Seguimos dando una vuelta por las versiones animadas que se han realizado sobre la obra de Edwin A. Abbott, y sobre todo, visionando algunas escenas. Uno de los cortos nos lleva a la película ***¿Y tú que sabes?*** *estrenada el año pasado. Acabamos con los resúmenes de los capítulos de la segunda temporada de* ***Numb3rs****, hasta que alguna cadena de televisión estrene la tercera o algún lector interesado pida alguna información sobre la misma.*

El mes pasado nos acercábamos a *Flatland: the film*. Un amigo de esta sección me ha comentado en un correo que, aún sin haber visto la película, le cuesta creer que haya escenas que yo califiqué de “duras”. Bien, en el siguiente enlace podéis ver la ejecución de un opositor al régimen. Al finalizar el máximo mandatario se pregunta si será recordado como el fiel guardián de la República o como un asesino de inocentes. Que cada uno juzgue por si mismo si es o no violenta.

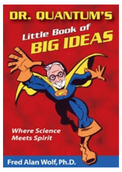
También en *You Tube* puede verse un cortometraje del personaje conocido como Doctor Quantum, titulado el Dr. Quantum visita Planilandia . Es curioso, y puede ser exportable a las aulas (de paso los alumnos pueden practicar un poco de inglés que no les vendrá tampoco mal). Para aquellos que no estén muy entrenados en la lengua de la Gran Bretaña, ahí va nuestra castellana versión.

Después de entrar en una especie de túnel y de un par de piruetas acrobáticas, el doctor empieza:

Dr. Q.: *Bienvenidos a Planilandia. Un mundo de dos dimensiones únicamente. Sólo hacia delante y hacia atrás, izquierda y derecha. En este mundo no existe arriba ni abajo* .
Habitantes de Planilandia: *¿Dónde está Dotty1? No está en la fila. ¿Qué diablos es esa cosa?*
Dr. Q.: *En este mundo los seres bidimensionales no tienen idea de los objetos tridimensionales. Estos dos planilandeses no saben de cubos, esferas, tetraedros ni de mi. Desde la perspectiva 2-D, mi dedo 3-D aparece de forma similar a esto ….*
Habitantes: *¡Oh, Dios mio! ¿Qué demonios es eso?*
Dr. Q.: *¡Hola, pequeño círculo!* (Grita asustado) *¿Miedo a lo desconocido? ¿Qué debería decir? Es imposible. Si vemos sólo lo que conocemos, ¿cómo alguien puede ver algo nuevo? Lo desconocido. ¿Cómo salir jamás de nuestra caja? ¡Hola, pequeño círculo! ¡No tengas miedo!*
Círculo: *¿Quién dice eso? ¿Dónde estás?*

Dr. Q.: *Eso sólo explica parte del truco. Estoy en otra dimensión, en otro espacio. ¡Estoy por encima de ti!*
Círculo: *¡Nunca, nunca uses esa palabra!*
Dr. Q. : *¿Qué palabra?*
Círculo: *La palabra que empieza por E*[2].
Dr. Q.: *¿Encima?* (el círculo grita).
Círculo: *¡Esta prohibida!*
Dr. Q.: *¿Qué crees que significa?*
Círculo: *No lo sé. Y no quiero saberlo. Podrías ser duramente castigado si usas esa palabra. ¿Eres un fantasma?*
Dr. Q.: (Riéndose) *Espero que no. Tengo una perspectiva diferente a la tuya. Puedo ver cosas de un modo que tú no puedes.*
Círculo: *¡Oh! ¿Cómo qué?*
Dr. Q.: *Tú tienes bien guardada tu caja fuerte. Dentro de ella tienes doce monedas, un testamento y un pasaporte.*
Círculo: (sorprendido) *¿Cómo lo sabes? ¿Dónde estás? ¿Eres un Dios?*
Dr. Q.: *¡No más que tú! Verás, como estoy por encima de ti (el círculo vuelve a gritar al oir la palabra), en la tercera dimensión, puedo ver dentro de las cosas de tu mundo.*
Círculo: *¡Tercera Dimensión! ¡Eres un fantasma tonto! ¡Sólo hay dos! ¡Mira!* (Comienza a moverse a los lados).
Dr. Q.: *Si pudiera tocar el interior de tu estómago, ¿cómo lo haría?*
Círculo: *Tendrías que cortar mi piel. Si no es imposible*. (Le toca, le hace cosquillas) *¡Para! ¡Para!*
Dr. Q.: *¿Preparado para más?*
Círculo: *¿Más qué?*
Dr. Q. : *Dimensiones, direcciones.*
Círculo: *¡Oh, no! ¡Pero si no hay más!* (Duda) *¿Más? ¿Qué me ocurriría?¿En que me convertiría?*
Dr. Q.: *¡Adquirirás conocimiento!*
Círculo: *¡De acuerdo!*
Dr. Q.: *¡Excelente!* (Toma el círculo y lo levanta a la 3-D)
Círculo.: *¡Oh! ¡Nunca lo imaginé!*
Voz en off: *¿No es divertido? Lo que más tememos es lo que nos lleva a los mayores descubrimientos.*

