Escrito por Monte y Valle
Miércoles 01 de Marzo de 2006 01:00

En el artículo del pasado mes de agosto se analiza el doblado del pentágono de área máxima, describiendo el método exacto desarrollado en Dureisseix (1997). En el artículo original Dureisseix (1997) hace un estudio comparativo de distintos métodos para doblar pentágonos (donde se analizan más de 10 secuencias de doblado distintas). Como se indica en la Figura 1, podemos colocar el pentágono dentro de un cuadrado de muchas formas:

Figura 1: Distintas formas de colocar un pentágono en un cuadrado.

Se puede demostrar que el pentágono de área máxima corresponde a la solución de la derecha, o sea que el pentágono es simétrico respecto la diagonal. Curiosamente, solo existen dos métodos (Morassi, 1989; Dureisseix, 1997) resuelven el problema del pentágono de área máxima y además los dos lo hacen de forma matemáticamente exacta. Ninguno de los métodos aproximados analizados en Dureisseix (1997) se ocupa del pentágono de área máxima. En este artículo estudiamos secuencias de doblado que sean (1) sencillas de doblar (2) suficientemente aproximadas y (3) que dejen pocas marcas en el papel. La solución matemáticamente exacta es

Figura 2: Pentágono de área máxima inscrito en un cuadrado. Solución exacta con ***r=1/(2cos9 cos18)*** y ***c= cos9/(cos9+cos27)*** (no demostrado aquí).

Obtener soluciones exactas supone un reto matemático, pero muchas veces estas no son las más adecuadas en la práctica. Por ejemplo, cuando queremos doblar una figura sin dejar marcas en el papel.

Figura 3: Método exacto Dureisseix (1997). Rojo: pentágono máximo matemáticamente exacto.

El primer método que proponemos permite obtener una aproximación muy buena (error <1%) reduciendo el número de cicatrices que quedan en el papel al final del proceso:

En este método, cada paso esta perfectamente definido y da lugar, a efectos prácticos, a un pentágono regular (ver análisis de error en el Apéndice). Para simplificar el proceso, se puede prescindir de los pasos 4 a 7 y así eliminar algunas marcas del papel. El método simplificado es

Para completar el paso 5-6, hay que encontrar la posición del pliegue en valle de forma que en el paso 6 las líneas CA, DB y EF dentro del círculo coincidan en un mismo punto. En el paso 5, a modo indicativo, la línea CA queda ligeramente a la izquierda del punto medio indicado en la figura.

Si (1) en el paso 6 las líneas CA, DB y EF dentro del círculo coinciden en un mismo punto y (2) el punto C está exactamente en el vértice del paso 7, entonces en el paso 8 se comprueba que el papel queda dividido en 5 ángulos iguales (ver análisis en el Apéndice). Con la práctica, este método es algo más rápido de doblar que el anterior (introduciendo la secuencia iterativa 5-6) y también da lugar a un pentágono prácticamente regular (teóricamente el error es aún menor).

Se incluye en el Apéndice el análisis detallado de estos métodos. El análisis en sí puede ser un ejercicio útil para estudiantes con nociones básicas de geometría analítica y trigonometría. No es necesario conocer más que unas pocas definiciones básicas (como “distancia”, “recta”, “círculo”, “tangente”) y saber resolver problemas del tipo “encontrar las intersecciones de un círculo con una recta”.

Usando la papiroflexia, se puede desarrollar el análisis matemático (ecuaciones no muy atractivas para muchos) en paralelo con el doblado de un papel (con suerte, algo más entretenido o, al menos, distinto). Observando las marcas de los pliegues en el papel se pueden comprobar resultados en la práctica “visualizando” la geometría y con un poco de suerte ayudando (?) a entender (?) el significado de las ecuaciones.

El análisis del primer método en el Apéndice es de nivel preuniversitario y cualquiera que haya leído hasta aquí lo comprenderá sin ninguna dificultad. El segundo método es algo más duro de digerir, ya que requiere resolver ecuaciones no lineales (que, en este caso, necesita la ayuda de un ordenador para obtener el resultado final, a no ser que uno tenga ganas de ponerse a hacer iteraciones con calculadora o hasta "a boli", que haberlos haylos ;-).

Referencias:

Morassi (1989) "The elusive pentagon" en: Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, editor Huzita, Ferrera 1989

Dureisseix, (1997) "Searching for optimal polygon, application to the pentagon Case". Septiembre 1997, nota no publicada, disponible en:
http://origami.kvi.nl/articles/polye.ps