*De cómo un conjunto de números aparecido en la serie **Perdidos** permite introducir a los alumnos en la interpolación polinómica (ver mes pasado) y la aritmética modular. Después la guía habitual de la serie **Num b3rs**, ahora incrementada por su recuperación en Antena 3 los jueves.*

Solución a la cuestión planteada a propósito de los números de *Lost*

Recordemos la cuestión planteada hace dos meses: el polinomio interpolador con nodos los números naturales del 1 al 6 e imágenes los valores 4, 8, 15, 16, 23, 42, respectivamente, es decir el polinomio

$$P(x) = \frac{1}{40}(-9x^5 + 170x^4 - 1175x^3 + 3670x^2 - 4896x + 2400)$$

toma valores enteros ($P(x) \in Z$) para cualquier $x \in Z$ (para los no habituados, Z designa al conjunto de los números enteros). Se pide probar (o refutar) esta afirmación.

De la media docena de mensajes recibidos (es un alivio saber que hay alguien por ahí), describo la enviada por Alberto Castaño Domínguez, lector habitual de esta y otras secciones de DivulgaMAT, por ser la más concisa y elegante (al menos bajo mi punto de vista). A su razonamiento añado algunos comentarios que intentan acercar la prueba a la inmensa mayoría. Utiliza (como debe ser en un ejercicio de este tipo) congruencias. Supongo que todos conocéis qué es eso. Por si acaso, hagamos un pequeño repaso.

Hay muchas situaciones, aplicaciones, problemas, en los que únicamente se está interesado en conocer el resto de la división de dos números enteros. Estas cuestiones las estudia la **aritmética modular**, y el concepto básico inicial que emplea es el de **números congruentes**. Dos números a y b son congruentes módulo m si al dividir ambos por ese valor m producen el mismo resto. Se representa así: $a \equiv b \mod m$. Por ejemplo, $23 \equiv 15 \mod 4$, porque al dividir 23 entre 4 y 15 entre 4 el resto es el mismo, 3. Es fácil probar que

$a \equiv b \mod m$, si y sólo si, a-b es un múltiplo de m

En matemáticas esto se escribe diciendo que m|(a-b) (se lee, m divide a a−b, es decir, que a−b dividido entre m tiene resto cero). Diariamente utilizamos las congruencias en muchas ocasiones. Por ejemplo leyendo la hora de los relojes: las 23 horas son las 11 de la noche. El reloj sólo tiene 12 horas, sólo utiliza 12 números, y después de recorrerlos todos, las 13 horas equivale a la 1 de la tarde (o sea $23 \equiv 11 \mod 12$). La letra del NIF se calcula mediante congruencias. En informática para asignar localizaciones de memoria de un ordenador a los datos que componen un fichero (por ejemplo para asignar claves a los usuarios de tarjetas de crédito, o para localizar los datos de los alumnos de un colegio), se utilizan congruencias.

Volvamos a nuestro polinomio. Escribamos su expresión del siguiente modo:

$-40\ P(x) = 9x^5 - 170x^4 + 1175x^3 - 3670x^2 + 4896x - 2400$

El problema es equivalente a demostrar que el segundo miembro de la igualdad toma siempre valores múltiplos de 40 para cualquier x entero que pongamos. Para que un número sea múltiplo de 40, debe ser múltiplo de 8 y de 5. Pues probemos esto último.

Podemos simplificar un poco los coeficientes. 170 = 21 x 8 + 2. O sea que al dividir 170 entre 8 nos da el mismo resto que al dividir 2 entre 8 (es decir, $170 \equiv 2 \mod 8$), por lo que ¿para qué vamos a trabajar con números grandes? En lugar de 170 pongamos 2 que para lo que queremos ver, da igual. De este modo, repasando todos los coeficientes, tenemos que

$9 \equiv 1 \mod 8$
$170 \equiv 2 \mod 8$
$1175 \equiv 7 \equiv -1 \mod 8$
$3670 \equiv 6 \equiv -2 \mod 8$

$4896 \equiv 0 \mod 8$ (o sea 4896 es un múltiplo de 8)
$2400 \equiv 0 \mod 8$ (2400 es un múltiplo de 8, es decir 8 divide a 2400)

Entonces en vez de trabajar con el polinomio inicial, podemos trabajar con uno más sencillo:

$Q(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 = x^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2)$