1.- *Dot* en inglés es punto, así que *Dotty* será un niño punto, un puntito, que se ha escapado como suelen hacer los niños.
2.- En el diálogo en inglés la frase es *The A-word*, porque la palabra es *Above.* Al traducirlo he puesto *la palabra que empieza por E*, para poder decir luego *Encima*. Cosas de los idiomas.



Este dibujo animado, el Dr. Quantum, es el alter ego del Dr. Fred Alan Wolf, doctor en Física Cuántica por la Universidad de California desde 1963. Desde hace años populariza la ciencia (sobre todo su especialidad, la Física Cuántica) a través del programa de televisión *The Know Zone* (algo así como *La Zona del Saber*) de Discovery Channel. Ha publicado once libros (como el que veis a la derecha), artículos en revistas, programas de radio y televisión.

Según se dice en sus biografías su fascinación por el mundo de la Física comenzó siendo niño cuando oyó en un noticiario el enorme poder de la primera explosión atómica. Ese interés aumentó dedicándose al estudio de las matemáticas y de la física. Después de doctorarse, comenzó sus investigaciones sobre el comportamiento de las partículas atmosféricas tras una explosión nuclear integrándose en el Proyecto Orión (proyecto dedicado a investigar la propulsión nuclear en la exploración espacial). Ha obtenido diversos premios por sus trabajos de divulgación de la física y ha sido traducido a varios idiomas, incluido el español. Esto en cuanto a la parte científica, porque también es de los que se ha dedicado a profundizar en las relaciones entre el conocimiento humano, la psicología, la fisiología, lo místico y lo espiritual (es decir, planteamientos que podríamos calificar de "magufos". NOTA: Magufo designa a quien ejerce o "investiga" una pseudociencia). Desde luego lo que **es envidiable** es **el empeño divulgativo** de personas como ésta y la **disponibilidad de los medios** de comunicación para llevar a cabo esta tarea. ¿Por qué aquí no sucede? Quizá haya que introducir algún que otro engañabobos acientífico o chismes rosas de los investigadores para tener alguna aceptación, y aprovechar para meter entre col y col, lechuga. (En España, el galardonado Eduardo Punset también ha coqueteado en su programa *Redes* alguna vez con este tipo de patrañas místico-morales).

Quizá recordéis a este respecto la película documental ***¿Y tú que sabes?*** (*What the bleep do we know?*, Dirigida por Mark Vicente, Betsy Chase i William Arntz, EE. UU., 2004). Confieso que aún no la he visto, aunque tengo referencias, no todas demasiado positivas. Me parece de interés el siguiente artículo para aquellos que deseen conocer más sobre esta producción o hayan visto la película. Os muestro los carteles de la versión original y la española para que observéis el habitual uso comercial que últimamente se hace de los símbolos matemáticos (se intenta captar la atención de personas medianamente cultas para dar a entender que conocer algo de esos símbolos da alguna prestancia especial o una distinción de clase). La traducción del título también intenta "picar" al espectador, porque lo correcto hubiera sido *¿Qué sabemos?*, pero es menos llamativo.

