1. Introducción.

Dentro del inmenso universo de juegos que podemos encontrar actualmente, existen algunos en los que, durante el desarrollo del juego, podemos girar o incluso dar la vuelta a las fichas con las que jugamos. Suelen ser fichas que tienen distintos colores o distintas funciones según estén en una posición u otra.

De este tipo de juegos, quizás los más conocidos sean los del tipo Othello o Reversi, en donde disponemos de fichas de dos colores, por una cara blanca y por otra negra, de forma que cuando se capturan las del contrario de les da la vuelta para posicionarlas de nuestro color.

En este artículo veremos juegos en los que tenemos son fichas de este tipo *reversi* o materiales más usuales y cotidianos.

Cuando realizamos experiencias de matemáticas en la calle, suelen ser muy atractivos los juegos solitarios en los que hay que partir de una determinada situación, e intentar llegar a otra con una serie de pasos, es lo que se suele indicar diciendo que un estado B es accesible desde otro estado A mediante una serie de transiciones, como nos indican en el artículo sobre invariantes que hay en la bibliografía.

En esta ocasión vamos a comenzar planteando una serie de juegos solitarios, en los que intentaremos buscar la solución, si la hay, para acabar con un juego de estrategia dentro del mismo tipo de puesta en escena.

2. Arriba y abajo.

Del artículo que he citado antes he sacado el siguiente enunciado, que nos puede servir de puntos de partida para lo que vamos a trabajar en estas páginas.

Sobre una mesa hay 11 vasos, 5 de ellos boca arriba y 6 boca abajo. Un movimiento consiste en escoger dos vasos cualesquiera y voltearlos simultáneamente. ¿Será posible, mediante una sucesión de estos movimientos, dejar todos los vasos boca arriba? ¿Y dejarlos todos boca abajo?

El planteamiento del reto es indiferente del número de vasos existentes, siempre que haya un número par en un sentido y otro impar en el sentido contrario. Es decir, sería igual partiendo de tres vasos boca arriba y dos boca abajo.

La solución es evidente. En el primer caso, sí es posible conseguir todos los vasos colocados boca arriba, basta realizar tres movimientos de los que están boca abajo para conseguirlo.

Sin embargo, en el segundo supuesto es imposible conseguir, moviendo dos vasos cualesquiera a la vez, que todos estén boca abajo. Si en la distribución que tenemos consideramos que n es el número de elementos boca arriba, en cada movimiento podemos pasar a tres situaciones distintas. Si volvemos boca abajo dos vasos, que estén boca arriba, el número que quedará será n–2. Si volvemos hacia arriba dos que estén boca abajo, tendremos boca arriba n+2 vasos. Por último, si volteamos uno de cada tipo, el número de vasos que quedará boca arriba seguirá siendo n. La única forma de llegar a tenerlos todos boca abajo sería que el número total boca arriba fuesen cero, pero al ser n un número impar y sólo poder volver dos, es imposible llegar a la solución pedida.

Generalizando este problema a un enunciado estándar, si tenemos una fila de vasos todos boca abajo y en cada movimiento le damos la vuelta a dos vasos, sólo se podrá llegar al estado con todos los vasos boca arriba si el número de vasos es par, en caso contrario será imposible.

Si queremos conseguirlo, será necesario añadir alguna regla extra como veremos en el juego último que plantearemos.

Como hemos deducido, volteando dos vasos a la vez, que no tienen por qué estar contiguos, es imposible volver completamente una fila de vasos impar. Pero en el siguiente planteamiento vamos a ver lo que ocurre si podemos volver tres.

3. De tres en tres.

Tenemos una fila de vasos todos boca abajo. Realizamos un movimiento que consiste en voltear tres de los vasos, que no tienen que ser consecutivos. ¿Es posible conseguir que toda la fila de vasos quede boca arriba con ese tipo de movimiento? En caso afirmativo, ¿cuál será el mínimo número de movimientos para conseguirlo?

Como es tradicional en la resolución de problemas, antes de la solución general vamos a estudiar casos más simples. Para ello, vamos a estudiar qué ocurre con los casos en los que hay menos vasos. Antes de seguir leyendo, animamos a los lectores a que intenten hallar la solución.

