Papiroflexia y Matemáticas

Cualquier persona interesada en la educación matemática en los niveles obligatorios, reconoce que para aprender Matemáticas hay que hacer Matemáticas. En estas etapas es muy importante el aspecto manipulativo de esta materia. Por ello no es raro encontrar multitud de materiales y recursos como tangram, geoplanos, puzzles, varillas, troqueles, etc. que potencian ese aspecto de hacer Matemáticas. Queremos mostrar uno de los recursos más usuales a nuestro alrededor, pero no por ello menos atractivo: el papel.

Se considera la papiroflexia (también llamada origami por su ascendencia japonesa) como el arte de realizar figuras doblando papel, sin cortar ni pegar. Todos nos hemos sentido atraídos en algún momento por ese arte. Aunque alguien piense que no es propio de personas adultas hacer figuritas de papel, seguro que en otras épocas todos hemos realizado, con verdadero deleite, aviones, pajaritas, barcos o figuras más elaboradas. El trabajar con papel, y conseguir elementos reconocibles después de realizar algunos pliegues, es una actividad altamente gratificante.

Por todo ello quien esté preocupado por la didáctica de la matemática no puede dejar de lado este recurso tan motivante para nuestros alumnos. En clase el plegado de papel se puede utilizar en muchos aspectos del currículo: desde algunos fáciles, como demostrar que los tres ángulos de un triángulo suman 180º, hasta otros más complicados, como conseguir las cónicas a partir de su envolvente o una espiral logarítmica a partir de un hexágono. Podemos también pasar del plano al espacio, resultando especialmente atractivo conseguir poliedros y otras figuras de tres dimensiones, bien directamente por plegado o bien uniendo módulos previamente doblados.

Además es posible afrontar el trabajo en clase con distintos niveles de dificultad: desde la mera construcción, por ejemplo, de un triángulo equilátero, hasta el estudio matemático de por qué lo que obtenemos es, en realidad, equilátero.

El profesor del I.E.S. nº 1 de Requena (Valencia), Antonio Ledesma López, que es miembro de la Asociación Española de Papiroflexia, lleva más de quince años trabajando con sus alumnos en talleres utilizando la papiroflexia. En el número extraordinario de 1996 del Boletín de la A.E.P., dedicado íntegramente a las Matemáticas, incluía el siguiente decálogo dirigido a los profesores de Matemáticas, en donde se recogen las ventajas de utilizar este recurso.

"Con las actividades de papiroflexia:

1. Se valora la interrelación entre la actividad manual y la intelectual.
2. Se consigue la apreciación de las componentes estéticas de los objetos y las formas.
3. Se facilita la comprensión de los conceptos geométricos.
4. Se mejora la percepción espacial.
5. Se fomenta la capacidad para hacer preguntas.
6. Se interpreta una nueva simbología.
7. Se propicia la precisión en el trabajo manual.
8. Se ve la utilidad del trabajo en equipo.
9. Se aprecia la belleza ligada a regularidades y cadencias.
10. Se desarrolla la fantasía, la creatividad y, lo que es muy importante, no se pierde en ningún momento el carácter lúdico."

La tira de papel como recurso matemático

No es extraño utilizar en clase una tira de papel para presentar la Cinta de Möbius, que sorprende por sus propiedades, y por lo inesperado de los resultados que se obtienen al cortarla convenientemente. Pero también podemos utilizar una tira de papel para conseguir algunos de los polígonos regulares, algo que la primera vez resulta tan asombroso e inesperado para los alumnos como la propia Cinta de Möbius. A este ejemplo sencillo de papiroflexia vamos a dedicar hoy esta sección.

Para esta primera parte hemos tomado información del profesor Miguel de Guzmán, en concreto de su artículo "La tira de geometría

en la tira de papel" que puede consultarse en Internet (ver ***Para saber más***
).

a) Cuadrado.

Lo más fácil es obtener un cuadrado. Partimos de una tira de papel cuyo extremo sea recto y perpendicular al lado. Si no fuese así, en cualquier lugar de la tira doblaríamos haciendo coincidir un trozo de un lado sobre sí mismo y resultaría un doblez de las características pedidas.

Para obtener un cuadrado basta doblar la cinta por un extremo, de forma que partiendo desde un vértice se lleva el otro vértice sobre el lado opuesto. En el lugar donde descansa el vértice que se desplaza, se realiza un pliegue perpendicular al lado y ya tenemos un cuadrado.

A los alumnos debe llamársele la atención de que lo único que hemos hecho ha sido aplicar las propiedades del cuadrado, que es un polígono con los ángulos de 90º y los cuatro lados iguales.

b) Triángulo equilátero.

Para conseguir un triángulo equilátero torcemos un extremo de la tira por encima del lado, como si hiciéramos un cucurucho de papel, y aplanamos ese cono de modo que uno de los lados del triángulo coincida con el filo de la tira de papel.

Dado que los lados coinciden, el vértice superior está dividiendo el ángulo de 180º (correspondiente al lado que se ha girado) en tres partes iguales, por lo que obtenemos un ángulo de 60º. Se puede comprobar fácilmente que los restantes ángulos también lo son, luego el triángulo es equilátero.

c) Hexágono.

El hexágono se obtiene fácilmente del triángulo anterior. Para ello es suficiente dividir la tira de papel en dos partes mediante un pliegue longitudinal. En la tira se apreciarán los dobleces correspondientes al triángulo (unos estarán por un lado y el resto por el otro). Si remarcamos todos esos pliegues, al desdoblar la tira podremos observar fácilmente las líneas que definen el hexágono.

d) Pentágono.