La interrogación *What the bleep* aparece también en el vídeo de Planilandia (sus habitantes exclaman *What the bleep is that thing?* al poner el Dr. Quantum el dedo sobre su universo). Podría hablarse del movimiento What the bleep, del que podéis averiguar más pinchando en el enlace (han creado incluso una simbología propia, *What tHe βL□□ P!?*)

Más Planilandia el mes que viene ….

Guía de *Numb3rs*.- Episodios previstos por el canal Calle 13 para este mes

Acabamos con los resúmenes de los tres episodios de *Numb3rs* que Canal 13 ya emitió y no reseñé aprovechando que este mes los repiten.

Episodio 2.02**.-** Para bien o para mal *(Bettor or Worse)*

Argumento: Una mujer irrumpe en una joyería pidiendo ver al dueño. Le da una nota y le amenaza diciéndole que o la ayuda o su esposa e hija morirán. Después de hacer lo que dice la nota, la mujer le asegura que verá a su familia al cabo de 24 horas siempre y cuando ni la policía ni el FBI intervengan. Pero un guarda de seguridad la dispara y la mujer muere. El pánico se apodera del hombre.

Aspectos Matemáticos: Números seudo aleatorios, Autómatas Celulares, Sucesiones de Farey.

En la reseña del mes de Enero , ya hablamos de los **números aleatorios y seudo aleatorios** (episodio 2.13, *Doble o Nada*). En este capítulo, el agente Don Eppes necesita asignar unos códigos aleatorios de dos dígitos a 40 miembros de su equipo del FBI, Los números son elegidos del 00 al 99. Charlie le recuerda la diferencia entre estos dos tipos de números, y se pone a componer una fórmula que genere números seudo aleatorios. Para poner en marcha este tipo de funciones, se precisa de un *valor inicial* o *semilla* . Como establece esa fórmula a partir de unos valores concretos, no está del todo seguro de si funcionará correctamente (es decir, si no repetirá números para agentes distintos). Concretamente la función que diseña es la siguiente: siendo x_0 el valor inicial, itera la expresión $(41x_0 + 35) /101$ y toma los dos primeros dígitos de la parte decimal del número resultante. Por ejemplo, si $x_0 = 29$, $x_1 = 1224/101 = 12.1188\ldots$, luego toma el valor 11 (léase bien las condiciones: se prescinde de la parte entera del número). Un ejercicio entretenido es tratar de obtener los 40 valores necesarios a partir de la fórmula anterior, a partir de diferentes valores iniciales. Podremos quizá entonces resolver la siguiente cuestión: ¿es útil la fórmula propuesta por Charlie? Si no es así, indicar la razón. Espero vuestras respuestas.

En esta capítulo el matemático utiliza los llamados **autómatas celulares** para tratar de visualizar un mensaje que cambia cada vez que es reenviado. Aunque no existe una definición formal universalmente aceptada del concepto de autómata celular, básicamente consiste en un conjunto de datos que forman una estructura, y un número finito de reglas que se pueden aplicar a cada elemento de esa estructura. La lista de reglas suele basarse en modelos biológicos, que fue la primera aplicación para la que fueron concebidos los autómatas. Aunque John von Neumann fue su precursor a finales de los años cuarenta del pasado siglo, son Konrad Zuse y Stanislaw Ulam los que desarrollan la idea más ampliamente, y más recientemente Stephen Wolfram.

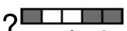
El interés que ha despertado esta técnica radica en la sencillez y en la simplicidad que caracteriza la construcción de los modelos. Suele emplearse un *retículo* bidimensional (en más dimensiones un espacio n-dimensional) dividido en un número de sub-espacios homogéneos, conocidos como *celdas* (o sea se realiza una teselación homogénea del plano; para entendernos una cuadrícula similar a la de una página de un cuaderno). Cada celda (cuadrícula) puede estar en un *estado* de entre un conjunto finito que se representa mediante diferentes colores. La asignación de un estado a cada celda se le llama establecer una *configuración*. Los conjuntos contiguos de celdas se llaman *vecindades*, que vienen determinadas por sus posiciones relativas respecto a cada celda. Finalmente se establece una *Regla de Evolución*, una función que define cómo cambia de estado cada celda dependiendo del estado inmediatamente anterior de su vecindad. Esas reglas se aplican siguiendo un Reloj Virtual de Cómputo conectado a cada celda del autómata. Un ejemplo muy conocido es el [Juego de la Vida] de J. H. Conway popularizado en 1970 por Martin Gardner.

