En el año 2000 se comenzó con esta sección de juegos, inicialmente acogida en el seno de la revista SUMA, editada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, y tras cerrarse la sección en 2014, los artículos se acogieron en la sección correspondiente de la página divulgamat, en donde han salido apareciendo artículos nuevos. En todos estos años siempre se han incluido juegos más o menos actuales, que han servido como recursos para plantear actividades e incluso investigaciones en el aula de matemáticas. Pero hoy vamos a modificar ese enfoque.

Lo que se presenta hoy es un antiguo juego aritmético que en la actualidad es bastante desconocido, posiblemente debido a lo complicado de sus reglas de juego. Según algunos investigadores, como el profesor de la Universidad de Barcelona José M. Núñez, al que nos referiremos en varias ocasiones, se puede considerar a Ritmomaquia como el primer juego occidental creado para la enseñanza de las matemáticas.

Básicamente, este juego es una batalla entre dos contrincantes que disponen de una serie de fichas, en las que cuentan tanto la forma geométrica como el número asociado. Para capturar piezas del oponente hay que hacer una serie de cálculos aritméticos e incluso para ganar la partida hay que conseguir colocar una serie de números en distinto tipo de progresión. Pero además, entre los valores de las fichas vamos a encontrar números poligonales y piramidales.

Antes de presentar el juego debemos poner en antecedentes históricos la época en que tuvo vigencia, y en qué teorías matemáticas se basa.

1. Ritmomaquia, el mejor juego aritmético durante siglos.

Este juego tiene muy diversos nombres, según los autores que lo referencian: rithmomachia, rythmomaquia, arithmomachia, rithmomachy. Se considera que el nombre tiene procedencia griega. La palabra estaría compuesta de dos vocablos griegos, el primero sería una especie de combinación entre arithmos y rythmos que haría referencia al número o al aspecto rítmico, más bien a la armonía como proporción, y el vocablo machia que equivaldría a batalla. Por ello, se suele traducir como la “batalla de la armonía”, aunque Tomas Moro, en su obra Utopía hace

referencia a este juego como “la batalla de los números”. En el libro de Moro se enfrenta este juego a los llamados juegos nefastos, como cartas o dados, que estaban prohibidos en Utopía, mientras sí se permitían el juego de números y otro en el que se enfrentaban las virtudes y los vicios. Lo cierto es que el juego era también conocido como “El juego de los filósofos”, pues ritmomaquia era un juego desarrollado en los ambientes ilustrados, especialmente escolásticos.

Algunos autores medievales asociaban la invención del juego a los pitagóricos, pero no existe ningún texto griego que corrobore esa opinión. Los investigadores fijan en el primer tercio del siglo XI, más concretamente dan la fecha de 1030, cuando un monje llamado Asilo, del monasterio alemán de Würzburg, hizo la primera referencia a este juego, y por ello consideran que pudo ser su creador. El primero que al parecer escribió un pequeño tratado, llamado *Herm anni tirmomachia*
, sobre el juego es el benedictino Hermann Contractus (1013 – 1054) cronista alemán que se dedicó a la música, pero también a otras ciencias como la Astronomía o la Geometría.

El juego comenzó a implantarse en los monasterios y fue pasando de forma casi oral de unos estudiosos a otros hasta que poco a poco, y a lo largo de los siguientes siglos, hubo diversos autores que escribieron sobre el juego, mostrando cada uno de ellos unas reglas algo diferentes como veremos más adelante.

La opinión generalizada es que el juego se inventó para desarrollar los conceptos de la aritmética de Boecio, del que hablaremos más adelante. Al parecer el juego se creó dirigido a los alumnos de las escuelas de monasterios. Según la historiadora Ann Moyer, especialista en juegos de la Edad Media y que en 2001 publicó un libro sobre la Ritmomaquia, el juego era por un lado un recurso para el estudio de la obra aritmética de Boecio, pero también pretendía educar en valores morales presentes en la filosofía de Boecio. De ahí, que la iglesia apostara por este juego frente a otros considerados más licenciosos. Durante una amplia época, llegó a tener más fuerza que el ajedrez, que aunque no era un juego prohibido por la Iglesia, tampoco estaba considerado un entretenimiento virtuoso.

Estamos hablando de una época medieval en la que el plan de estudios de las Universidades se reducían a las siete artes liberales agrupadas en dos grupos de materias, el trívium (gramática, dialéctica y retórica) y el cuadrivium (aritmética, geometría, música, astronomía) ya estructurado por los pitagóricos.

En poco tiempo el juego se expandió por Alemania y Francia, dando el salto a Inglaterra en el siglo XIII, donde se extendió también con mucha fuerza. El propio filósofo Roger Bacon lo aconsejaba como una actividad muy adecuada para sus alumnos.

Al principio, los textos eran breves y las referencias al juego era casi meramente sobre su existencia y su interés, incluso en algunos textos se consideraban ya conocidas las reglas y los valores de las fichas. Durante los siglos siguientes hubo varios autores que escribieron obras donde ya se presentaban manuales, con mayor explicación, sobre el juego. Entre ellos podemos citar, por su cercanía, al jienense Juan Pérez de Moya (1512? - 1596), quizás el más importante autor de libros de texto de matemáticas de la época. En particular en su obra de 1562 llamada Diálogos de Aritmética Practica y Especulativa [1] , aparte de contener ya un tratado de álgebra, habla de ritmomaquia, citándolo por cierto como juego pitagórico, indicando sus reglas y las piezas que lo forman.

Al entrar en el Renacimiento el juego comienza a perder importancia, y llega a desaparecer. Posiblemente al cambiar los planes de estudio y comenzar a tomar fuerza el álgebra, ritmomaquia como juego para practicar la artimética perdió interés.

De todos modos, hay que tener presente que aunque al principio el juego se utilizaba como recurso educativo, poco a poco se comenzó a jugar por el mero placer de practicarlo, pero siempre dentro de ámbitos eruditos no llegando a extenderse más allí.

En siglos posteriores, en concreto en el XIX y a comienzos del XX [2] hubo varios intentos de volver a poner de actualidad el juego pero sin mucho éxito.

Ya en este siglo, el profesor Tomás Guardia Ortega, en ese momento profesor de la Universidad Central de Venezuela, comenzó a estudiar el juego y promovió la creación del Club Venezolano de Ritmomachia [a] . intentado poner de moda el juego. El club se creó como un Grupo de Extensión en la Facultad de Ciencias de dicha Universidad. Se redactaron unas reglas, algunas de ellas desconocidas hasta el momento, y se organizaron incluso campeonatos de juego. Desgraciadamente a partir del año 2016 no hay ningún movimiento en la página del club, no sabemos si coincidiendo con la marcha del profesor Guardia, auténtico alma mater del proyecto, a Estados Unidos o por otras causas.

2. La aritmética de Boecio.

Como comentamos en el epígrafe anterior, el juego de Ritmomaquia se creó para desarrollar las aritmética de Boecio, por ello es importante estudiar algunos aspectos de este matemático y de su obra para que podamos entender los números que se utilizan en el juego, y que son un poco extraños si no se explica su construcción.

Se ha considerado a Anicio Manilo Severino Boecio (480 – 524) como el mejor matemático romano de la antigüedad. Esto no es contradictorio con que muchos autores lo considerasen como un matemático mediocre, pues todo el que tenga un poco de idea de la historia de la matemática, sabe la irrelevancia que significó el periodo romano en esa disciplina.

Boecio fue también filósofo, poeta y político y su principal aportación a las matemáticas fue la traducción, muchas veces simplificada, de obras griegas. Igual que Euclides con sus Elementos fue el soporte, durante siglos de la enseñanza de la Geometría, Boecio fue autor de referencia durante cerca de mil años en la enseñanza de la aritmética gracias a su libro *De arithmetica* donde traducía la *Introductio atirhmetica* del pitagórico Nicómano de Gerasa (60 – 120).

Quizás los lectores hayan visto alguna vez la siguiente imagen, una de las ilustraciones del libro *Margarita Philosophica* escrito por Gregor Reisch (1504) donde se recrea a la idealizada aritmética contemplando una delirante batalla entre Pitágoras, realizando cuentas con un ábaco, y Boecio que realiza las cuentas con las cifras indo-arábigas. No sólo es delirante porque a los dos personajes los separan alrededor de diez siglos, sino porque esas cifras no empezaron a extenderse por Europa hasta el Renacimiento, varios siglos después de la muerte de Boecio.

Imagen 1: La batalla de la aritmética. Tomada de Wikipedia.

Antes de comenzar con el juego en sí hay un detalle que me gustaría comentar.

Seguramente les habrá pasado en alguna ocasión el ponerse a jugar con algún amigo o en un ambiente social a un determinado juego, y de pronto descubrir que se estaban jugando con reglas distintas, por lo que no es raro que alguno de los jugadores suelte la frase que titula este epígrafe.

Eso es un poco lo que ocurre con Ritmomaquia. Aunque suele haber unanimidad en el valor de las fichas, a partir de ahí no hay forma de encontrar dos autores que coincidan en el resto de reglas y elementos.

Al principio la expansión del juego podría ser de forma oral y hasta que no se produjo la invención de la imprenta no aparecieran textos fiables, pero con cambios entre unos autores y otros.

En la página de acanomas [1] , dedicada a la explicación de juegos, muchos de ellos históricos, aparece una entrada en la que se habla de los principales autores medievales, y se hace una tabla comparativa entre ellos comprobando la variación de reglas existentes.

Por no ponerse de acuerdo no hay unanimidad ni en el tamaño del tablero. Es rectangular de ancho ocho casillas, pero el largo varía desde 10 hasta 16. Las fichas tienen la misma forma y un jugador las lleva blancas y otras negras, pero hay autores que consideran que las fichas tienen dos colores, como las tradicionales fichas del juego Othello, de forma que al capturar una de ellas se le puede dar la suelta e incorporarla al propio juego.

Tampoco se ponen de acuerdo en el movimiento de las fichas. Ni siquiera en las capturas. Cuando un jugador captura una pieza contraria, hay autores que no mueven la pieza atacante sino que retirar la atacada del tablero, mientras que otros ocupan la posición de la ficha capturada.