Vamos a desechar la posibilidad de tener uno o dos vasos pues no podríamos aplicar el movimiento.

a) Con tres vasos.

En este caso es trivial, con un solo movimiento volteamos los tres vasos a la vez.

b) Con cuatro vasos.

Si disponemos de cuatro vasos, veamos cómo es posible dar la vuelta a los cuatro con el movimiento permitido. Los pasos a seguir son:

i. Se mueven tres vasos cualesquiera, por ejemplo, los de lugar 1, 2 y 3.
ii. Se mueven el vaso que queda boca abajo y dos de los que están boca arriba, por ejemplo, los vasos 2, 3 y 4. De esa manera nos quedan los dos extremos boca arriba y los dos centrales boca abajo.

Posición inicial

Paso i

Paso ii

iii. Se mueven los dos vasos boca arriba y uno de los que están boca abajo, por ejemplo los de lugar 1, 2 y 4.

iv. Después del movimiento anterior quedan exactamente tres vasos boca abajo, los 1, 3 y 4, luego con un último movimiento es posible colocar los cuatro vasos boca arriba.

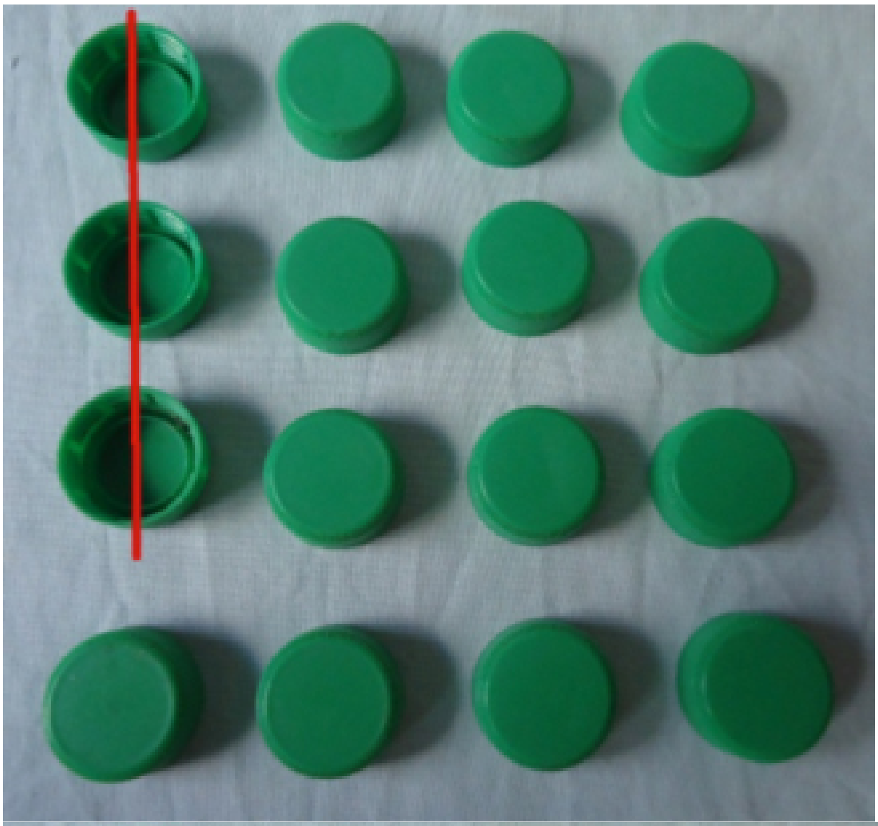
Posición inicial

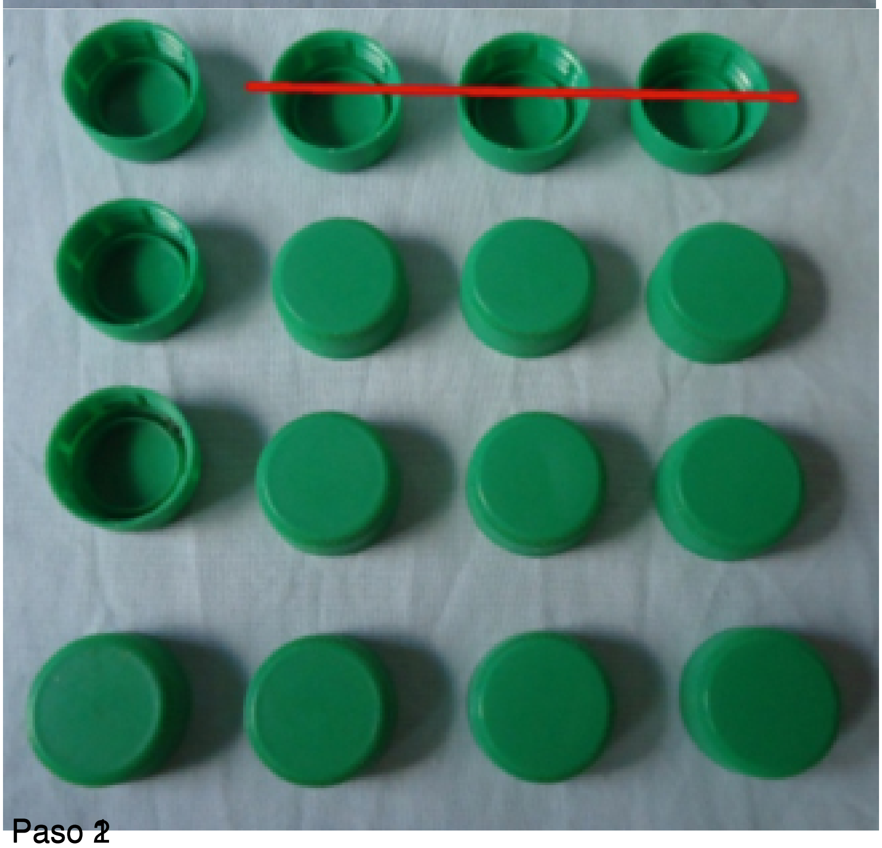
Paso iiii

$$\frac{n-4}{3}+4=\frac{n+8}{3}$$

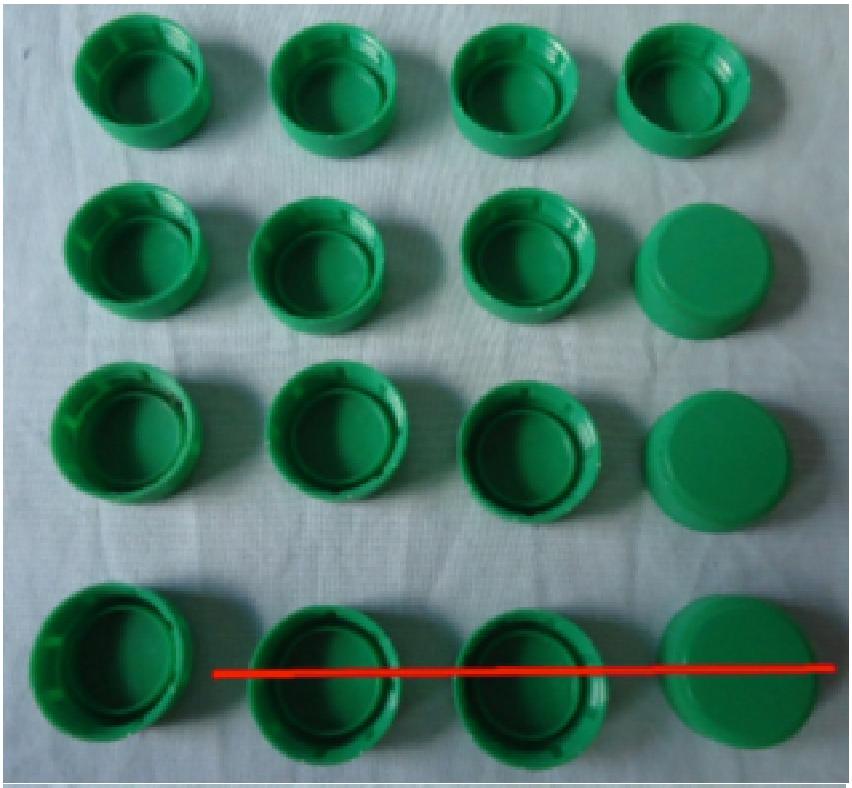
$$\frac{n-5}{3}+3$$