El modelo que Charlie emplea en el episodio es un autómata de dimensión uno. Supongamos que el primer mensaje que recibe se representa mediante el gráfico que vemos dibujado.

Charlie descubre que el mensaje evoluciona según las siguientes reglas:

- En cada nueva etapa, una celda estará viva si exactamente una de sus vecinas lo está.

- En cada nueva etapa, una celda estará muerta si ninguna, o dos de sus vecinas, están vivas.

Las celdas vivas son las sombreadas y las muertas las que están en blanco. Siguiendo estas reglas, ¿cuál será la siguiente configuración a la representada? 
Veamos. La primera celda tiene una contigua viva, por lo que en el siguiente paso, estará viva. La segunda celda tiene muertas sus dos celdas vecinas por lo que en el paso siguiente, estará muerta. La tercera celda está entre dos celdas vivas, por lo que en el próximo paso, estará muerta.. Es sencillo ver que las dos últimas estarán vivas. De este modo, el nuevo estado del mensaje será el que aparece en la imagen de la derecha. El proceso se itera las veces que se precisen, obviamente, después de implementadas las reglas en el ordenador.

Otras dos referencias que aparecen en el capítulo son las sucesiones de Farey (*"Buscamos fracciones. Concretamente, una sucesión de Farey"*, es la referencia exacta de Charlie en el guión). Una **sucesión de Farey** de orden n es la formada por todas las fracciones propias (es decir, menores o iguales que 1) con denominador menor o igual que n ordenadas de menor a mayor. Cada sucesión de Farey comienza en el 0, representado por la fracción 0/1, y termina en el 1, representado por la fracción 1/1, aunque algunos autores suelen omitir ambos términos. Los primeros términos de la sucesión de Farey, denotada por F_n, son:

F_1 = {0/1, 1/1}
F_2 = {0/1, 1/2, 1/1}
F_3 = {0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1}
F_4 = {0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1}
F_5 = {0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1}
F_6 = {0/1, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 1/1}

Dos propiedades inmediatas de estas sucesiones (el lector podrá probarlas sin demasiada dificultad) son:

- Cualquier par de fracciones consecutivas a/b y c/d, verifican que bc - ad = 1.
- Tres fracciones consecutivas cualesquiera a/b, c/d, y e/f, verifican que c/d = (a + e)/(b + f)

Relacionados con las sucesiones de Farey están las fracciones continuas, el llamado árbol de Stern-Brocot, y los círculos de Ford, que no describiremos por ahora.

Estas sucesiones reciben el nombre del geólogo británico John Farey (1766-1826), que publicó una carta sobre ellas en un número de la revista *Philosophical Magazine* en 1816. En ella Farey conjeturó la segunda de las propiedades descrita anteriormente aunque, por lo que se sabe, no llegó a probarla. La carta de Farey fue leída por Cauchy que probó la afirmación de Farey en su libro *Exercises de mathématique*. Lo curioso es que al parecer fue el desconocido matemático C.Haros, el primero que publicó un resultado semejante en el año 1812, circunstancia desconocida tanto por Farey como por Cauchy. Una vez más, un accidente histórico ligó el nombre de Farey con este tipo de sucesiones en lugar del nombre de su descubridor original.

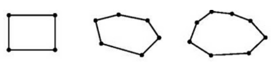
Episodio 2.03 – Obsesión *(Obsesión)*

Argumento: Un hombre irrumpe en la casa de una cantante pop, Skylar Wyatt, que está casada con un actor. Ella ha estado recibiendo cartas amenazadoras desde hace algún tiempo pero no se las tomó demasiado en serio hasta ahora. Megan intenta localizar al asaltante a partir de su descripción física. Posteriormente un fotógrafo aparece muerto. Los hermanos Eppes tratarán de esclarecer ambas situaciones.

