Escrito por Alfredo Pérez Jiménez
Sábado 01 de Enero de 2005 01:00

Demostrar que se verifica la igualdad: arctg 1 + arct 2 + arct 3 = π

Utilizaremos para ello:

* 1 papel cuadrado
* Conocimientos básicos de Papiroflexia
* Conocimientos básicos de Trigonometría
* Conocimientos de Geometría

Para resolver el problema, comenzaremos por realizar los pliegues que se indican en las siguientes figuras:

Figura 1

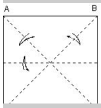


Figura 2

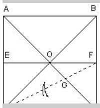


Figura 3

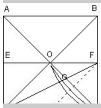


Figura 4

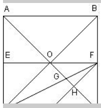
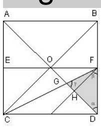


Figura 5



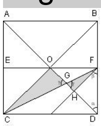
Y, a partir de aquí, utilizaremos el triángulo FGD que se ha formado, hallando las tangentes de sus ángulos α, β, γ.

$tg\ \alpha$ = AB/DB = lado/lado = 1

$tg\ \beta$ = CD/FD = lado/(lado/2) = 2

$tg\ \gamma$ =FH/GH (seguir leyendo)

Figura 6



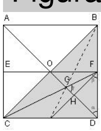
En la figura (6), se puede observar que los triángulos FHG y COG son semejantes, ya que ambos son rectángulos y tienen el ángulo γ igual por ser opuestos por el vértice. De aquí, se puede escribir:

$tg\ \gamma$ = FH/GH = CO/OG

Y como CO es igual a DO, se puede también expresar:

$tg\ \gamma$ =DO/OG

Figura 7



Por otro lado, en la figura (7) observar que G es el baricentro del triángulo CDB, es decir, el punto en el que se cortan sus medianas: CF, DO y la dibujada a trazos.

Una de las propiedades de este punto, centro de gravedad del triángulo, es que divide a cada una de las medianas en 2 segmentos que están en proporción 2:1, es decir, en la que nos interesa:.

DG = 2 x GO

y de aquí:

DO = DG +GO =3 x GO

La demostración de esta propiedad, se puede ver en cualquier tratado de Geometría o, preferentemente para los Papiroflectas, en el fenomenal libro:

"MATEMÁTICAS Y PAPIROFLEXIA" de Jesús de la Peña Hernández

editado por la Asociación Española de Papiroflexia, ISBN 84 - 607 - 2169 - 8

Sustituyendo este valor en la expresión que teníamos esperando, podemos escribir:

tg γ
= DO/OG= 3

Aplicando las funciones inversas, podemos escribir el primer término de la igualdad que se pretende demostrar, de la siguiente forma:

arctg 1 +arctg 2 +arctg 3 = $\alpha+\beta+\gamma$

Por otro lado, en todo triángulo, se verifica que la suma de sus tres ángulos es igual a un ángulo llano, es decir, de 180º ó π radianes. Ver las siguientes figuras para comprobarlo "papiroflécticamente".

Figura 8

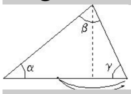


Figura 9

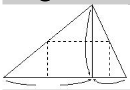
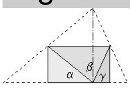


Figura 10



$\alpha+\beta+\gamma=\pi$

que es el segundo término de la igualdad

O sea que, finalmente, podemos escribir:

arctg + arctg 2 + arctg 3 = π

C.q.d

Vamos a continuación a resolver el problema prescindiendo de recursos a la Geometría, sustituyéndolos por un poco más de Papiroflexia.

Tomamos un papel cuadrado y efectuamos ordenadamente los pliegues que se indican en las siguientes figuras:

Figura 11

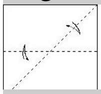


Figura 12

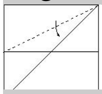


Figura 13

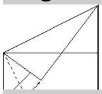


Figura 14

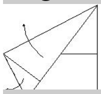


Figura 15

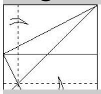


Figura 16

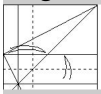


Figura 17

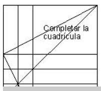
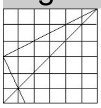
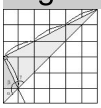


Figura 18



Observemos ahora en esta última figura los 3 triángulos que se distinguen por distintas tonalidades de gris y centremos la atención en los ángulos α, β, γ, cada uno de ellos perteneciente a uno de los triángulos.

Figura 19



Los 3 triángulos son rectángulos y, observando la cuadrícula, resultan evidentes los valores de las tangentes de los ángulos α y β:

En el ángulo α los catetos son iguales, por lo que la tangente valdrá 1 y; en el ángulo β, uno de los catetos es el doble del otro, por lo que la tangente valdrá 2.

En el otro triángulo, es decir el que tiene el ángulo γ, para evaluar las dimensiones de los catetos, basta con fijarse en que el cateto menor es igual a la diagonal del rectángulo formado por dos teselas de la cuadrícula, mientras que el cateto mayor, mide 3 veces esa misma diagonal. Por lo que la tangente del ángulo γ, valdrá 3.

Dado que los tres ángulos en conjunto forman un ángulo llano, parece ocioso insistir en que la proposición ha quedado suficientemente demostrada.