

19. Doblando Pentágonos -Apéndices-

Escrito por Monte y Valle

Sábado 01 de Abril de 2006 01:00

Apéndice I

Posición del centro del pentágono: punto C

Tomando como origen de coordenadas el vértice inferior izquierdo, las esquinas del cuadrado tienen coordenadas $(x,y)=(0,0)$ $(0,1)$ $(1,1)$ y $(1,0)$. Todos los puntos de la diagonal tienen coordenadas de la forma $x=y$, por ejemplo, la esquina inferior izquierda es $(0,0)$ y la superior derecha es $(1,1)$. El centro del pentágono está situado sobre la diagonal y por tanto tiene coordenadas $x=c$, $y=c$. El punto (c,c) que buscamos equidista de los puntos $(0.5,0)$ y $(0.75,1)$, por construcción del paso 3.

La distancia d entre dos puntos (x_1,y_1) (x_2,y_2) es . Así pues, si la distancia de (c,c) a $(0.5,0)$ es igual a la distancia de (c,c) a $(0.75,1)$, tenemos la ecuación

de donde podemos obtener c

$$(c-0.5)^2 + c^2 = (c-0.75)^2 + (c-1)^2 ;$$

$$c^2 + 0.5^2 - c + c^2 = c^2 + 0.75^2 - 1.5c + c^2 + 1 - 2c ;$$

Las coordenadas de C en un cuadrado unidad son $(x,y)=(c,c)$ con $c = 21/40 = 0.525$. El centro del pentágono exacto se encuentra en $c = \cos 9 / (\cos 27 + \cos 9) = 0,525731112....$ el error cometido es de 0.00139 (0.139%). En un papel de 20 cm de lado el punto C esta a 0,207 milímetros del centro exacto (inapreciable a la vista).

19. Doblando Pentágonos -Apéndices-

Escrito por Monte y Valle

Sábado 01 de Abril de 2006 01:00

Para completar el pentágono, en el paso 4 doblamos la diagonal en $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$ partes, obteniendo una distancia de . En los pasos 5-9 usamos esta distancia como aproximación al radio del pentágono $r = 1 / (2 \cos 9 \cos 18) = 0.53228442$.

Al trasladar el punto D sobre D' en el paso 9, obtenemos un vértice del pentágono. El punto D' , tiene coordenadas (x,1). Para encontrar x imponemos que D' pertenezca a una circunferencia de centro (c,c) y radio r = . Los puntos de una circunferencia de radio r y centro (x_c,y_c) satisfacen la ecuación (x-x

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2} \\ &) \\ & \frac{c}{2} \\ & + (y - \frac{c}{2}) \\ &) \\ & \frac{c}{2} \\ & = r^2 \end{aligned}$$

. Dado que el centro del círculo está en (c,c) con $c = 21/40$ podemos obtener x (posición de D') tomando $y = 1$, x

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2} \\ & = y \\ & \frac{c}{2} \\ & = c \text{ y } r = \\ & \text{obteniendo la ecuación } (x - \frac{c}{2}) \\ & \frac{c}{2} \\ & + (1 - \frac{c}{2}) \\ & \frac{c}{2} \\ & = r^2 \end{aligned}$$

de donde sale

De las dos soluciones, la que buscamos es $x = 0.289150$. La solución matemáticamente exacta se puede obtener resolviendo la misma ecuación

19. Doblando Pentágonos -Apéndices-

Escrito por Monte y Valle

Sábado 01 de Abril de 2006 01:00

con $c = \cos 9 / (\cos 27 + \cos 9)$ y $r = 1 / (2 \cos 9 \cos 18)$. En un papel de 20 cm, el punto D' se encuentra 0.35 mm a la derecha de la posición exacta (casi inapreciable a la vista, se suele tomar 0,2 mm como límite de la precisión visual).

En el paso 9 obtenemos un ángulo D'CD, que tal como indica la figura es de $45^\circ + \alpha$,

y podemos calcular α a partir de la tangente, ya que el triángulo sombreado es rectángulo y por tanto

.

Antes hemos encontrado la relación α , podemos expresar el ángulo α como

,

y por tanto el ángulo D'CD que buscamos se obtiene con $r = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{21}{40}$

En los pasos 10-11 bisecamos el ángulo D'CD dos veces

11

En el paso 12 obtenemos dos ángulos prácticamente iguales

19. Doblando Pentágonos -Apéndices-

Escrito por Monte y Valle

Sábado 01 de Abril de 2006 01:00

El error, de 0.65° , es aproximadamente $1/10$ del ángulo que separa los segundos de un reloj de los de antes. En un papel de 1 m^2 la distancia entre los bordes del papel en el paso 12 sería de aproximadamente 6 mm.

Para encontrar la posición del otro vértice del pentágono, vamos a los pasos 10, 11 donde bisecamos dos veces

El triángulo sombreado es rectángulo y uno de sus ángulos es θ y las longitudes de los catetos adyacente y opuesto son c y $c \cdot \tan \theta$ respectivamente. A partir de la definición de tangente

podemos calcular $\tan \theta$ y

(El valor teóricamente exacto es, $\tan \theta = \frac{1}{10}$)

Apéndice II

19. Doblando Pentágonos -Apéndices-

Escrito por Monte y Valle
Sábado 01 de Abril de 2006 01:00

Definiendo la posición de los pliegues con los ángulos α y β como en la figura podemos expresar a en función de α y β y obtenemos las ecuaciones

$$a = (1 - c) \tan(2 - \pi/4) \text{ y } a = c - \tan(2\beta - \pi/2) (1 - c - c / \tan(3\pi/4 - \beta))$$

Imponiendo que el borde del papel coincida con la posición del pliegue tenemos que $\alpha = \pi - 2\beta$. Suponiendo el punto $c = \cos 9^\circ / (\cos 27^\circ + \cos 9^\circ)$ se obtendrían los ángulos exactos $\alpha = \pi/10$ y

β

$$\alpha = \pi/5 \text{ (}$$
$$= 36^\circ \text{ y}$$

β

$= 72^\circ)$. Con el valor aproximado de $c = 21/40$, obtenemos la ecuación $f(\beta$

β

)

$$f(\beta) = 0.525 - \tan(2\beta - \pi/2) (0.475 - 0.525 / \tan(3\pi/4 - \beta)) - (0.475) \tan(7\pi/4 - 4\beta).$$

Para que sea posible completar el paso 3 está claro que la solución $f(\beta) = 0$ tiene que encontrarse en valores de $0 <$

$< \pi/4$, o sea $3\pi/8 <$

β

$< \pi/2$ el ángulo

β

tiene que estar entre 67° y 90° . Dibujando $f(\beta$

β

) podemos ver que tiene una raíz muy cercana a 72° .

19. Doblando Pentágonos -Apéndices-

Escrito por Monte y Valle

Sábado 01 de Abril de 2006 01:00

Resolviendo $f(\beta)=0$ numéricamente se encuentra $\beta=72,07164^\circ$ (1,257887 radianes). El ángulo obtenido

$=\pi-2$

β

es de $35,85672^\circ$.

Ahora, como antes, busquemos

$x = c - (1-c)\tan(2-45) = 0.285960$. La solución matemáticamente exacta la hemos obtenido en el Apéndice I con $x = 0.287398$.

Para encontrar y usamos el mismo procedimiento que en el Apéndice I

podemos calcular y

(El valor teóricamente exacto es,)