Finalmente se trata de comprobar que al sustituir x por cualquiera de los ocho valores con los que trabajamos módulo 8, obtenemos un múltiplo de 8. Es decir,
$Q(0) = 0$, $Q(1) = 0$, $Q(2) = 0$, $Q(3) = 72$, $Q(4) = 480$, $Q(5) = 1800$, $Q(6) = 5040$, $Q(7) = 11760$
Todos ellos dan resto cero al dividirlos por 8 (son múltiplos de 8):
$72 = 2^3 \cdot 3^2$, $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$, $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $11760 = 24 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$
Cualquier entero que sustituyamos a continuación sería congruente con estos valores (es decir $Q(8) \equiv Q(0)$, $Q(9) \equiv Q(1)$, etc.). Por tanto hemos probado que para cualquier entero que utilicemos, el resultado es múltiplo de 8.

Utilizamos el mismo razonamiento para demostrar que P(x) es múltiplo de 5 para cualquier x entero que pongamos. Calculemos los coeficientes de P(x) módulo 5:

$9 \equiv 4 \equiv -1 \mod 5$
$170 \equiv 0 \mod 5$
$1175 \equiv 0 \mod 5$
$3670 \equiv 0 \mod 5$
$4896 \equiv 1 \mod 5$
$2400 \equiv 0 \mod 5$

Ahora el polinomio módulo 5 es $R(x) = -x^5 + x$
$R(0) = 0$, $R(1) = 0$, $R(2) = -30$, $R(3) = -240$, $R(4) = -1020$
Todos ellos como veis múltiplos de 5. Por tanto $9x^5 - 170x^4 + 1175x^3 - 3670x^2 + 4896x - 2400$ es múltiplo de 40 siempre (al serlo de 5 y de 8) y por eso toma valores enteros para cualquier entero x que sustituyamos en su expresión.

Veo por ahí alguien que levanta la mano y pregunta que porqué no hemos hecho la cuenta una única vez buscando las congruencias directamente con 40 en vez de con 5 y con 8 y así trabajar con un único polinomio. En efecto, se puede hacer, pero piensa un poco. Con el polinomio obtenido debemos después calcular ¡40 valores! Mientras que así, aunque trabajemos con dos polinomios (muy sencillos por otro lado), sólo hemos precisado calcular 13 imágenes. Por muy supersticioso que uno sea, el ahorro de trabajo compensa. ¿Alguna otra pregunta? No. Pues continuemos……

NOTICIAS

1.- Alex de la Iglesia ha comenzado el rodaje de la película ***Los crímenes de Oxford***, basada en la novela homónima de nuestro compañero y colaborador de DivulgaMAT, Guillermo Martínez. En http://blasfemandoenelvrticedeluniverso.blogspot.com podéis ir leyendo cómo se va desarrollando el rodaje diariamente junto a las reflexiones del director. Entre los actores se encuentran Elijah Word, Sir John Hurt (que encarna al matemático Arthur Seldon), Leonor Watling y Tom Frederic, entre otros.

2.- Desde el jueves 18 de Enero Antena 3 Televisión ha decidido emitir los capítulos de la primera temporada de *Numb3rs* que no habían programado en un horario más "normal" (23:00). El 18 de Enero pusieron el capítulo 1.8.- *Crisis de Identidad* y el 25 de Enero el 1.9.- *El francotirador*. Si todo va como debe ser, el jueves 1 de febrero emitirán el episodio 1.10.- *Una bomba sucia*, el 8 de febrero el 1.11.- *El sacrificio*, el 15 el episodio 1.12.- *Más allá del ruido* y el 22 el 1.13.- *La caza del hombre.* Sus reseñas las tenéis en el artículo del mes de Abril de 2006. Recordemos que en la primera tanda no emitieron el episodio 1.4.- *Fallo de Estructura* (que podría aparecer en cualquier momento, o no).

Guía de *Numb3rs*.- Episodios previstos por el canal Calle 13 para este mes

Episodio 2.18**.-** Todo es justo (*All´s Fair*).

Fechas de emisión: Lunes 5 de Febrero (22:20), Martes 6 de Febrero (17:45), Sábado 17 de Febrero (21:30), Domingo 18 (15:30).

