En el artículo del mes pasado presentamos el primer Teorema de Haga , el cual nos proporciona un método para dividir el lado de un cuadrado en tres partes iguales:

Si llevamos el vértice A a un punto genérico del lado BC, no necesariamente el punto medio, ¿habrá una relación sencilla entre BA y CG?, ¿tendrá dicha relación alguna aplicación práctica?

La respuesta a ambas preguntas es afirmativa. La aplicación práctica que se deduce es, nada menos, un método sencillo para dividir el lado del cuadrado en un número cualquiera de partes iguales mediante bisecciones sucesivas.

Pero vayamos paso a paso. En primer lugar, llamemos x a la distancia entre B y A e y a la distancia entre C y G en la construcción siguiente:

donde x es cualquier valor comprendido entre 0 y 1. El teorema de Haga propiamente dicho sería el caso particular $x=1/2$.

Según el mismo razonamiento aplicado a la demostración anterior, es $BA=x$, $BE+EA=1$, y el Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo BEA nos dice ahora que $(BE)^2 + x^2 = (1 - BE)^2$, de donde $BE=(1-x^2)/2 = (1-x)(1+x)/2$. De la semejanza entre los triángulos BEA y CGA deducimos ahora $CG /(1-x)= 2x/(1-x)(1+x)$, de donde $CG=2x/(1+x)$

La relación entre x e y es, por tanto, la siguente: $y = 2x/(1+x)$.

Buscando consecuencias de utilidad práctica, hemos de imponer a x la limitación de ser fácilmente constructible, lo que nos lleva de nuevo a pensar en bisecciones sucesivas (ver la primera parte del artículo sobre el Teorema de Haga). Fácilmente, podemos dividir el lado BC en un número de partes iguales que sea potencia de dos, y podemos llevar el vértice A a cualquiera de las marcas producidas en el proceso. Diremos formalmente que son fácilmente constructibles los números x de la forma x = n/2rdonde n y r son números naturales, siendo $n<2^r$.

Haciendo x = n/2r, y operando, resulta y = 2n/(2r + n). El resultado es muy interesante, porque el denominador, 2r+ n, con las restricciones enunciadas, es cualquier número natural (excluido el cero), y además la descomposición de cualquier número natural (excluido el cero) en la forma $z = 2^r + n$ es inmediata.

Podemos exponer ahora un método para dividir el lado del cuadrado en un número arbitrario de partes iguales. El procedimiento es el siguiente:

- Sea z el número de partes iguales en que queremos dividir el lado CD del cuadrado. (Por ejemplo, z = 19)

- Llamamos 2^r a la máxima potencia de dos (2, 4, 8, 16, 32......) menor que z. (En el ejemplo, 2^r = 16)

- Llamamos n a la diferencia entre z y 2^r, de forma que $z = 2^r + n$ (En el ejemplo, n=3)

- Dividimos, mediante bisecciones sucesivas, el lado BC en 2^r partes iguales.

- Llevamos el vértice A a la división número n, contando desde el vértice B

- Plegamos el cuadrado haciendo coincidir el vértice C con G, y deshacemos el pliegue anterior.

- El resultado es un rectángulo. Al lado CD le hemos "restado" un segmento de longitud n/z, y la nueva longitud es igual a $2^{r/z}$. Mediante bisecciones sucesivas, dividimos este segmento en 2^{r} partes iguales.

Es de interés destacar que esta construcción puede realizarse sin marcar el pliegue EF, y por tanto sin introducir pliegues indeseados en el interior del cuadrado. Al llevar el vértice A al punto correspondiente del lado BC, lo único que necesitamos es localizar el punto G, y para ello no es necesario aplanar completamente el papel. Localizar así el punto G no es difícil, pero mantenerlo en posición con los dedos y proseguir con el proceso requiere de cierta pericia por parte del plegador.

Referencias:

Hatori Koshiro “How to divide the side of Square Paper”

http://www.origami.gr.jp/People/CAGE_/divide/index-e.html