1. El infinito

Con frecuencia reflexiono sobre las similitudes y las diferencias entre las matemáticas y la música. Creo que una de las diferencias más notables es la presencia del infinito. El infinito está omnipresente en las matemáticas. Todo se puede llevar a extremos infinitos. El infinito lo encontramos en los números naturales, en los enteros, en los racionales; por supuesto, en los reales y en los complejos. Cualquier espacio de funciones va a ser infinito así como muchas estructuras discretas. Por ejemplo, en computación se estudia la complejidad de los algoritmos en función del tamaño n de la entrada (el número de datos de entrada). Esto podría parecer que es finito y, aunque lo es, es necesario estudiar la complejidad cuando n tiende a infinito, la llamada complejidad asintótica. Más ejemplos de la presencia del infinito en las matemáticas se pueden encontrar fácilmente.

Así, pues, el infinito es ubicuo en las matemáticas. ¿Y en la música? Parece que no, que la música tiene una naturaleza esencialmente finita. Para empezar, el universo de frecuencias es finito. El oído humano puede captar frecuencias entre 20 Hz y 20.000 Hz. Fuera de este rango la música, sencillamente, no ocurre. En cuanto al ritmo, algo similar ocurre. Las duraciones que podemos percibir son finitas, aunque es asombroso que el oído humano, especialmente el de un músico experto, pueda detectar diferencias en ritmos del orden de milisegundos. La memoria melódica es corta también así como la armónica. Véanse [Deu07 , Deu12 , Ben06] para más información sobre los mecanismos perceptuales de la música en humanos.

El ser humano parece ser en su vertiente perceptual un ser finito, de capacidad perceptual finita, pero en cambio es capaz de trabajar y concebir el infinito cuando contempla este desde un punto de vista matemático, como abstracción o como concepto. Creo que esta es una diferencia fundamental entre las matemáticas y la música.

2. Belleza

Hay algo que une a las matemáticas y a la música: su capacidad para generar belleza. Ambas disciplinas producen bellezas de diversas formas, que algunas veces son coincidentes y otras claramente no. Una de las principales formas en las matemáticas viene dada por la belleza que produce el entendimiento. Cuando un problema matemático se resuelve con claridad y profundidad, genera belleza. La prueba de Euclides de que hay infinitos números primos es bella sin lugar a discusión. Hay una estética, un sentido de la belleza, en la producción de resultados matemáticos. Con frecuencia los matemáticos hablamos de la belleza y la elegancia de una prueba, que es a la vez una combinación de la originalidad de las ideas y la elocuencia de la forma. En la música, la belleza viene dada por la propia estructura de la

música y por su efecto cognitivo, perceptual, emocional y cultural.

3. La belleza de las matemáticas y la música - Charla TED de Marcus Miller

En la columna de hoy queremos glosar la charla de Marcus Miller titulada *The beauty of mathematics and music*
(La belleza de las matemáticas y la música) y que está disponible más abajo. La razón de nuestro interés es que habla de los temas de esta columna: las matemáticas, la música, el infinito y la belleza. Marcus Miller es músico talentoso, virtuoso del saxofón, que empezó a tocar a los nueve años de edad y a los trece ya estaba en el circuito profesional del jazz. Además, de eso fue a la Universidad de Harvard donde obtuvo un grado en matemáticas. Véase su página web [
Mil22
] para más información sobre su fascinante biografía.

Figura 1: The beauty of mathematics and music - Marcus Miller

En los primeros minutos, Miller dice lo siguiente (en inglés original y luego mi traducción):

Hello I'm here today to talk to you about beauty in music and in mathematics. However, in order to get to the big takeaway, we are going to have to take two cold showers together, that is to say, we are going to have to address two sticking points that typically arise in this discussion. First cold shower is that most people are terrified of mathematics. For many of you at some point someone pointed a finger at you and told you that you weren't smart enough to understand it or perhaps that you didn't really need math in the real world so you were fine not knowing it. Often, that person was you.

(Hola, estoy aquí hoy para hablaros sobre la belleza en la música y las matemáticas. Sin embargo, antes de llegar a esa gran cuestión, vamos a tener que darnos dos duchas de agua fría juntos; es decir, vamos a tener que superar dos escollos que típicamente aparecen en esta discusión. La primera ducha de agua fría es que la mayor parte de la gente se horroriza ante las matemáticas. Para muchos de vosotros en algún momento alguien os señaló con el dedo y os dijo que no erais los suficientemente listos para entenderlas o quizás que en realidad no necesitabais matemáticas en el mundo real de modo que estaba bien si no las sabíais. Con frecuencia, esa persona eras tú.)

Con esta pequeña introducción, Marcus Miller trata el problema de la autoestima matemática y de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, esta vez no señala como culpables a los profesores (que con frecuencia lo son) o al sistema (que siempre lo es); no, esta vez señala al propio aprendiente. Es este un tema importante y fascinante a la vez, pero la charla no va por ahí. Menciona esto como impedimento para apreciar la belleza en las matemáticas.

En la parte central de la charla, Marcus Miller cuenta de una manera divulgativa e instructiva algunos hechos paradójicos sobre el infinito. Cuando estamos tratando con conjuntos finitos, las cosas son lo que esperamos. Por ejemplo, si A es un subconjunto de un conjunto finito B y A es distinto a B, entonces claramente el número de elementos (el cardinal) de A es menor que el de B. ¡Esto no pasa con los conjuntos infinitos! Miller en su charla prueba que:

- El conjunto de los números pares tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números naturales;
- El conjunto de los números naturales tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números enteros;
- El conjunto de los números naturales tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números racionales;
- El conjunto de los números reales tiene mayor cardinal que el conjunto de los números naturales.

Entre medias de estas pruebas toca música llena de belleza con su saxofón (minuto 10:33, por ejemplo).

En el minuto 12 y siguientes Miller hace un elogio de la imaginación y su fuerza como motor de la belleza. De hecho, tras explicar los hechos sobre el infinito pregunta al público cómo se sienten al conocer esos hechos.

Más tarde, enumera unos cuantos campos científicos que tienen relación fuerte y directa con las matemáticas (desde teoría de la señal a matemática discreta). De hecho, llega a mencionar ideas matemáticas que han servido para el análisis musical e ideas musicales que han servido

de germen a la investigación matemática. Sin embargo, rechaza el lugar común de que las matemáticas son iguales a la música (en el minuto 13:22; yo lo rechazo igualmente). Continúa desmitificando varias de estas relaciones exageradas entre ambos campos, en particular, el llamado efecto Mozart. Miller afirma que “parece que la relación entre el conocimiento matemático y musical es interesante, pero no particularmente fundacional”.

Es realmente interesante la posición que mantiene en los minutos15:30 y siguientes sobre la conexión entre matemáticas y música. Mantiene que uno de los puntos de conexión entre ambas disciplinas es el placer que supone su aprendizaje. No puedo estar mas de acuerdo con Marcus Miller.

Bibliografía

[Ben06] D. Benson. *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press, 2006.

[Deu07] Diana Deutsch. *Music perception*. Frontiers In Bioscience, 12:4473–4482, 2007.

[Deu12] Diana Deutsch. *In Diana Deutsch, editor, The Psychology of Music (Cognition and Perception)* , pages 183–248. Academy Press, San Diego, 2012.

[Mil22] Marcus Miller. *Image with Marcus Miller*. https://imaginewithmarcus.com/ , accedido en marzo de 2022.