Argumento: Saida es una ciudadana iraquí que va a realizar un documental en los Estados Unidos. Mientras hablaba por un teléfono móvil, es raptada y asesinada el día anterior a mantener una importante entrevista. Previamente había recibido algunas amenazas de muerte. El agente Kareem Allawi se une al equipo de Don para investigar el caso. Mientras, Charlie cena con una antigua amiga, Susan Berry, que se encuentra en Los Ángeles en la promoción de un libro. Ambos parecen llevarse muy bien ….

Aspectos Matemáticos: Probabilidad y Regresión Logística, juegos con información incompleta, Sudokus y Cuadrados Latinos.

En este capítulo, el agente Don trata de resolver un crimen en el que el testimonio de varios testigos parece ser falso. Varios testigos indican que tres sospechosos tienen aproximadamente la misma estatura, pero esos valores no concuerdan con el sexo de los mismos. Entonces pregunta a su hermano si hay algún procedimiento matemático que ayude a determinar que declaraciones de los testigos son las correctas. Su hermano propone utilizar una **regresión logística**. Se trata de un modelo útil cuando se trata de predecir el valor de una variable que sólo admite dos posibilidades (dicotómica). La función de regresión proporciona la probabilidad de que se verifique un suceso y su expresión más común es

$$P(x) = \frac{\alpha}{1+\beta e^{-\gamma x}}$$

con α, β, γ constantes. Es un modelo que se utiliza mucho en ciencias de la salud (presencia o ausencia de enfermedad o infección en un individuo), en biología, sociología, etc. La anterior expresión responde a un modelo en una sola variable (volviendo al ejemplo médico, se utiliza un único factor de riesgo como dato), aunque pueden manejarse más variables (x_j, j= 1, ..., m), en cuyo caso hablamos de regresión logística múltiple.

En otro momento Charlie vuelve a echar mano de la teoría de juegos para analizar las motivaciones y estrategias que determinan que personas pudieran ser las más proclives a cometer un acto terrorista. Utilizando los datos que conocen de cada sospechoso, los hermanos asignan a cada uno una probabilidad de llegar a cometer un crimen. En esta ocasión el modelo a utilizar es el mismo que se emplearía en un juego en el que parte de la información es desconocida o se ha perdido. A pesar de ello, un análisis de la situación puede llevarnos a adoptar decisiones realistas.
La utilización de modelos de tipología social se remonta a Auguste Cournot hacia 1838. Los mayores avances en este tipo de modelos fueron logrados posteriormente por John Nash (el de la "mente maravillosa") y por John Harsanyi (1920-2000). Mientras que Nash basaba sus trabajos en la suposición de que los jugadores conocen las preferencias de los demás, Harsanyi empleó modelos con información incompleta. Éste obtuvo también el premio Nobel de economía en 1994 por el desarrollo de este tipo de situaciones.
En un juego con información incompleta, un juego Bayesiano, la cuestión es cómo diseñar y manejar un modelo desconociendo las estrategias de los oponentes. Es una situación similar a la de Charlie y Don en la búsqueda de un terrorista. Harsanyi creía que los jugadores tienen ciertas preferencias y por ello hay una probabilidad subjetiva que podría asignárseles. En el caso del episodio, los terroristas podrían estar sólo interesados en el dinero o quizá actúen movidos por una meta.
A modo de ejemplo, pensad en el siguiente juego: dos jugadores lanzan al aire una moneda. Si coincide el resultado (dos caras o dos cruces) gana el jugador A; si no coinciden, gana B. Pero cada jugador decide aleatoriamente si muestra el resultado (juega) o no. ¿Cuál de los dos creéis que tiene ventaja?

En otra escena Alan, Charlie y Larry están haciendo un **sudoku**. Todo el mundo a estas alturas sabe en qué consiste este pasatiempo. Los primeros sudokus aparecieron en mayo de 1979 en la revista *Dell Péncil Puzzles and Word Games* con el nombre de *Number Place*. Parece ser que fue el arquitecto jubilado Howard Garns, fallecido en 1989, el autor de este entretenimiento. En 1984 llegó a Japón que lo rebautizó como Sudoku, una especie de acrónimo de la frase "las cifras deben quedar solteras". Su difusión mundial se debe a otro jubilado, el juez neozelandés Wayne Gould, residente en Hong-Kong, que escribió un programa informático que genera sudokus automáticamente. Después, ya sabemos, el boom gracias a los periódicos de medio mundo.
El precursor del sudoku es el llamado **cuadrado latino**. Un cuadrado latino de lado n es una matriz de n2 casillas en las que hay que disponer n símbolos de modo que nunca aparezca dos veces el mismo símbolo en una misma fila o columna. Su origen se remonta a la Edad Media,