Aspectos Matemáticos: El problema de la Galería de Arte, Trigonometría, Conceptos de geometría esférica elemental (latitud, longitud, etc.).

Ninguna de las cámaras de seguridad de la casa asaltada ha logrado captar una sola imagen del intruso. Esta circunstancia lleva a Charlie a analizar la situación de las cámaras a lo largo de la casa, lo que nos lleva a un famoso problema, conocido como el **problema de la Galería de Arte**, propuesto en 1973 por el matemático Victor Klee. Aunque su descripción es sencilla, hubo que recurrir a técnicas de ***geometría computacional*** para dar una solución general del mismo. El enunciado es el siguiente: ¿Cual es el número mínimo de vigilantes en un museo o una galería de arte que garanticen que todos los lugares de la sala estén controlados al menos por uno de ellos en todo momento? A un nivel elemental, el problema puede resolverse probando, experimentando. Pero al ir variando la forma de la sala o la capacidad de los vigilantes el problema puede transformarse en un asunto realmente complicado. La solución viene dada por el **teorema de Chvatal**, que establece que se precisa un número máximo de [n/3] cámaras (atentos a la notación: el corchete indica la parte entera de n/3), siendo n el número de vértices que tenga la sala. Se supone que cada cámara puede orientarse para controlar cualquier dirección (en cada instante sólo controla, obviamente una dirección concreta) y que no puede ver a través de las paredes (parece de Perogrullo pero no lo es: esto reduce el ángulo de movilidad de la cámara).

Veamos algunos casos concretos. Supongamos que tenemos tres salas con las siguientes formas.



Los polígonos tiene respectivamente 4, 6 y 8 lados. Según el teorema, cada caso necesitaría, respectivamente, un número máximo de guardias igual a [4/3], [6/3] y [8/3], es decir, 1, 2 y 2 vigilantes, respectivamente. Sin embargo, cualquiera entiende que con un único vigilante en cada sala es suficiente para controlar cada punto de la misma. Esto sucede siempre que la forma de la sala sea convexa, es decir, que podamos unir dos puntos cualesquiera de la sala por un segmento totalmente contenido en ella. Pero hay salas que pueden no ser convexas, o que tengan columnas que impidan la visión, etc. Véanse otras posibles salas más abajo. Además el teorema indica el número máximo de vigilantes pero no dice dónde deben colocarse para actuar de la forma más eficaz.

Václav Chvatal resolvió el problema siendo aún alumno de la universidad de Montreal. Posteriormente, Steve Fisk, estudiando el trabajo de Chvatal, encontró una demostración más sencilla y completa ¡mientras dormía en un viaje en autobús por Afganistán! Para el lector que quiera entretenerse o para aquellos que sean dueños de una tienda de todo a cien, traten de descubrir cuántos y donde deben colocarse los vigilantes o las cámaras de seguridad en los siguientes casos:

En otro momento del capítulo, Charlie observa unas fotografías que muestran un aro de baloncesto y la sombra que el Sol proyecta del mismo. Utilizando razones trigonométricas y algo de geometría esférica es capaz de determinar el ángulo de elevación del Sol, de ahí la hora en que fueron tomadas las fotos, y lo más importante para resolver el caso, desde donde. Es de suponer que quienes estén leyendo estas reseñas estén suficientemente familiarizados con la **trigonometría**, dado que es un tema básico en todos los planes de estudio de las ESO y el Bachillerato. Es probable además que conozcan que es una herramienta fundamental para calcular datos de lugares inaccesibles (seguramente les sonará aquello de la medida de la altura de las pirámides, o de ciertas montañas, etc.). En todo caso en la red pueden sino ponerse al día. Una actividad muy recomendable y entretenida en relación al episodio y a la trigonometría es la construcción de un reloj de sol .

