Una vibración misteriosa

El curioso comportamiento de los instrumentos musicales generó dos de los problemas matemáticos que a lo largo de la historia despertaron un interés excepcional dando lugar a una de las controversias más encendidas y fructíferas en la historia de las matemáticas. Veamos un resumen de la fascinante investigación que consiguió desentrañar el misterio.

Pitágoras

Desde los tiempos de Pitágoras se conoce, empíricamente, que la altura del sonido fundamental percibido al pulsar una cuerda con extremos fijos depende de la longitud de la cuerda, resultando la frecuencia inversamente proporcional a la longitud. (Una dependencia similar se observa respecto a la longitud de los tubos en los instrumentos de viento, problema que analizaremos en otra ocasión.)

Mersenne (sin sus primos)

Marin Mersenne en su obra “Armonía Universal” (1636) describe con precisión, pero sin demostrarla, la relación entre la frecuencia del sonido fundamental de una cuerda y su longitud, tensión y densidad, algo que también consigue, independientemente, Galileo. La obra de Mersenne se convirtió en fuente teórica de la música del siglo XVII, sobre todo en Francia.

Dos problemas peliagudos

Hasta el siglo XVIII, la matemática no se encuentra lo suficientemente avanzada como para abordar dos problemas intrigantes:

1. El *problema de la cuerda vibrante*: Determinar el movimiento de una cuerda tensa al pulsarla.

2. Demostrar o rebatir la relación de Mersenne: Dada la longitud y el peso de una cuerda, así como la fuerza que la tensa, encontrar el tiempo de vibración.

Brook Taylor

En 1715, Taylor encuentra que el movimiento de un punto arbitrario de la cuerda es el de un péndulo simple y determina su tiempo de vibración (*periodo*). Obtiene en su lenguaje propio, un tanto distinto del nuestro, la ecuación diferencial de la cuerda vibrante, es decir la ecuación unidimensional de ondas, y a partir de ella halla *una* solución: la forma de la curva que toma la cuerda en un instante dado es sinusoidal.

Parciales armónicos

Para entender el problema de la cuerda vibrante es necesaria la observación de su comportamiento. El sonido fundamental no es el único que emite la cuerda al vibrar. Simultáneamente, se producen otros sonidos (*parciales*) de menor intensidad. La distribución e intensidad de estos parciales (*timbre*) diferencian instrumentos o voces que ejecuten la misma nota.

En el caso de los instrumentos de cuerda y viento, las frecuencias de estos parciales son múltiplos de la frecuencia fundamental **F**. De estos múltiplos (*armónicos*), el primero es la propia frecuencia fundamental, el segundo el doble (2**F**), el tercer armónico el triple (3**F**), etc.

¿Por qué múltiplos exactos?

Al pulsar la cuerda se produce una onda transversal viajera, como una ola, que recorre la cuerda hasta los extremos, con una cierta *amplitud* (separación máxima respecto del punto de reposo). Allí, incapaz de continuar su propagación, se refleja. Esto ocasiona que dos ondas reflejadas en los extremos viajen una contra otra hasta superponerse en la cuerda.

La suma de estas dos ondas reflejadas es una onda longitudinal llamada onda *estacionaria*. Este nombre se debe a que, al superponerse, las ondas reflejadas parecen dejar de propagarse, convirtiéndose en una oscilación de la cuerda. Esta oscilación es la que se propagará al aire.

Cada onda reflejada habrá recorrido dos veces la longitud de la cuerda hasta encontrarse de nuevo en el extremo de partida. Así que la longitud de la onda estacionaria es el doble de la longitud de la cuerda. Ahora bien, al superponerse las dos ondas transversales para formar la onda estacionaria, podrán aparecer puntos (*vientres*) en donde las dos ondas coincidan en fase, así que la amplitud será el doble. También pueden aparecer puntos (*nodos*) en donde las ondas se encuentren desfasadas 180º, así que en ellos la amplitud será nula (no se mueven). Estos nodos actúan como extremos fijos de partes de la cuerda, por lo que la vibración de estas partes emitirá un sonido más agudo (con mayor frecuencia).

Para que los nodos aparezcan, tienen que estar distribuidos por igual a lo largo de la cuerda. Por lo tanto, las longitudes de esos trozos de cuerda tienen que ser divisores de la longitud total de la cuerda. Como la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud, se deduce que los nuevos sonidos tienen que tener como frecuencia un múltiplo de la frecuencia fundamental, es decir, tienen que ser armónicos .