Posición inicial



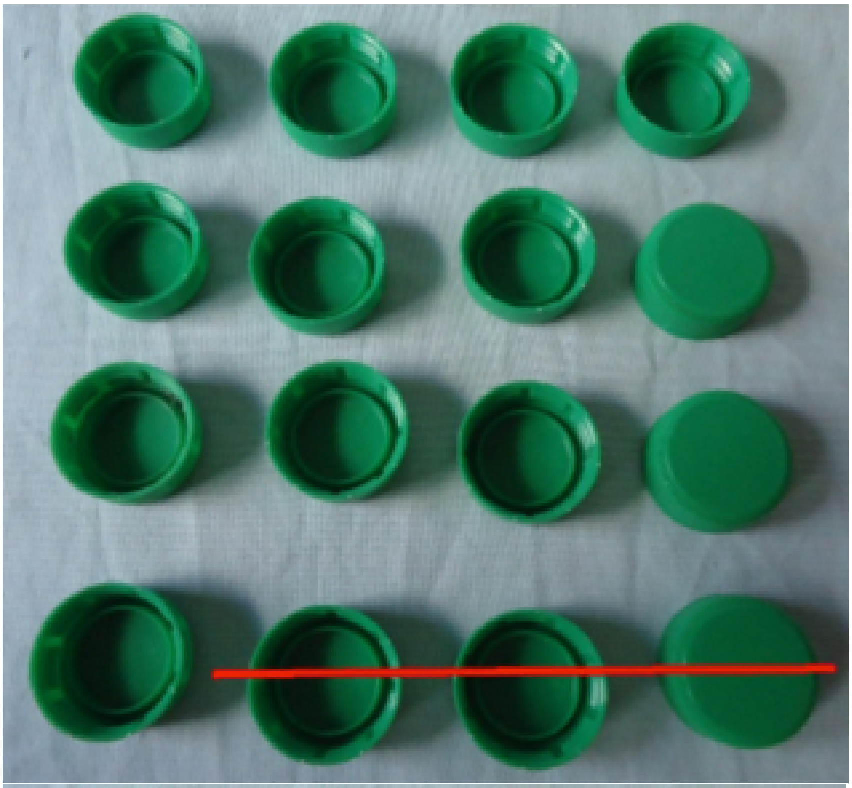


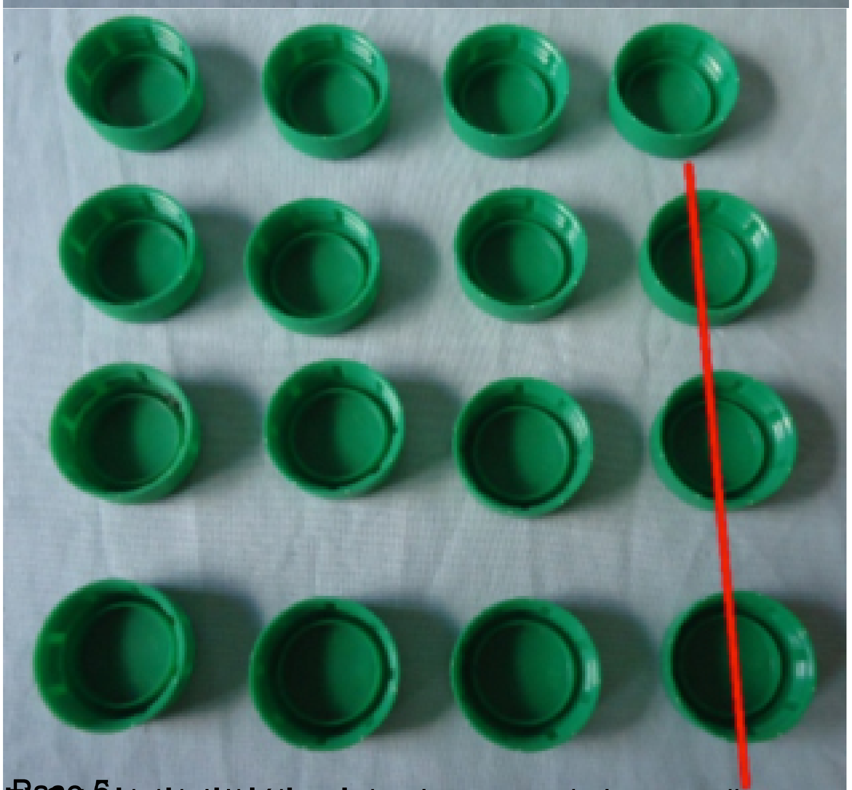
Paso 1
Paso 2



Paso 3

Paso 4

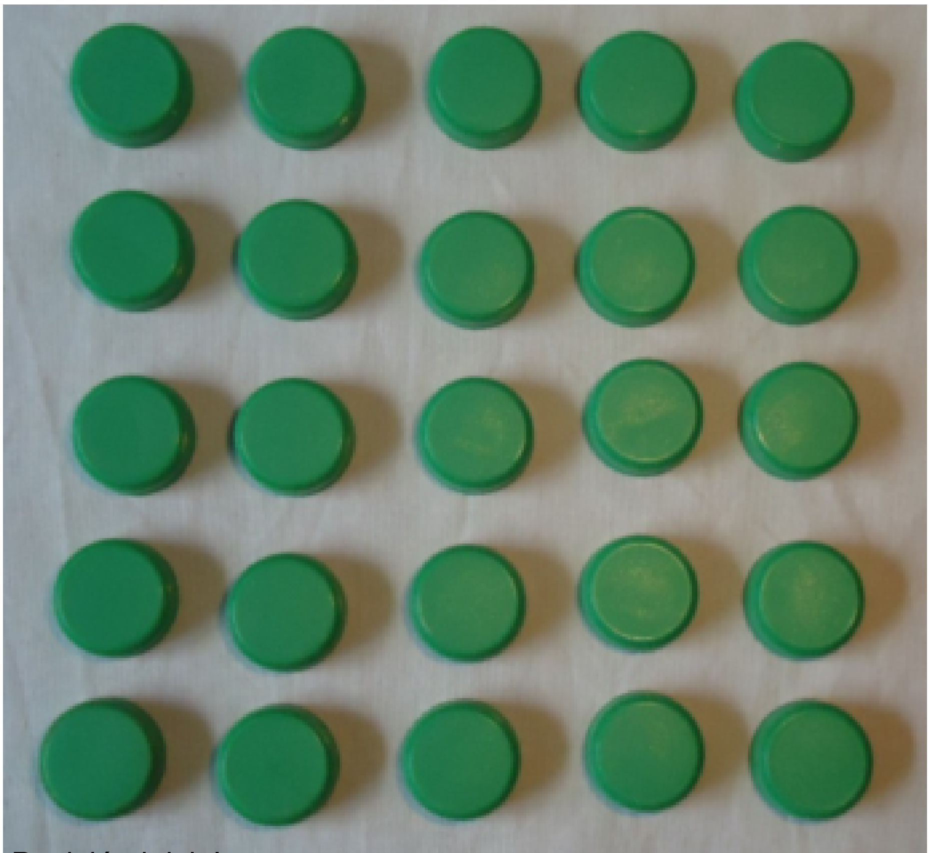




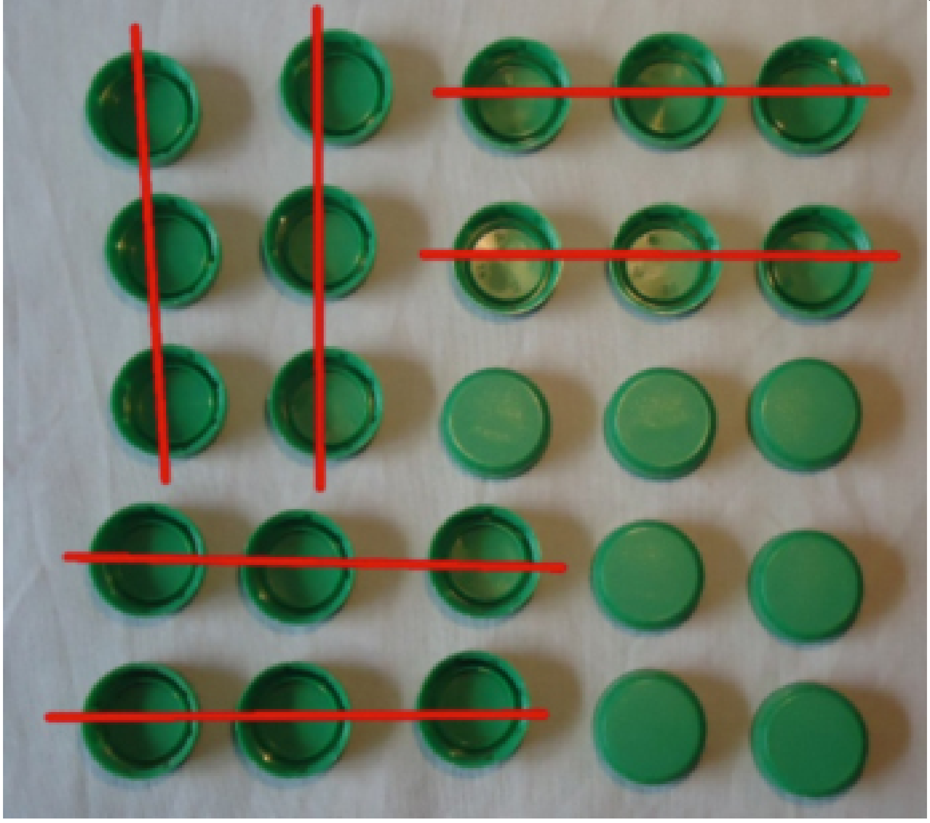
Paso 5.

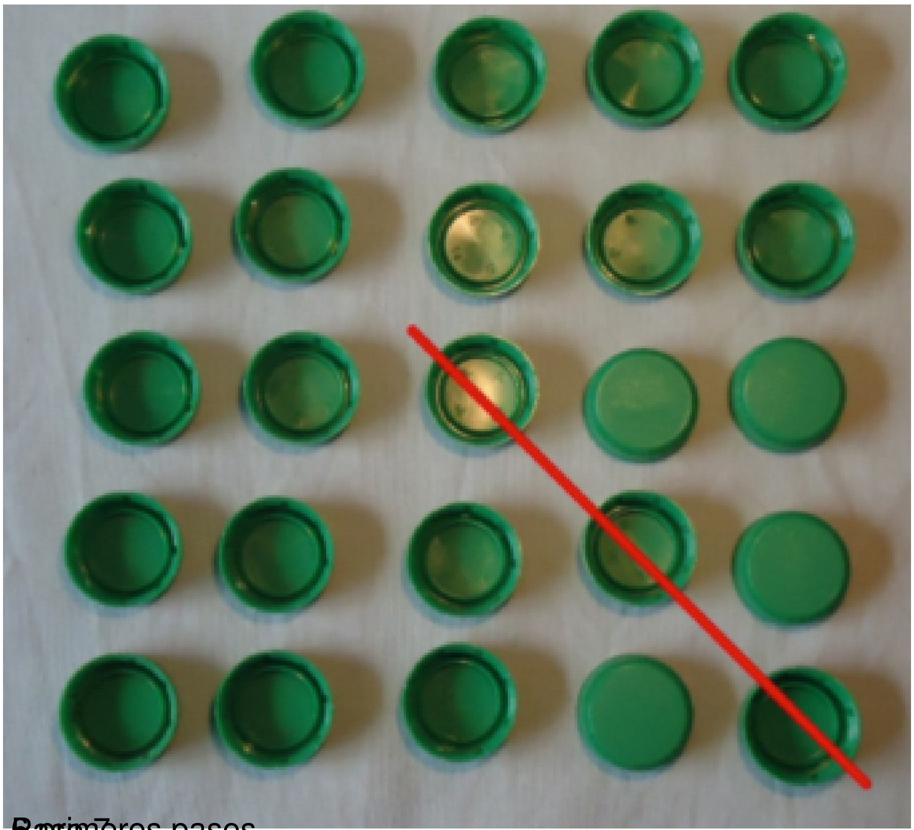
b) Cuadrado de lado cinco.

