Poco a poco nos vamos adentrando en la rutina de un nuevo curso escolar (que no tiene porqué ser vista como algo peyorativo, para eso, entre otras opciones, estamos nosotros aquí). Mientras esperamos impacientes el estreno de ***Ágora****, para abrir boca, veamos cómo han ido las tareas del verano.*

Recordemos que teníamos cuestiones (de cine y de matemáticas) y fotografías relacionadas de algún modo con esas cuestiones, que también teníamos que explicar. Seguimos el orden en que se presentaron.

Foto 1.- Veíamos una montaña nevada que poco nos dice de momento. Por su aspecto da la impresión de estar en la cordillera del Himalaya, aunque de momento es una mera conjetura.

Cuestiones 1ª y 2ª.- Probablemente sean las más difíciles de resolver de todas las que se proponen (hay que empezar jugando fuerte). Sin embargo la introducción que se hace da la pista. Se comentaba que en diferentes lugares del mundo van apareciendo fotografías o fragmentos de películas que se consideraban perdidos para siempre (recientemente ha pasado con *Metrópolis*, con la que nos ocupa, y con otras muchas). Habitualmente esos materiales se encuentran ocultos en almacenes, trasteros, sótanos, lugares nada aptos para la conservación de unos elementos tan perecederos. Por eso, cuando se trata de verlos, aparecen con rayas, partes descoloridas o completamente desaparecidas, etc. (en adelante a este tipo de "impurezas" la denominaremos como se las conoce científicamente: ***ruido*** de la imagen), y con las técnicas actuales hay que tratar de restaurarlos.

Para ello se emplean procedimientos de realce de imagen, basadas en operaciones matemáticas que mecánicamente se realizan a través del ordenador (implementadas en software; uno de los programas comerciales más conocidos popularmente es *Photoshop*, aunque hay muchos, y otros que el técnico restaurador se programa él mismo con lo que quiera conseguir). Según el ruido que se tenga, se aplican unos métodos u otros. Así se puede desear reducir el ruido de fondo, eliminando la textura que tenga dicho fondo resaltando los objetos que estén presentes. En otras ocasiones se quiere ajustar la intensidad y/o el contraste. En la actualidad, se trabaja con imágenes digitales. Esto significa que una imagen no es más que un conjunto (una matriz) de números que guardan la información de cada píxel de la imagen (color, intensidad, contraste, etc.). Y sobre los números se pueden efectuar todas las operaciones que se deseen.

Una de las operaciones más empleadas en el tratamiento de imágenes es el paso de un ***filtro***. Hay diferentes tipos (de paso bajo, de paso alto, de mediana, adaptativos, etc.) dependiendo de lo que se quiera conseguir. Aunque pueda parecer complicado, lo que se hace es muy sencillo: a cada píxel se le cambia su valor haciendo una operación sencilla (suma, resta, mediana, varianza, etc.) de acuerdo con los valores de los píxeles de alrededor. A veces se toman sólo los píxeles a izquierda, derecha, arriba, abajo y los de las diagonales (esto se llama utilizar una ***máscara*** 3x3) cada uno afectado por un valor adecuado (un ***peso***); en otras ocasiones se toman máscaras 5x5, 7x7, etc., siempre con valores impares. Y eso se ejecuta sobre cada píxel de la imagen. El resultado es una nueva imagen, la imagen filtrada.

En la actualidad se siguen estudiando nuevos tipos de filtros, tratando de mejorar más estas técnicas. Algunas de ellas utilizan ideas de la Física, como el que nos ocupa. Se parte de la idea de la ***difusión de los gases***. Este proceso se describe mediante una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = div(c(\mathbf{x}, t)\, \nabla I(\mathbf{x}, t))$$

donde I(**x**) es la función de intensidad de la imagen, **x** es un vector que almacena la posición de cada píxel de la imagen, t es el tiempo, I(**x**, t) es por tanto la evolución de la imagen con el tiempo, c(**x**, t) es una función llamada ***coeficiente de difusión***, y esos símbolos tan extraños div y ∇ son unos operadores matemáticos llamados ***divergencia*** y ***gradiente***, respectivamente. Los procesos en los que c(x, t) es constante se llaman procesos *isotrópicos* y en caso contrario, *anisotrópicos*.

