta europea (36 números, más un número cero; total 37 posibilidades en cada juego). Echemos un vistazo a cada una de las posibles apuestas que se pueden hacer. Tomamos 1 euro como apuesta genérica.

1.- Apuesta a un único número. El pago es 35 a 1 (es decir, si sale nuestro número nos pagan 35 veces nuestra apuesta, más lo que apostamos). Entonces la esperanza será:

$$E_1 = \frac{1}{37} 35 + \frac{36}{37}(-1) = \frac{-1}{37}$$

2.- Apuesta a dos números adyacentes. La ganancia es 17:1.

$$E_2 = \frac{2}{37} 17 + \frac{35}{37}(-1) = \frac{-1}{37}$$

3.- Apuesta a una fila completa (tres números). La proporción de pago es 11:1.

$$E_3 = \frac{3}{37}11 + \frac{34}{37}(-1) = \frac{-1}{37}$$

4 - Apuesta a cuatro números. Se paga 8:1

$$E_4 = \frac{4}{37}8 + \frac{33}{37}(-1) = \frac{-1}{37}$$

5 - Apuesta a dos filas. Las ganancias son 5:1

$$E_5 = \frac{6}{37}5 + \frac{31}{37}(-1) = \frac{-1}{37}$$

6 - Apuesta al primer tercio (doce números). La proporción es 2:1

$$E_6 = \frac{12}{37}2 + \frac{25}{37}(-1) = \frac{-1}{37}$$

7 - Apuesta a una mitad (18 números) o a un color (18 números). Las ganancias se pagan

$$E_7 = \frac{18}{37}1 + \frac{19}{37}(-1) = \frac{-1}{37}$$

[illegible]

$$E = \frac{-1}{37} + \frac{-1}{37} = \frac{-2}{37}$$

[illegible] apostado.

La lotería de Navidad

Acabemos la columna de hoy, con el juego en el que muchos están depositando sus ilusiones estos días (mientras escribo estas líneas, un compañero me llama a la puerta del despacho, recordándome que si quiero algún décimo de un número que compran entre varios; se lo agradezco, y les deseo mucha suerte, ja, ja, ja; acabo de no perder 20 euros). Aprovecho algunos cálculos que hice para esta entrada , y que el redactor no publicó.

En alguna página de internet he visto que se indica que este sorteo tiene una esperanza matemática de 0.7. Es un dato ABSOLUTAMENTE FALSO. Hagamos el cálculo para salir de dudas. Para poder hacerlo necesitamos conocer los premios que se dan, y cuanto nos dan por cada uno. Tomemos los datos directamente de página oficial de Lotería Nacional . Aparece esta imagen:

LOS PREMIOS DEL SORTEO DE NAVIDAD

Hay que dividir entre diez para calcular el dinero que se lleva cada décimo en el c
que el número sea premiado.

1º premio o el 'Gordo':	4.000.000 euros
2º premio:	1.250.000 euros
3º premio:	500.000 euros
4º premio:	dos premios de 200.000 euros
5º premio:	ocho premios de 60.000 euros
Pedrea:	1.794 premios de 1.000 euros
Números anterior y posterior al 1º premio:	dos premios de 20.000 euros
Números anterior y posterior al 2º premio:	dos premios de 12.500 euros
Números anterior y posterior al 3º premio:	dos premios de 9.600 euros
Centenas del 1º, 2º y 3º premio:	297 premios de 1.000 euros
Centenas del 4º y 5º premio:	198 premios de 1.000 euros
Con las dos últimas cifras del 1º, 2º y 3º premios:	297 premios de 1.000 euros
Reintegro:	9.999 premios de 200 euros

$$\frac{1}{100000}\cdot 400000 + \frac{1}{100000}\cdot 125000 + \frac{1}{100000}\cdot 50000 + \frac{2}{100000}\cdot 20000 +$$

$$\frac{8}{100000}\cdot 6000 + \frac{1794}{100000}\cdot 100 + \frac{2}{100000}\cdot 2000 + \frac{2}{100000}\cdot 1250 +$$

$$\frac{2}{100000}\cdot 960 + \frac{297}{100000}\cdot 100 + \frac{198}{100000}\cdot 100 + \frac{297}{100000}\cdot 100 +$$

$$\frac{9999}{100000}\cdot 20 - 20$$

$$-8.7$$

Felices Fiestas

Si alguno quiere practicar un poco el cálculo de la esperanza matemática, además de decirles que la calculen para otros juegos de apuestas, les propongo un ejercicio sencillito. Tiramos dos dados de los usuales de seis caras.

1.- Si sale una suma de 2, 4 o 12, pierden 3 euros.

2.- Si sale una suma de 7, pierden 2 euros.

3.- Con cualquier otro resultado, ganan 1 euro.

¿Jugarían a este juego?

Me gustaría que a todos ustedes les tocara la lotería. Como eso no es posible, les deseo que pasen unas felices fiestas. Hasta el año que viene.

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)