En la columna anterior hablamos de la autorreferencia y las paradojas. Las paradojas resultan divertidas, desafiantes. En lo personal, siempre me atrajeron porque parece haber algo intrínsecamente malo en ellas, algo inquietante, algo que se me escapa y no puedo llegar a definir.

También es inquietante la autorreferencia en el Quijote. Borges explicó por qué en *"Magia s parciales del Quijote"* (Otras Inquisiciones), y como lo escribió mucho mejor de lo que yo podría siquiera intentar -no ya hacer-, lo transcribo acá:

(...) en la segunda parte; los protagonistas han leído la primera, los protagonistas del Quijote son, asimismo, lectores del Quijote. (...) ¿Por qué nos inquieta que Don Quijote sea lector del Quijote (...)? Creo haber dado con la causa: tales inversiones sugieren que si los caracteres de una ficción pueden ser lectores o espectadores, nosotros, sus lectores o espectadores, podemos ser ficticios.

Borges menciona otras tres obras autorreferentes: Hamlet es un espectador de una obra de teatro que reproduce su historia, la de *Hamlet*. En la Noche DCII, es narrada la historia del rey de *Las Mil y una Noches*. La tercera es el *Ramay ana*.

Pero más de uno tiene derecho a preguntarnos en este momento: ¿Qué papel juega la autorreferencia en las matemáticas? ¿Es sólo su capacidad de engendrar contradicciones paradójicas? ¿Qué interés puede tener en las matemáticas?

En las matemáticas, las paradojas nos acompañan desde que Zenón de Elea desafió todas las verdades evidentes sobre el movimiento con ellas: una flecha no podrá volar hacia su blanco, Aquiles no podrá alcanzar a la tortuga tras haberle dado una mínima ventaja. Desde entonces, generaciones de matemáticos se han maravillado con ellas y se han dedicado a su refutación (y la más clara de las refutaciones de Zenón es 'à la Berkeley' pero sin patear piedras: desafiar al que cree en ellas a que corra, y tras darle una ventaja de partida, lanzarle una flecha... estos tiempos tan modernos, sin tantos arcos ni flechas, dificultan -por suerte- razonamientos lógicos tan puros). La autorreferencia es también antigua, desde que Epiménides el cretense afirmó "todos los cretenses son mentirosos".

Hace unos cien años, las paradojas ocuparon un lugar central en la discusión de los fundamentos de las matemáticas. Cerca del final del siglo XIX, Frege y Cantor en Alemania intentaron sentar las bases de la matemática utilizando la teoría de conjuntos. Pero entonces aparecieron distintas paradojas que atacaban esta fundamentación. Entre las más conocidas, están las de Burali-Forti, Russell, Richard, y la de Grelling y Nelson. Describiremos aquí la paradoja de Russell, pero antes volvamos un momento al Quijote.

Mencionamos antes que en el Quijote se mencionan distintos libros: hay muchos de caballería, pero también está *la Galatea*, del propio Cervantes. Y de Cervantes, también está el propio

Quijote: en el segundo volumen, el Bachiller Sansón Carrasco cuenta que lo leyó. Pensando en el Quijote como un todo, ambos volúmenes juntos, podemos decir que es un libro que se cita a sí mismo.

La idea de Russell fue simple: considerar aquellos conjuntos tales que el conjunto mismo es uno de sus elementos. Haciendo una analogía con los libros, podríamos decir que un libro 'se contiene a sí mismo' si se menciona en el texto (el Quijote sería un libro de este tipo). Russell se pregunta ahora por un libro muy particular: un catálogo de todos los libros que no se contienen a sí mismos, y únicamente éstos (el Quijote, como se contiene a sí mismo, no figurará en este catálogo).

Este catálogo es paradójico: si se contiene a sí mismo, menciona un libro que se contiene a si mismo... lo cual contradice que incluye únicamente a los que no se contienen a si mismos; si no se contiene a si mismo... contradice que incluye a todos los que no se contienen a si mismos.

Esta paradoja tuvo un objetivo directo: el intento de Frege de fundamentar la matemática utilizando la teoría de conjuntos. Es conocida la reacción de Frege al enterarse de esta paradoja, y una nota al final del segundo volumen aclara:

Difícilmente puede ocurrirle a un científico algo menos deseable que ver tambalearse los fundamentos de su obra recién terminada. Me he visto en esta posición por una carta del señor Bertrand Russell cuando esta obra estaba en la imprenta.

La autorreferencia, el conjunto que se contiene a si mismo (el libro que se cita a sí mismo) era el punto clave en el argumento de Russell.
En aquella época, Russell le contó su argumento a Whitehead, con quien estaba trabajando en el problema de los fundamentos de la matemática. La respuesta de su colega fue contundente: "nunca habrá otra vez una alegre y confiada mañana".

Aclaremos que Russell y Whitehead se las ingeniaron para evitar las contradicciones que aparecían en la obra de Frege: introdujeron una jerarquía en los conjuntos según cuáles son sus elementos, tales que los de cada nivel, sólo pueden tener como elementos a conjuntos de los niveles inferiores. Un conjunto de una clase no tendrá como elementos otro conjuntos de la misma clase, si quiero agrupar de alguna manera conjuntos, eso será un conjunto de otra clase. Esto eliminaba la autorreferencia, la posibilidad de auto-contención.

Paradójicamente (!) la situación se repetiría unos veinte años después, pero ahora sería Russell quien vería su obra atacada (los {it Principia Mathematica}, escritos junto a A. N. Withehead)... y otra vez con un argumento autorreferente. Podríamos decir que la reflexión de Whitehead resultó premonitoria.

Pero ese será el tema de nuestra tercera (y seguramente última) columna sobre el Quijote y las matemáticas.

Links. Algunos recursos disponibles en la web.

http://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox/ - Russell Paradox, A. D. Irvine, Stanford Encyclopedia of Philosophy.

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/17-1-b-paradoja.html - La paradoja de Russell, M. Carmen Márquez García, SAEM Thales.

http://plato.stanford.edu/entries/frege/ - Gottlob Frege, Edward N. Zalta, Stanford Encyclopedia of Philosophy.

http://www2.uah.es/estudios_de_organizacion/epistemologia/russell.htm - Bertrand Russell, Dr. José Rodríguez de Rivera, Depto. de Ccias. Empresariales, Univ. de Alcalá de Henares.

http://www.cut-the-knot.org/selfreference/principia.gif - Pag. 362 de los Principia Mathematica, donde Russell y Whitehead demuestran que 1+1=2, vía http://www.cut-the-knot.org/selfreference/russell.shtml , por Alexander Bogomolny.

Juan Pablo Pinasco
e-mail: jpinasco-arroba-ungs.edu.ar