La fórmula que aparece en la cuestión es un tipo particular de difusión anisotrópica.

$$I_{i,j}^{t+\Delta t} = I_{i,j}^{t} + \frac{\Delta t}{|\eta_{i,j}|}\operatorname{div}\left[c_1(C_{i,j,t})\nabla I_{i,j}^{t}\right]$$

Aparecen en la I subíndices i, j y superíndices t. Eso se llama una ***discretización*** de la fórmula que no es más que tomar un conjunto finito (aunque grande; todo lo hace el ordenador así que ese valor puede ser enorme) de valores en la imagen, y para cada uno se aplica la ecuación. Es un tipo concreto de filtro llamado SRAD (*Speckle Reducing Anisotropic Diffusion*) que yo he castellanizado como DARS (*Difusión Anisotrópica de Reducción del Speckle*). El *Speckle* no tiene una traducción exacta al castellano. Es un tipo de ruido que afecta a las imágenes, sobre todo a aquellas captadas mediante ultrasonidos, utilizadas habitualmente en medicina para hacer radiografías. Estas técnicas por tanto se utilizan sobre todo en imágenes médicas, más que en la de restauración de fotografías o de películas.

Entre las respuestas recibidas, también ha surgido la de *Digital Adaptative Recording System* y *Digital Analog Re-mastering System*, que no dudo que existan pero que no tiene relación con la fórmula de la ecuación del calor de la primera cuestión.

Seguro que pensáis que me he pasado tres pueblos pero con las facilidades de internet hay que liar un poco las cosas. Además sólo son veinte puntillos de nada.

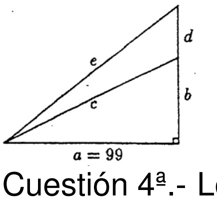
Foto 2.- Claramente es Paris Hilton. ¿Qué tendrá que ver con el tema que nos ocupa? ¿Tendrá la película lugar en París? ¿Estará protagonizada por George Sanders o Zsa Zsa Gabor, antepasados cinematográficos de la Hilton? Sigamos leyendo….

Cuestión 3ª.- Primera cuestión matemática. El cine comenzó en mil ochocientos noventa y tantos, así que el año de estreno sólo puede ser 189x, 19yz o 200t (donde x, y, z, t son dígitos desconocidos). Se dice que "*la suma de los dígitos del año del estreno de la película (y curiosamente también la suma de los dígitos del año del estreno de un remake posterior) es el número del siglo al que esa fecha correspond*e". Si fuera la primera opción, 1 + 8 + 9 + x = 19, con lo que x = 1, pero en ese año el cine aún no existía, o sea que descartado. Tampoco 2 + t = 21 es factible, así que será 1 + 9 + y + z = 20, con lo que y + z = 10. Es decir que nos restringimos a los años 1919, 1991, 1928, 1982, 1937, 1973, 1946, 1964 o 1955. Por otra parte, "*la diferencia entre ambas fechas* (se refiere a la película y su remake) *es un cuadrado perfecto, y alguna de ellas es un número primo*". No tenemos más que probar con dichas cantidades. Sin embargo, cuando calculamos las diferencias entre todas esas cantidades, nos damos cuenta de que hay trece posibilidades, que afectan a todos ellos, por lo que a priori no podemos descartar ninguno. Ahora bien se dice que al menos uno de los dos años que nos interesan es un número primo. Sólo el 1973 es primo, con lo que las posibilidades se reducen a tres:

1973 - 1937 = 36, 1982 - 1973 = 9, 1973 - 1964 = 9.

Si hacemos caso al comentario de que la película principal que buscamos es de "*hace mucho, mucho tiempo*", en las citadas la fecha más antigua es 1937, con lo que las fechas deberían ser 1937 y el remake de 1973. Pero lo confirmaremos o refutaremos más adelante,….

A continuación se dan muchos datos sobre la película: el argumento, que ganó dos Oscars@, que su remake es una de las peores películas de la historia, se detallan algunos párrafos de la novela, aparece una nueva foto (la 3ª) de una idílica montaña y el nombre en chino del desfiladero que atraviesan, y un problema.



Cuestión 4ª.- Los protagonistas se encuentran en un punto a distancia 99 Brahms (unidad inventada de la que podemos olvidarnos) de la base de la montaña. Llamemos *b* a la altura a la que se encuentra el monasterio desde esa base de la montaña, *c* a la hipotenusa del primer triángulo pitagórico, *d* a la distancia del monasterio a la cima de la montaña, y *e* a la hipotenusa del segundo triángulo pitagórico, tal y como aparece en la imagen adjunta. Después se dice que *la distancia que nos falta por recorrer* (99 + *b*) *es idéntica a la que recorrería desde aquí un ave que volara hasta la cima y luego bajara al monasterio* (*e* + *d*). Es decir, 99 + *b* = *e* + *d*. Del teorema de Pitágoras y de esta relación, se obtiene que

$$99^2 + (b + d)^2 = e^2 = (99 + b - d)^2 = 99^2 + 2 \times 99\,(b - d) + (b - d)^2$$

Sin demasiadas dificultades, desarrollando los binomios, simplificando y despejando *d,* se obtiene:

$$d = \frac{99b}{2b + 99}$$

Se trataría ahora de encontrar valores enteros de *b* y *d* (y por supuesto de *c* y *e*). Por seguir un procedimiento diferente del puro tanteo o de que el ordenador lo encuentre, podemos acudir al resultado más conocido sobre ternas pitagóricas (que además se localiza fácilmente a través de los socorridos Google o Yahoo):

Cada terna pitagórica puede construirse a partir de dos números enteros positivos m y n primos relativos, de distinta paridad, con m > n de la siguiente forma:

($2Kmn$, $K(m^2 – n^2)$, $K(m^2 + n^2)$), con K número entero.