si bien fue Leonhard Euler (1707-1783) el que lo denominó de esta manera y lo analizó. De lado 3 existen únicamente 12 cuadrados latinos, de lado 4 hay 576, y de lado 9, 5.524.751.496.156.892.842.531.225.600. Si eliminamos simetrías, giros y permutaciones de líneas y columnas, el número de cuadrados latinos de lado 9 decrece hasta los 377.597.570.964.258.816, como demostraron Stanley E. Bammel y Jerome Rothstein en 1975. En el sudoku se disponen los dígitos del 1 al 9, por lo que existen menos sudokus que cuadrados latinos. Gracias a los ordenadores se ha establecido que el número total es de 6.670.903.752.021.072.936.960, resultado obtenido por Bertram Felgenhauer de la Universidad Técnica de Dresde, y Frazer Jarvis de la Universidad de Sheffield, comprobando varias veces ese número. En el capítulo Charlie redondea el número diciendo que son 6.7 sextillones (6.67 x 10^{21}). El número es inmenso y difícil imaginarnos su magnitud. Plantearos la siguiente pregunta: ¿Cuál de los siguientes valores creéis que se acerca más a ese número?

1.- El número de segundos que hay en un año.
2.- El número de segundos que hay en 100 años.
3.- El número de seres humanos sobre la Tierra.
4.- La masa terrestre en toneladas métricas.
5.- El número de estrellas del Universo conocido.

Parece poco probable que alguien pueda escribirlos todos. En realidad escribiendo uno por minuto, sin parar en 100 años, no lograría escribir un 1% del total. ¡Vamos que ni lo intenten! Por cierto el que aparece en la ilustración dicen que es de los difíciles.

Episodio 2.19 – La materia oscura (*Dark Matter*)

Fechas de emisión: Lunes, 12 de Febrero (22:20), Martes 13 de Febrero (17:45), Sábado 24 de Febrero (21:30), Domingo 25 (15:30).

Argumento: En un instituto de Secundaria se producen varios disparos, muriendo varias personas. El equipo de Don tratará de encontrar a los asesinos cuyo comportamiento parece obedecer a las reglas de unos juegos de ordenador. Charlie, que había jurado no volver a pisar un instituto desde que se graduó, tendrá que echar una mano.

Aspectos Matemáticos: Chips de radio frecuencia (RFID)

La única referencia relacionada ligeramente con las matemáticas del capítulo es el de la localización de los estudiantes mediante unos chips RFID implementados en sus tarjetas de

identificación escolares. Describamos brevemente en qué consisten.
Las siglas anteriores corresponden a identificadores por radio-frecuencias (**R**adio **F**requency  **Id**entification). Existen básicamente dos tipos de chips de estas características: los activos y los pasivos. Son dispositivos pequeños, del tamaño de una pegatina, que se adhieren a objetos, animales o personas. En el **sistema activo** el chip incorpora una radio minúscula con sus pilas y su antena. Un administrador del sistema (normalmente unas antenas más potentes que hacen la función de transmisor-receptor) envía en un momento dado una señal al chip (que para ahorrar batería está normalmente apagado) y éste manda datos que el fabricante ha implementado en el aparato (tales como lugar de fabricación, número de serie y otros tipos de identificadores) a través de su propia antena. El administrador recoge estos datos, los registra y almacena. Los chips de este tipo tienen un tamaño aproximado de una moneda y sus rangos prácticos de alcance pueden llegar a los diez metros, siendo la duración de su batería de hasta varios años.

En el capítulo cada alumno tiene uno de estos chips en su tarjeta de estudiante en los que además se incluyen sus datos personales. En varios lugares del instituto hay antenas que envían señales a estos chips cada cierto tiempo. Cuando un alumno se encuentra dentro de la zona de influencia de estas antenas administradoras, el chip RFID se enciende y manda sus datos que son almacenados. El elevado número de alumnos y la frecuencia con que se mandan datos (que puede ser cada segundo) constituyen una cantidad impresionante de datos que es sin embargo fácilmente clasificada y analizada por un programa informático. Esto permite conocer donde se encuentra cada estudiante en todo momento dentro de un rango de influencia concreto.