Suponemos que lo más conocido para nuestros lectores (pues es posible encontrarlo en muy diversa bibliografía) será cómo conseguir un pentágono regular; sin embargo, es el más difícil de imaginar por los alumnos, y por eso el más sorprendente.

Lo que debemos hacer es un nudo con el papel, de forma que si tiramos con cuidado de las puntas del lazo haciendo que coincidan los pliegues podemos observar el pentágono regular.La primera vez que se hace cuesta conseguir que los pliegues formen exactamente los lados del polígono, pues es fácil que la tira no coincida con alguna de las vueltas. Lo mismo ocurre al

principio con el triángulo, pero con un poco de práctica sale perfecto.

A diferencia de los casos anteriores, en el pentágono en necesario tener en cuenta la longitud de la cinta, pues si es corta no puede realizarse bien el nudo. Nuestro consejo es que la longitud sea unas ocho veces (como mínimo unas siete) la anchura de la cinta, para que así se pueda manipular bien.

Este pentágono tiene una doble utilidad, ya que si los extremos de la tira que sobran de la figura tienen aproximadamente la misma longitud que un lado (en su parte mayor), con doce piezas iguales, se puede construir un dodecaedro como vemos en la imagen.

Para conseguirlo hay que tener mucha paciencia y cuidado. El principal problema es que una vez terminado, no queda rígido, por lo que se deshace al primer golpe que se le dé, es un típico "mírame y no me toques". Pero es interesante, como dijimos, pasar del plano al espacio.

e) Otros dobleces con una tira de papel.

En su taller de "Polígonos con Papel", el profesor mejicano Víctor Larios Osorio nos muestra cómo conseguir polígonos regulares de distinta cantidad de lados y de distinta presentación.

Su forma de trabajo consiste en realizar una serie de dobleces en una larga tira de papel, y posteriormente doblar la cinta sobre esos pliegues, obteniendo los lados de los polígonos, y dejando un hueco dentro de ellos.

Para no alargar este artículo vamos a presentar el pliegue más simple para obtener un hexágono, a partir de triángulos equiláteros.

Comenzamos por un extremo de la tira doblando hacia arriba y conseguimos un pliegue. Se desdobla ese pliegue, y ahora se dobla ese mismo extremo hacia abajo, siguiendo la línea definida por el doblez anterior. Se continúa este proceso alternando el doblar hacia arriba y hacia abajo, y vamos obteniendo en la tira una serie de triángulos como puede apreciarse en la foto.

Si desechamos los primeros triángulos de la tira que no sean equiláteros, con los restantes podemos construir un hexágono, sin más que doblar como se ve en la foto anterior.

Si nos fijamos en la tira, cada dos triángulos forman un rombo. Si en cada rombo realizamos un doblez que corresponda a la diagonal mayor, y doblamos sobre ese pliegue, se unen dos lados de uno de los triángulos,

y si después doblamos por el pliegue donde coincidían los lados anteriores (del lado donde se cierra el doblez anterior podemos obtener el hexágono de la izquierda de la siguiente fotografía. Si ese doblez extra lo alternamos haciéndolo en un rombo sí y en otro no, obtenemos el hexágono de la derecha.

Para terminar, si el procedimiento de doblar arriba y abajo se realiza con dos dobleces sobre pliegues anteriores hacia arriba y luego dos dobleces hacia abajo, podemos obtener una serie de dobleces cortos y largos. Si doblamos por esos pliegues (bien por los

cortos o por alguno de los largos) pueden obtenerse los pentágonos que aparecen en la siguiente foto.

En la página de donde está sacado este procedimiento puede encontrarse cómo conseguir heptágonos, decágonos y eneágonos así como un estudio sobre qué polígonos regulares pueden obtenerse con este proceso.

Para acabar

Hemos querido presentar en este artículo una serie de actividades con papel que despierten la curiosidad y el deseo de profundizar en este apasionante mundo de la papiroflexia. Existen otras muchas actividades para potenciar los aspectos manipulativos y favorecer los aspectos visuales y de percepción espacial, que además están relacionados con las Matemáticas de nuestro currículo: trabajar distintos tipos de ángulos mediante dobleces, trazar paralelas y perpendiculares, estudiar los puntos y rectas notables de un triángulo… hasta la construcción de poliedros regulares y semirregulares, estudiando previamente los polígonos que limitan su volumen o la división de un poliedro en trozos iguales.

Pero todo eso será en otra ocasión.

Para saber más

Existen dos páginas web de las que están tomadas casi todas las ideas anteriores que son:
http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/GeometLab/latira.htm
http://www.uaq.mx/matemáticas/origami/taller2.html

Además en Internet hay una inmensidad de páginas relacionadas con papiroflexia en general, pero muchas de ellas tienen contenidos matemáticos. Existen un par de páginas con muchos enlaces a este tipo de páginas donde cualquier interesado puede perderse durante muchas horas.
http://members.fortunecity.es/jtbm/otras_paginas.html
http://www.sectormatematica.cl/origami/enlaori.htm

Aparte de lo anterior se pueden consultar las siguientes referencias, que disponen de amplia bibliografía sobre el tema:

- LEDESMA LÓPEZ, Antonio (1996): "Matemáticas con papel en la Enseñanza Secundaria Obligatoria". En Actas de *VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática THALES*. Córdoba, 347-358.

- LEDESMA LÓPEZ, Antonio (1996): *Papiroflexia y Matemáticas*. Boletín de la Asociación Española de Papiroflexia. Boletín extraordinario. Zamora.