Pequeño apunte notacional: lo de m y n primos relativos se suele describir como (m, n) = 1 (o mcd(m, n) = 1) y lo de distinta paridad, como $m \equiv n + 1 \mod 2$, que es lo mismo, pero mucho más conciso, preciso y económico respecto a la cantidad de caracteres utilizados.

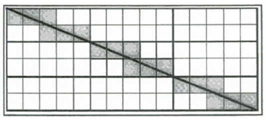
Como 99 es un número impar, no puede obviamente ser de la forma 2Kmn, ni $K(m^2 + n^2)$, con lo que tratamos de escribirlo como K(m – n) (m + n). Encontramos únicamente las siete posibilidades que aparecen en la siguiente tabla:

k	$m-n$	$m+n$	m	n	$b=2Kmn$	$c=K(m^2+n^2)$	d
1	9	11	10	1	20	101	14.244
33	1	3	2	1	132	165	36
3	3	11	7	4	168	195	38.234
11	1	9	5	4	440	451	44.494
9	1	11	6	5	540	549	45.344
3	1	33	17	16	1632	1635	48.043
1	1	99	50	49	4900	4901	49.005

La última columna, los valores de *d*, se han calculado a partir de la fracción obtenida anteriormente. El único valor entero se consigue para *d* = 36 y *b* = 132. Comprobad que se verifican todas las condiciones del enunciado. Así pues la respuesta a la cuarta cuestión es *b* = 132 Brahms.

Cuestión 5ª.- Es obvio que el monje no ha resuelto el problema que plantea (probablemente solo se ha aprendido los datos, como sucede con algunos guías reales), sino no hablaría de trigonometría (si se intenta resolver el problema metiendo en danza razones trigonométricas, no se llega a ninguna parte).

Foto 4ª.- La única foto de las que aparecen que realmente es de la película (de la primera versión).



Cuestiones 6ª y 7ª.- El número de cuadrados por los que pasa la diagonal de un rectángulo de lados A y B es una cuestión planteada en muchos libros de matemática recreativa y páginas de internet, pero curiosamente casi siempre parcialmente resuelta (lo que en matemáticas equivale a no resuelta). Casi todos proponen ir resolviendo casos particulares para intentar inferir una regla general, llegando a la relación d = A + B - 1. Esta solución sólo vale si A y B son primos entre sí. Véase el dibujo del rectángulo 15 x 6. Si la relación anterior fuera correcta, tendríamos que la diagonal corta a 20 cuadrados, cuando podemos contar que son sólo 18. Obsérvese que aparece tres veces el mismo patrón (un rectángulo 5 x 2). Como 5 y 2 son primos, podríamos utilizar la relación expuesta previamente, y de este modo d = 5 + 2 - 1 = 6 cuya comprobación visual es inmediata. Como hay tres de estos rectángulos, el total es 6 x 3 = 18. En general, siempre que A y B tengan algún factor en común, esta descomposición es siempre posible, y se repite exactamente con el factor mcd(A, B). Así pues,

D = mcd(A, B) (A / mcd(A, B) + B / mcd(A, B) - 1) = A + B - mcd(A, B).

En la cuestión 7, como 819 = 9 x 7 x 13, 1001 = 7 x 11 x 13, el mcd(819, 1001) = 7 x 13 = 91. Es decir, se tienen 91 rectángulos de tamaño 9 x 11. De la expresión anterior se sigue que el número de cuadrados que corta la diagonal es D = 819 + 1001 - 91 = **1729** (respuesta a la cuestión 7). Para saber por cuantos vértices de los cuadrados pasa la diagonal (cuestión 6), basta darse cuenta de que cada uno de los 91 rectángulos 9 x 11 proporciona un punto por el que pasa la diagonal. Si descartamos el último que coincide con el vértice del rectángulo grande, nos quedan 90 cuadrados.

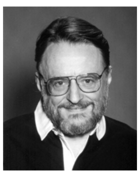
Si contamos además los vértices inicial y final del rectángulo completo tendremos que la respuesta es **92** cuadrados.