En este caso, el número de elementos de los que disponemos es de 25. Partimos de la posición inicial siguiente:



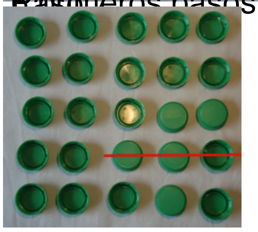
Posición inicial [illegible]

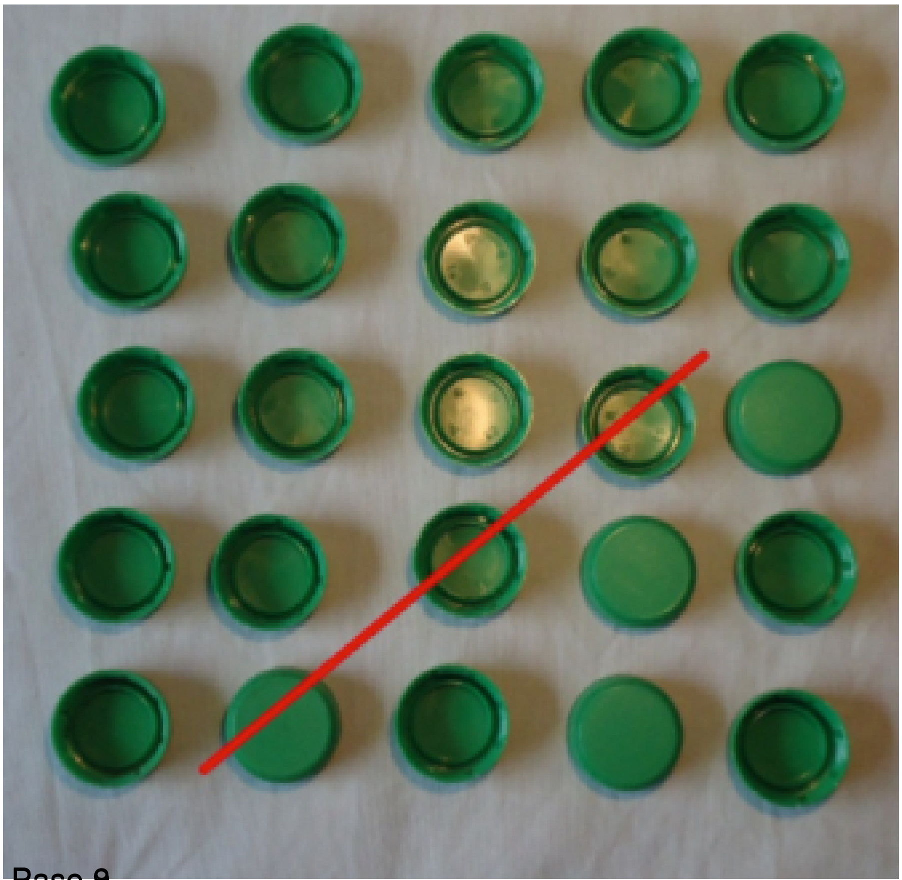




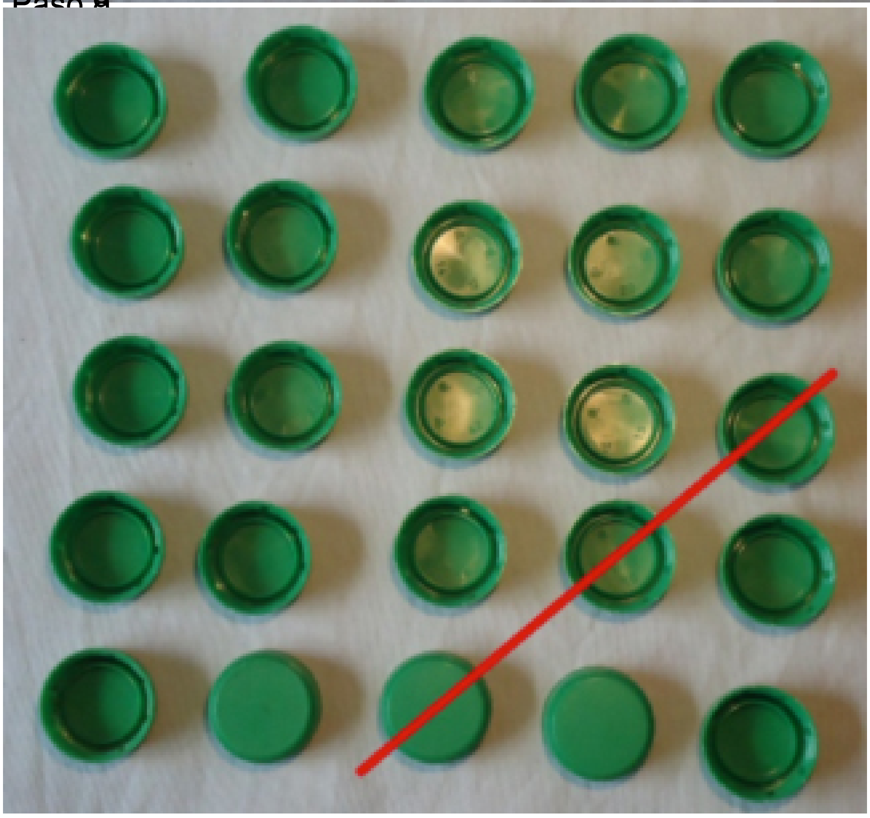
Paso 7

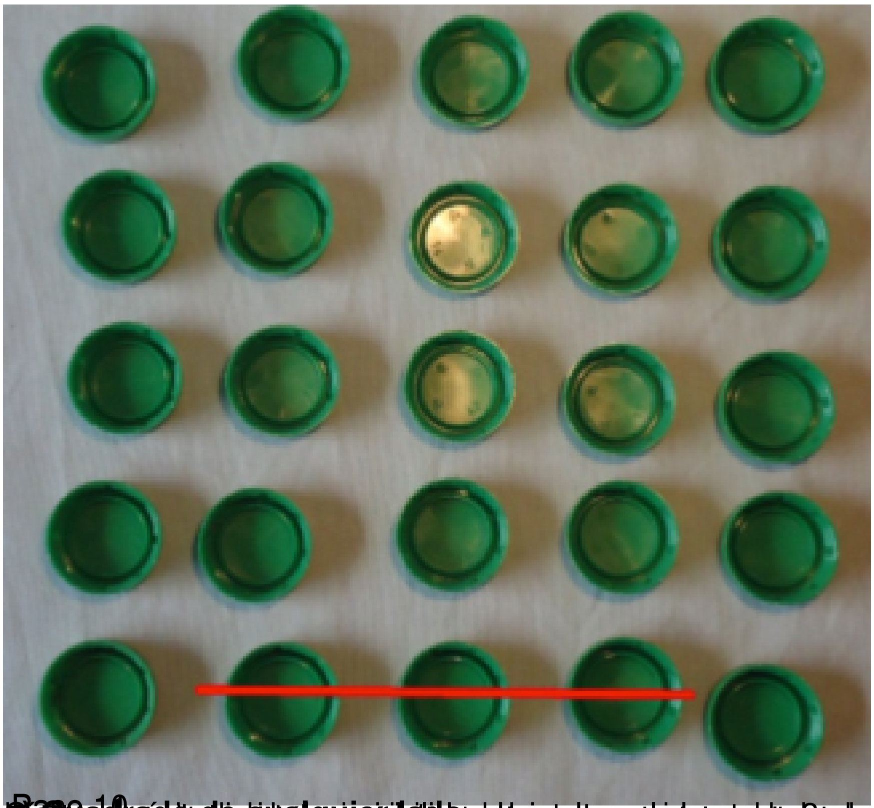
Primeros pasos





Paso 9





Paso 10

[illegible]

https://www.oei.es/historico/oim/revistaoim/numero53/Invariantes.pdf