Los **receptores pasivos** no tienen un sistema propio de energía sino que son “alimentados” por la señal transmitida por el transmisor-receptor. Esta señal es una onda electromagnética con capacidad suficiente para activar el circuito del chip que es alterada por la información que contiene y rebotada al receptor. Estos chips son más baratos (aproximadamente la décima parte del valor de los “activos”). Es previsible que en un futuro no muy lejano todos los objetos tengan un chip de éstos. Es decir, pantalones, zapatos, libros, etc., tendrán un chip en el que constará donde se compró el artículo, cuando y quien lo hizo. Imaginaos: uno entra en una tienda y una voz sintetizada que comience a decir, “Hola, fulanito de tal. Esos pantalones que llevas los compraste hace tres años y va siendo hora de que los cambies. En la planta cuarta está la sección de caballero en la que encontrarás…., y bla, bla, bla”. ¡Qué horror!, ¿verdad?

Vayamos a las matemáticas. Supongamos un objeto en el suelo situado en unas coordenadas (x, y). Supongamos que el objeto comienza a moverse. Sus coordenadas camban con el tiempo. Después de t segundos el objeto se encuentra en un punto (x(t), y(t)). Por ejemplo si su posición en el instante t viniera dada por (3t-2, 2t+5), entonces el objeto se está moviendo a lo largo de una línea recta. Al comienzo estaría en el punto (-2, 5) y al cabo de 4 segundos estaría en (10, 13).

El camino que recorre el objeto se denomina trayectoria. La descripción de su posición en función del tiempo se llama dar una parametrización. Charlie en el episodio que nos ocupa trata de parametrizar la trayectoria de cada alumno a lo largo del instituto durante los disparos. Utiliza para ello los datos obtenidos por los chips de los carnés de los estudiantes: fija un sistema de coordenadas para cada habitación a partir de un plano del instituto (coloca el origen en un lugar central de cada sala, designa dos pasillos como ejes X, Y), después elige un estudiante cualquiera y toma sus datos del chip desde el receptor que esté más próximo a él en cada momento. Con estos datos, un ordenador calcula las coordenadas del estudiante, lo que da una parametrización de su trayectoria.
De forma similar lo hace con el resto de alumnos presentes en cada habitación y posteriormente utiliza un programa de animación que le muestre gráficamente los movimientos de todos los estudiantes a la vez durante el tiempo que duraron los disparos. Con ello trata de localizar y describir los movimientos de los "pistoleros".

En http://es.wikiedia.org/wiki/RFID podéis ampliar la información relativa a este tipo de dispositivos.

Episodio 2.20 – Disparos y Rosas (*Guns and Roses*)

Fechas de emisión: Lunes 19 de Febrero (22:20), Martes 20 de Febrero (17:45), Sábado 3 de Marzo (21:30), Domingo 4 de Marzo (15:30).

Argumento: Una agente del ATF (Siglas correspondientes a Alcohol, Tobacco and Firearms, es decir, se trata de una organización Norteamericana que depende del Departamento del Tesoro, dedicada a estos asuntos, Alcohol, Tabaco y Armas de fuego), Nikki Amstead, aparece muerta en su domicilio en lo que parece ser un suicidio. Su compañero Eric Turner le pide a Don que le ayude a investigar el caso. A Don no parece hacerle demasiada gracia. Conocía a la fallecida demasiado bien…

Aspectos Matemáticos: Biomatemáticas: Análisis de ondas sonoras (sónar) y alineación de pruebas de ADN. Producto matricial.

Cuando la agente aparece muerta, el sonido del disparo fue registrado por varios instrumentos creando lo que se conoce como "huella acústica" de la habitación y sus ocupantes. De forma análoga a como los murciélagos y otros animales emplean su **sónar** natural, Charlie será capaz de descubrir a partir de esas grabaciones que algo (o alguien) falta en la habitación.
El fundamento del sónar de los submarinos (y los de los animales mencionados) se basa en la medición del tiempo que un sonido tarda desde que se envía hasta que vuelve rebotado. Lo que los humanos hemos desarrollado es muy simple (no es más que estimar la distancia de acuerdo a la velocidad según el medio en el que se emita el sonido, dividiendo el resultado a la mitad ya que el sonido va y viene, y aplicar ciertos valores de corrección) en los animales es mucho más sutil. Los murciélagos emiten ultrasonidos de una duración de uno o dos milisegundos cada uno en una proporción que puede variar de 20 a 60 ultrasonidos ¡por segundo! A una frecuencia que varía entre los 20 – 100 Kilohertzios (un kilohertzio, 1 KHz, es mil ciclos por segundo). Aunque las comparaciones ya sabemos como son, en este caso es bastante significativa: el ser humano sólo percibe frecuencias entre 20 Hertzios y 20 Kilohertzios, y la frecuencia de la voz humana es de 1 KHz. Además cada especie de murciélago tiene su propia "firma vocal"; de hecho algunos naturalistas son capaces de reconocer la especie de murciélago simplemente oyendo sus chillidos.
Otro aspecto relacionado con el eco es el **efecto Doppler**. Es la variación aparente de la frecuencia de una onda al ser detectada por un observador en movimiento relativo frente al emisor. Christian Andreas Doppler (1803-1853), físico y matemático austriaco, propuso este efecto en 1842.
El ejemplo clásico es el del paso de un tren o una ambulancia a nuestro lado: el sonido de la sirena que oímos parece distorsionado según lo lejos o cerca que estemos de dicha sirena. Incluso los murciélagos con sus ultrasonidos perciben este efecto. Cuando un murciélago lanza ultrasonidos para averiguar la distancia a la que está un insecto (para zampárselo), el eco que le retorna está a una frecuencia más alta que la que utilizó al enviarlo si el bicho se está acercando; al contrario si éste trata de escapar.

Tal y como se van obteniendo nuevas pruebas, a Charlie cada vez le parece menos verosímil la hipótesis del suicidio. Para aclarar las cosas un poco más, decide utilizar lo que él denomina "test de estrés de Holmes-Rahe modificado". Este test "mide" el nivel de estrés de una persona a partir de valores obtenidos en situaciones concretas. El resultado es un número. Cuanto más alto es, mayor estrés soporta la persona en su vida. Para explicar cómo funciona alude a las puntuaciones que se dan en los torneos de monopatín: la puntuación dada por los jueces mide la dificultad del salto, la puesta en escena del mismo, etc. Este sistema de puntuación se utiliza también con algunas variaciones en deportes olímpicos como la gimnasia o los saltos de trampolín. Con un ejemplo lo entenderemos mejor. Supongamos que un atleta va a realizar seis ejercicios baremados con un orden de dificultad de 2.3, 3.1, 3.9, 3.6, 2.8 y 3.2, respectivamente. Hay tres jueces que dan las siguientes puntuaciones a cada ejercicio:

Juez 1: 5.1, 4.2, 3.9, 5.0, 5.8, 5.2
Juez 2: 5.2, 3.8, 4.0, 4.8, 5.7, 5.4
Juez 3: 4.9, 4.0, 4.2, 4.9, 5.6, 5.6

La nota final de cada juez vendrá dada por el producto de sus puntuaciones por el nivel de dificultad del ejercicio evaluado. Y hacer estas sumas y productos resulta un tanto engorroso. Para facilitar la labor se utiliza el **producto matricial**. Colocamos los niveles de dificultad en una matriz 1 x 6 (un vector en este caso) y las puntuaciones de los jueces en una matriz 6 x 3 del siguiente modo:

$$(2.3, 3,1, 3.9, 3.6, 2.8, 3.2)\begin{pmatrix} 5.1 & 5.2 & 4.9 \\ 4.2 & 3.8 & 4.0 \\ 3.9 & 4.0 & 4.2 \\ 5.0 & 4.8 & 4.9 \\ 5.8 & 5.7 & 5.6 \\ 5.2 & 5.4 & 5.6 \end{pmatrix} = (90.84, 89.96, 91.29)$$

Así obtenemos de forma sencilla (en las competiciones reales, lo hace el ordenador o la calculadora) las puntuaciones totales de cada juez. Todo se basa en una eficaz disposición de los datos. Un ejemplo curioso para mostrar a los alumnos una aplicación de las matrices. Volviendo al test de estrés. Se pide al paciente que rellene un formulario en el que aparece una lista de incidencias (muerte del cónyuge, separación matrimonial, pérdida de trabajo, etc.) y que marque con una cruz aquellos que han sucedido en su vida en el último año. El modelo de Holmes-Rahe da a cada uno de ellos un baremo (similar al orden de dificultad del ejemplo de las puntuaciones deportivas). Una vez relleno (suelen incluir unas 40 incidencias con la posibilidad de añadir otras que no aparezcan) un producto matricial como el anterior nos da un valor final. Si es mayor de cierto umbral, el paciente tiene una predisposición a enfermar por estrés. Si el puntaje es menor que otro valor (que suele ser la mitad del umbral anterior) las posibilidades de enfermar son escasas.

Además de recoger los sonidos efectuados antes de la muerte de la víctima, el equipo del FBI toma diferentes muestras de ADN de la habitación. Analizando estas muestras, Charlie tratará de obtener algún dato sobre los familiares del sospechoso. Aunque las muestras de ADN no permiten identificar a una persona en concreto, si que se pueden deducir algunos rasgos como enfermedades congénitas, color del pelo, si tiene pecas, etc. Existen empresas que han conformado índices estadísticos de la información que las cadenas de ADN suministran. Charlie emplea una técnica denominada **alineación de secuencias de ADN**. Consiste en comparar dos de ellas atendiendo a sus componentes. Es conocido (y si no lo recordamos ahora) que el ADN se compone de cuatro nucleótidos que contienen las bases adenina (A), guanina (G), citosina (C) y tiamina (T). En estado natural, los pares de bases se forman sólo entre A y T, y G y C en forma de doble hélice; por tanto, la secuencia de las bases de una de las dos cadenas se puede deducir de la otra. Dadas dos cadenas de ADN se trata de casar el

máximo número de bases posible (sin reordenarlas obviamente). La tarea no es trivial: el ADN del ser humano contiene unos 3×10^9 pares de nucleótidos.
Este procedimiento es útil para observar la evolución de una especie comparando las secuencias de ADN de generaciones sucesivas. La manera de decidir el probable alineamiento de un par de secuencias de ADN es mediante algoritmos como los de Needleman-Wunsch o Smith-Waterman. Suelen ser variantes del más conocido algoritmo de Dijkstra. En este enlace puede ampliarse esta información un poco más.
El estudio de las matemáticas aplicadas a la Biología conforman una disciplina conocida como Biomatemáticas.

Episodio 2.21 – Disparos a discreción (*Rampage*)

Fechas de emisión: Lunes 26 de Febrero (22:20), Martes 27 de Febrero (17:45), Sábado 10 de Marzo (21:30), Domingo 11 de Marzo (15:30).

Argumento: Un individuo entra en las oficinas del FBI disparando a diestro y siniestro. Los agentes tratarán de determinar los motivos que le indujeron a comportarse así y su posible relación con un peligroso traficante de armas que se encuentra a la espera de juicio. Charlie está un tanto asustado porque casi le alcanzan los disparos y no quiere ni oír hablar de volver a las dependencias del FBI, lo cual dificulta la resolución del caso.

Aspectos Matemáticos: Movimiento browniano, Hipercubos.

Lo primero que piensa Charlie sobre el comportamiento del sujeto es que se ajusta a un **movimiento browniano**. El movimiento browniano es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo, polen en una gota de agua). Recibe su nombre en honor a Robert Brown que lo describe en 1827. En 1785, el mismo fenómeno había sido descrito por Jan Ingenhousz sobre partículas de carbón en alcohol. En 1900, Louis Bachelier describió por primera vez el movimiento browniano matemáticamente. Posteriormente, en 1923, Norbert Wiener y Paul Lévy elaboraron el modelo que sigue una partícula que en cada instante se desplaza de manera independiente de su pasado, como si la partícula “olvidara” de dónde viene y decidiese continuamente, y mediante un procedimiento aleatorio, hacia dónde ir. Es pues un movimiento que, a pesar de ser continuo, cambia en todo punto de dirección y de

velocidad; tiene trayectoria continua, pero no tiene tangente en ningún punto. En 1945 Albert Einstein dedicó uno de sus artículos a este asunto.
El movimiento aleatorio de estas partículas se debe a que su superficie es bombardeada incesantemente por las moléculas del fluido sometidas a una agitación térmica. Este bombardeo a escala atómica no es siempre completamente uniforme y sufre variaciones estadísticas importantes. Así la presión ejercida sobre los lados puede variar ligeramente con el tiempo provocando el movimiento observado cuyo aspecto parece completamente errático. Matemáticamente se modeliza utilizando un proceso iterativo en el que cada paso está determinado por una distribución normal de probabilidad de media nula y desviación estandar que varía dependiendo del modelo.
En la vida cotidiana podemos observar este fenómeno fácilmente. ¿Quién no se ha fijado en las partículas de polvo que hay en el aire cuando un rayo de sol entra por la ventana de nuestra casa? Si a continuación golpeamos la superficie de un sofá o de un cojín, observaremos como esas partículas de polvo se mueven en todas las direcciones de un modo aparentemente caótico. Ese mismo efecto lo observamos cuando miramos en la oscuridad del cine al foco de proyección. O al fijarnos en la bocanada de humo de un fumador. Son ejemplos en los que el fluido es el aire atmosférico. Cuando tenemos que hacer la suspensión de un medicamento en agua, echamos el contenido del mismo en un vaso y vemos como, una vez que entra en contacto con el agua, esas partículas se mueven sin parar, de un modo zigzagueante y en todas las direcciones. También la difusión y la ósmosis son fenómenos basados en el movimiento browniano. El movimiento browniano está muy ligado a las caminatas aleatorias de las que hablábamos en el episodio del mes pasado *Juegos Mentales*, y a los **fractales**. Una actividad sencilla de llevar a cabo con alumnos sobre el movimiento Browniano es el conocido **juego del Caos**
. Una versión de este juego es la siguiente: se dibujan los vértices de un triángulo equilátero; a continuación se elige un punto al azar que será el punto inicial de nuestro experimento. Se calcula el punto medio entre este punto inicial y uno de los vértices del triángulo elegido también al azar. Se traza el segmento que une el punto inicial con este punto medio. Este punto pasa a ser el nuevo valor inicial. A continuación se hace lo mismo, se elige un vértice del triángulo, se calcula el punto medio entre éste y el nuevo valor inicial, se traza el segmento correspondiente y así sucesivamente. Tras unas cuantas iteraciones, compárense los gráficos de varios alumnos. ¿Se trata de verdad de un proceso aleatorio?
Una vez que Charlie analice los movimientos del sujeto, concluirá que de azar nada: da la impresión de que trata de evitar a una de las personas que hay en la sala. Pero no fusilemos todo el argumento, ….

En otro instante los hermanos discuten sobre acotación de desigualdades como un procedimiento para intentar localizar a un sospechoso. Conocida la posición del individuo en un momento dado, se trata de acotar la zona cercana de influencia a la que éste podría desplazarse. Su conversación es interrumpida, pero desde el punto de vista matemático, se utilizan diagramas de Venn (círculos en dos dimensiones, y esferas en tres) en muchas ocasiones para acotar o estrechar las posibilidades de búsqueda de algo o alguien.

Finalmente hay una conversación entre Charlie y Amita, su alumna doctorando, sobre la cuarta dimensión. 

En concreto de refieren a un **Hipercubo** (también conocido como ***Tesseract***). En realidad no son lo mismo. Un hipercubo es el nombre con el que se conoce cualquier objeto de más de tres dimensiones, mientras que tesseract sería el equivalente en cuatro dimensiones de un cubo. O sea un tesseract es un hipercubo de cuatro dimensiones. En el siguiente enlace podéis tratar de imaginar cómo sería mediante la explicación y posterior descarga de un fichero ejecutable. Tenéis que buscar el artículo titulado *Hipercubo tetradimensional* (hacia el final de la página).
Existen multitud de referencias en el Arte y la Literatura a los hipercubos (daría para varios artículos). En Planilandia , la famosa novela de Edwin A. Abbott, el narrador imagina uno de estos hipercubos. En la sección de reseñas de libros de DivulgaMAT podéis ver la de esta novela. Recientemente ha sido reeditada, pero por si no la encontráis o no queréis esperar, picando en el título podéis descargárosla íntegra en formato pdf. Por añadir un ejemplo artístico, en *Crucifixión* (*Corpus Hypercubus*), de Salvador Dalí, 1954, Jesucristo aparece sobre el desarrollo de un hipercubo (si el desarrollo de un cubo de 3 dimensiones se despliega en una cruz de 6 cuadrados, el tesseract despliega sus 8 cubos tridimensionales en una cruz, la que dibuja Dalí). La película *Cube 2: Hypercube* (secuela horrible de la original, sólo superada (en mala) por la siguiente *Cube Zero* que dicen que es una precuela), los personajes están atrapados en un hipercubo aunque si no nos lo dicen ni nos enteramos.