El problema de la cuerda vibrante

Ahora bien, lo curioso es que la cuerda no varía alternativamente entre un armónico y otro, sino que emite todos los sonidos armónicos al mismo tiempo. He aquí el quid de la cuestión, causa de intriga y discusión entre los matemáticos: ¿cómo se las arregla la cuerda para vibrar de varias formas distintas *a la vez*?

D’Alembert, Daniel Bernoulli y Euler

El problema de la cuerda vibrante promueve la intensa búsqueda de una explicación. En esta búsqueda, d'Alembert muestra la solución general de la ecuación de onda como suma de dos funciones *generales* y periódicas.

Inmediatamente, surge una fuerte controversia entre la solución establecida por Taylor y la nueva de d'Alembert: ¿la solución es general o sólo admite soluciones sinusoidales? Para echar más leña al fuego se meten por medio otros dos genios: Euler y Daniel Bernoulli, que no hacen sino aumentar la consciencia de la tremenda confusión que todos sentían.

En medio de esta polémica, Bernoulli encuentra la ecuación de cada armónico y, en consecuencia, demuestra la relación que ya había encontrado empíricamente Mersenne entre frecuencia, longitud de la cuerda, tensión y densidad. El segundo de los problemas había sido resuelto
.

Otra consecuencia de la ecuación de Bernoulli es que la envolvente de las posiciones de la cuerda son dos parábolas .

El problema de la cuerda vibrante se resiste

La causa de la confusión entre estos genios estriba en que los matemáticos de esta época concebían una función a modo de polinomio, es decir, lo que hoy llamamos *función analítica*. ¡Pero un polinomio queda perfectamente determinado para todos los valores una vez que se conocen sus valores en un intervalo por pequeño que sea!

Para ellos, el estado de vibración de una parte de la cuerda debería determinar la vibración de la cuerda entera.

Fourier

Fourier fue discípulo de Lagrange, Monge y Laplace. En su Teoría analítica del calor recurre a series trigonométricas para modelizar ciertos comportamientos evolutivos. Estas series permiten resolver, por fin, el problema de la cuerda vibrante, al servir de puente entre las sinusoidales de Taylor y las funciones generales de d'Alembert.

La gran diferencia entre la serie trigonométrica de Fourier y otras series, como la serie de potencias de Taylor, reside en que estas últimas representan una función analítica: toda ella está determinada por su comportamiento en cualquier pequeño intervalo. La serie de Fourier puede representar a una función mucho más general (aquí un ejemplo) y tiene un carácter local: el valor de la serie en un entorno no contiene ninguna información sobre el valor de la serie en otro entorno disjunto del anterior.

Solución al problema de la cuerda vibrante

Resulta, pues, que la cuerda no vibra de ninguno de los modos que vimos, sino de una suma ponderada de ellos. Los coeficientes de la serie de Fourier varían según los distintos armónicos (y por lo tanto, según el timbre del instrumento). En el caso de la cuerda, también varían según la posición del punto de pulsación . Ante un movimiento tan complejo, no es de extrañar la perplejidad causada en los matemáticos.

Algo va mal

Aunque el problema de la cuerda vibrante parecía resuelto, el modo (digamos "alegre") en que Fourier empleaba sus series trigonométricas provocó la crítica, más que razonable, de otros tres genios matemáticos: Lagrange, Laplace y Abel . El problema residía en que Fourier manejaba las series infinitas sin establecer previamente su convergencia. Este proceder puede conducir a resultados absolutamente erróneos.

Así las cosas, el problema de la cuerda vibrante parecía resuelto *en la práctica*, pero sin un fundamento *teórico* consistente.

Un año histórico

Por fin, en 1829, Dirichlet, discípulo de Fourier, establece las condiciones de convergencia de las series de Fourier. Esto marcó un hito en la historia de las matemáticas.

El análisis armónico

El desarrollo del análisis matemático del siglo XIX tiene como hilo conductor el deseo de proporcionar respuestas satisfactorias a las muchas preguntas originadas en el estudio de la cuerda vibrante. Durante todo ese siglo, y hasta hoy, el análisis armónico empieza a aplicarse a una amplia variedad de fenómenos , desde la naturaleza de la luz o la estructura del átomo hasta los ordenadores, a la vez que impulsa la investigación sobre los fundamentos de las matemáticas. Por último, la “Teoría de las cuerdas”, actualmente la mejor candidata para unificar las fuerzas fundamentales, se sirve de la analogía con las cuerdas vibrantes para definir su modelo físico del comportamiento de la materia.