Foto 5ª.- Probablemente esta es la foto CLAVE., o al menos una de las clave, porque es muy conocida. Es la foto promocional e icono de la película ***Adios Mr. Chips*** (*Goodbye Mr. Chips*, Sam Word, Reino Unido, 1939). La novela y el personaje en los que se basa, Mr. Chips, un profesor de universidad, fueron concebidos por el escritor **James Hilton**, un autor muy popular en su tiempo, hoy prácticamente olvidado. Además de las novelas relativas a Mr. Chips, escribió ***Horizontes Perdidos***, llevada varias veces a la pantalla, dos de las cuales, 1937 y 1973, son las películas que estamos buscando.

Cuestión 8ª.- Una vez descubierta la película (o el libro), es fácil ir atando cabos. En este caso el hecho de que el avión que inicialmente debía llevarlos a Shanghai los traslade a Sangri-La, no es casual. Sondra, una de las habitantes de Sangri-La, había propuesto a Conway como la persona idónea para suceder al padre Perrault, enfermo desde hace tiempo. Por eso fue “secuestrado”.

Foto 6ª.- Vemos una imagen de una **luna azul**. Se trata de un fenómeno en el que se puede apreciar una segunda Luna llena durante un mismo mes del calendario, teniendo lugar cada dos años y medio aproximadamente. El fenómeno *Blue Moon* cobró popularidad de manera casual, debido a que en el mes de enero y marzo de 1999 sucedieron dos veces respectivamente. Los medios de comunicación reseñaron ampliamente éste acontecimiento, poco conocido hasta entonces. El mes de febrero de dicho año no se produjo ninguna luna llena. Cuatro años de cada siglo, se observan dos “lunas azules” en un mismo año. La primera siempre se produce en enero y la segunda, por lo general, en marzo. Se observará una el día 31 de diciembre de 2009 (el primer plenilunio de ese mes será el día 2 de diciembre).

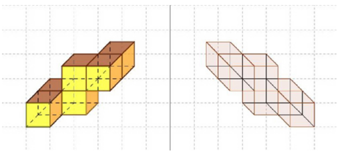
Pero la relación con nuestro concurso es que el idílico monasterio del que habla la novela, ***Shangri-La***, se localiza en el valle de la Luna Azul.



Entre las cuestiones octava y novena, se dice que el apellido del protagonista recuerda a un matemático. El personaje principal es Robert Conway. En efecto hay al menos un matemático que se apellida así: **John Horton Conway** (nacido en Liverpool, Gran Bretaña, el 26 de diciembre de, curiosamente, 1937). Ha trabajado en multitud de áreas matemáticas, entre ellas, en la teoría de conjuntos, teoría de nudos, teoría de números, teoría de juegos y códigos. También ha dedicado parte de su trabajo a la matemática recreativa: creador en 1970 del juego de la vida, el juego del drago, el Phutball y ha realizado análisis detallados de otros muchos juegos y problemas, como el cubo Soma. Martin Gardner ha difundido sus trabajos ampliamente en libros y artículos. Actualmente es profesor de matemáticas en la Universidad de Princeton.

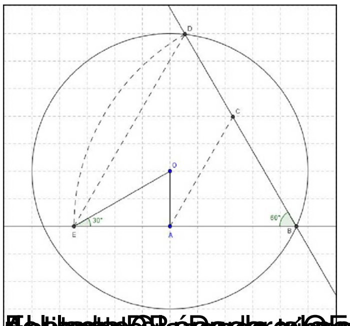
Cuestión 9ª.- Existen 166 hexacubos diferentes con los que se pueden construir complicadas estructuras que generan a su vez interesantes problemas matemáticos. Aunque los 8 tetracubos también han motivado diversas cuestiones, es a partir de los 29 pentacubos donde surgen la mayor parte de los tos artículos y trabajos más populares.

Cuestión 10º.- El hexacubo en cuestión es el que muestra la imagen adjunta enviada por uno de nuestros participantes, en la que se ve perfectamente cómo este hexacubo es idéntico a su imagen especular. También es claro que no tiene ningún plano de simetría.



Cuestión 11ª.- La canción *The world is a circle*, aparece en la banda Sonora del remake ***Lost Horizon***
(1973) dirigida por Charles Jarrott con un reparto estelar entre los que aparecen Peter Finch, John Gielgud, Liv Ullmann, Charles Boyer, Michael York, entre otros. Fue compuesta por el famoso compositor Burt Bacharach.

Cuestión 12ª.- Figura 1.- Sea E un punto sobre AB de modo que el triángulo ΔEBD sea equilátero. La imagen adjunta fue enviada por uno de los concursantes. Su razonamiento concluye así:



Despejando: