Demostrar que se verifica la igualdad: arctg 1 + arct 2 + arct 3 = π

Utilizaremos para ello:

* 1 papel cuadrado
* Conocimientos básicos de Papiroflexia
* Conocimientos básicos de Trigonometría
* Conocimientos de Geometría

Para resolver el problema, comenzaremos por realizar los pliegues que se indican en las siguientes figuras:

Figura 1

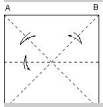


Figura 2

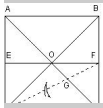


Figura 3

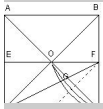


Figura 4

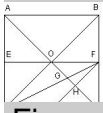
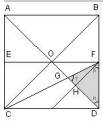


Figura 5



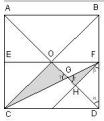
Y, a partir de aquí, utilizaremos el triángulo FGD que se ha formado, hallando las tangentes de sus ángulos .

= AB/DB = lado/lado = 1

= CD/FD = lado/(lado/2) = 2

=FH/GH (seguir leyendo)

Figura 6



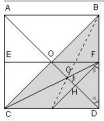
En la figura (6), se puede observar que los triángulos FHG y COG son semejantes, ya que ambos son rectángulos y tienen el ángulo igual por ser opuestos por el vértice. De aquí, se puede escribir:

= FH/GH = CO/OG

Y como CO es igual a DO, se puede también expresar:

=DO/OG

Figura 7



Por otro lado, en la figura (7) observar que G es el baricentro del triángulo CDB, es decir, el punto en el que se cortan sus medianas: CF, DO y la dibujada a trazos.

Una de las propiedades de este punto, centro de gravedad del triángulo, es que divide a cada una de las medianas en 2 segmentos que están en proporción 2:1, es decir, en la que nos interesa:.

DG = 2 x GO

y de aquí:

DO = DG +GO =3 x GO

La demostración de esta propiedad, se puede ver en cualquier tratado de Geometría o, preferentemente para los Papiroflectas, en el fenomenal libro:

"MATEMÁTICAS Y PAPIROFLEXIA" de Jesús de la Peña Hernández

editado por la Asociación Española de Papiroflexia, ISBN 84 - 607 - 2169 - 8

Sustituyendo este valor en la expresión que teníamos esperando, podemos escribir:

= DO/OG= 3

Aplicando las funciones inversas, podemos escribir el primer término de la igualdad que se pretende demostrar, de la siguiente forma:

arctg 1 +arctg 2 +arctg 3 =

Por otro lado, en todo triángulo, se verifica que la suma de sus tres ángulos es igual a un ángulo llano, es decir, de 180º ó π radianes. Ver las siguientes figuras para comprobarlo "papiroflécticamente".

Figura 8

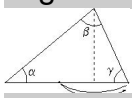


Figura 9

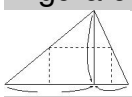
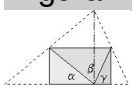


Figura 10



que es el segundo término de la igualdad

O sea que, finalmente, podemos escribir:

arctg + arctg 2 + arctg 3 = π

C.q.d

Vamos a continuación a resolver el problema prescindiendo de recursos a la Geometría, sustituyéndolos por un poco más de Papiroflexia.

Tomamos un papel cuadrado y efectuamos ordenadamente los pliegues que se indican en las siguientes figuras:

Figura 11

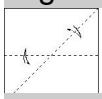


Figura 12

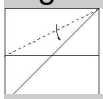


Figura 13

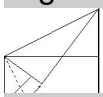


Figura 14

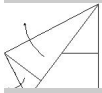


Figura 15

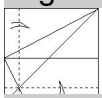


Figura 16

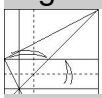


Figura 17

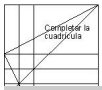
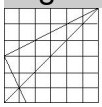
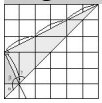


Figura 18



Observemos ahora en esta última figura los 3 triángulos que se distinguen por distintas tonalidades de gris y centremos la atención en los ángulos , cada uno de ellos perteneciente a uno de los triángulos.

Figura 19



Los 3 triángulos son rectángulos y, observando la cuadrícula, resultan evidentes los valores de las tangentes de los ángulos :
En el ángulo los catetos son iguales, por lo que la tangente valdrá 1 y; en el ángulo , uno de los catetos es el doble del otro, por lo que la tangente valdrá 2.

En el otro triángulo, es decir el que tiene el ángulo , para evaluar las dimensiones de los catetos, basta con fijarse en que el cateto menor es igual a la diagonal del rectángulo formado por dos teselas de la cuadrícula, mientras que el cateto mayor, mide 3 veces esa misma diagonal. Por lo que la tangente del ángulo ,
valdrá 3.

Dado que los tres ángulos en conjunto forman un ángulo llano, parece ocioso insistir en que la proposición ha quedado suficientemente demostrada.