Episodio 2.04 – Riesgo Calculado *(Calculated Risk)*

Argumento: Don alberga en su casa a Daniel, un joven testigo, ya que el plan de protección no se hace cargo de su custodia. La madre de Daniel, una mujer de negocios de una compañía eléctrica, ha sido asesinada.

Aspectos Matemáticos: Probabilidad Condicional, Árboles de probabilidad condicional, Interés compuesto.

Es probable que nuestros alumnos tengan cierta idea de cómo calcular la probabilidad de que un suceso simple suceda. Por ejemplo la probabilidad de sacar un as de un mazo de cartas, o la de extraer una bola de cierto color de un conjunto multicolor. Sin embargo cuando encadenamos varios sucesos, y su resultado influye en los posteriores, es necesario utilizar el concepto un poco más elaborado de **probabilidad condicional**, que por otro lado modeliza una cantidad mayor de situaciones de la vida cotidiana. En la industria médica, por ejemplo, verificar si una medicina es efectiva o inocua depende de muchos factores como la salud del paciente o si se ha administrado correctamente. Las compañías farmacéuticas tratan de controlar estas variables haciendo tests. Y obviamente aquí no cabe el método de ensayo-error, porque nos podemos ir quedando sin elementos en el espacio muestral.

En el capítulo Charlie tratará de reducir una enorme cantidad de variables mediante la “poda” de un diagrama de árbol. Aunque esto requiere la utilización de complejos algoritmos avanzados, la idea básica se fundamenta en los conceptos de sucesos dependientes y probabilidad condicional. El manejo y análisis de este tipo de estructuras es llevado a cabo, normalmente, por informáticos, que sí, necesitan matemáticas para su trabajo, pero los matemáticos como Charlie no suelen dedicarse a estos menesteres.

Por otro lado, la mujer asesinada había hecho varias inversiones de dinero que los hermanos proceden a investigar. A lo largo del tiempo, el precio de la mayor parte de los bienes de consumo que contratamos se incrementa (el precio del gas, de la electricidad, etc.). Las personas que invierten en bolsa u otros productos bancarios suelen asesorarse antes de decidirse por tal o cual empresa o producto financiero, aunque nadie (en teoría) puede asegurar ningún comportamiento futuro. No obstante hay mucha gente que invierte en productos futuros (planes de pensiones) como la mujer del capítulo. Las empresas también tratan de ajustar sus activos para poder hacer frente a los costes que tendrán en el futuro. El invertir en futuribles no deja de ser un riesgo: si los precios (o las acciones) bajan, perdemos dinero.

Una herramienta para hacer “predicciones financieras” es el concepto de **interés compuesto**, que viene dado por la expresión $A = P\,(1 + r/n)^{nt}$, donde A es el dinero que obtendremos al cabo de un tiempo, P la cantidad invertida inicialmente, r el interés al que imponemos nuestro capital (escrito en forma decimal), n el número de periodos al año y t el tiempo en años. Por ejemplo, 1000 euros invertidos al 7% en periodos de cuatro meses durante 8 años, nos ha producido en ese tiempo 1742.21 euros. Como dije antes, muchas personas se afanan en localizar la mejor opción para su dinero, de ahí las continuas ofertas de los bancos. Personalmente es un tema que no sólo me aburre sino que me repele bastante, quizá porque uno nunca ha tenido aspiraciones de ser millonario, o quizá porque lo poco que uno sabe de los números (y de las entidades bancarias) me han llevado al convencimiento de que NADIE con un sueldo normalito (es decir, que no sea ya millonario) va a lograr incrementar su capital sustancialmente si no es robando o porque le toque la lotería. Calculen sino, cuanto debe uno invertir para que desde los 23 años hasta los 65 si alguien le ofreciera ingresar sus ganancias cada 2 semanas (algo imposible a todas luces) pudiera tener, digamos por ejemplo, 1 millón de euros al término de ese tiempo. Los números no mienten, y desde luego hay entretenimientos más saludables que pulular de banco en banco (claro que de eso se valen también estos señores, de despreocupados como yo).

Os recuerdo que cualquier comentario, duda, aclaración o crítica podéis hacérmela llegar a alfonso@mat.uva.es
.