Si suele haber unanimidad en los tipos de capturas y en las formas de conseguir la victoria, que hay de distintos tipos.

En esta ocasión nos hemos decidido por tomar las reglas del extraordinario artículo de José M. Núñez, complementándolo con la referencia del conocido libro de Bell y Cornelius sobre *Juegos con tableros y fichas* , a pesar de que los dos textos tienen diferencias.

3. ¡Pues en mi casa jugamos así!

4. Los valores de las piezas del juego.

Ritmomaquia es un juego atípico, dentro de los de tableros y fichas, pues no es simétrico. Los jugadores tienen el mismo número de fichas pero el valor que tienen en ellas son muy diferentes.

Cada jugador tiene un total de 24 fichas, una de ellas tridimensional y las restantes planas. Un jugador juega con fichas blancas y el otro con negras. Se suele decir que la blancas son las pares y las negras son las impares, pero esto es porque los números de los que se parten son pares en las blancas e impares en las negras, pero veremos que los dos jugadores tienen la misma cantidad de valores pares e impares en sus fichas.

La forma de las fichas tiene relación con las proporciones que vimos anteriormente. Hay 8 fichas redondas que corresponderían a la proporción *múltiplex* , otras 8 triangulares donde están los números *superpartiendo* y 7 cuadradas con los valores *superpartiens* . Hay una última pieza que correspondería a una pirámide formada por acumulación de fichas de distintos valores.

Vamos con la descripción de las fichas.

El jugador con blancas comienza con los primeros números pares 2, 4, 6 y 8 y a continuación sus cuadrados: 4, 16, 36, 64. Esas serían las fichas redondas.

Las triangulares comenzarían sumándole a estas cuatro últimas la proporción correspondiente al inverso de los números originales, es decir, 6 = (1 + 1/2·4), 20 = (1 + 1/2·16), 42 = (1 + 1/6·36) y 72 = (1 + 1/8·64).

En las otras cuatro fichas triangulares se repiten las proporciones anteriores pero con los números que se han obtenido antes. Así tendríamos:

9 = (1 + 1/4·6), 25 = (1 + 1/2·20), 49 = (1 + 1/6·42) y 81 = (1 + 1/8·72

Las fichas cuadradas se obtienen de las triangulares, añadiendo a los números anteriores las fracciones 2/3, 4/9, 6/7 y 8/9 de esos números, fracciones que son los valores originales divididos por el siguiente entero, y realizando lo mismo con los valores obtenidos. De esta manera los números que van en las fichas cuadradas son:

16 = (1 + 2/3·9), 49 = (1 + 4/9·49), 81 = (1 + 6/7·42), 153 = (1 + 8/9·81

25 = (1 + 2/3·15), 81 = (1 + 4/9·45), 169 = (1 + 6/7·81), 289 = (1 + 8/9·153

Para que queden más estructuradas colocamos las piezas en una tabla.

2 (redondas)									
4									
6									
8									
9									
4									
16									
36									
64									
6 (triangulares)									
9									
25									
49									
81									
16									
49									
81									
153									
25									
81									
169									
289									
153 (cuadrado)									

[illegible]

Las fichas negras tienen exactamente las mismas proporciones pero partiendo de los cuatro primeros impares en considerar el 1. De esa manera las fichas serían las siguientes:

[illegible]

Se puede apreciar que cada jugador tiene valores que se repiten, a veces en distinto tipo de fichas y que también se repiten algunos valores en las fichas de los dos jugadores.

Como antes he hablado de las disparidades en las reglas, hay quien pueda pensar que ya me estoy contradiciendo con lo que había dicho antes, pues he hablado de una pieza indimensional. Eso es porque, en cada jugador hay una pieza, dentro de las cuadradas, que tienen forma de pirámide y está, a su vez, formada por varias fichas. Son los valores 91 para las blancas y 190 para las negras.

Esos valores son realmente números piramidales, pues son suma de cuadrados de números consecutivos. Así, $91 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$ mientras que $190 = 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2$. En el caso de las blancas, las dos primeras fichas serían redondas, las dos siguientes triangulares y las dos últimas cuadradas. Para las negras, la primera es redonda, las dos siguientes triangulares y las dos últimas cuadradas. Esto es importante pues influirá en la forma de moverse y capturar de esa pirámide. Como las bases de las pirámides son cuadradas es por lo que se engloban dentro de ese bloque.

Dado que éste es un artículo sobre un juego para aprender aritmética, es poco oportuno por mi parte echar mano del álgebra, pero es una buena forma de ver que relación hay entre los distintos números que se obtienen en el proceso anterior.

Si observamos la primera columna de cuadrícula de las tablas, los números que corresponden a las fichas redondas serían n y n^2.

Las triangulares serían:

$$n^2 + \frac{1}{n} \cdot n^2 = n^2 + n = n \cdot (n+1) \text{ y}$$

$$n^2 + n + \frac{1}{n} \cdot n \cdot (n+1) = n^2 + n + n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Y las cuadradas serían:

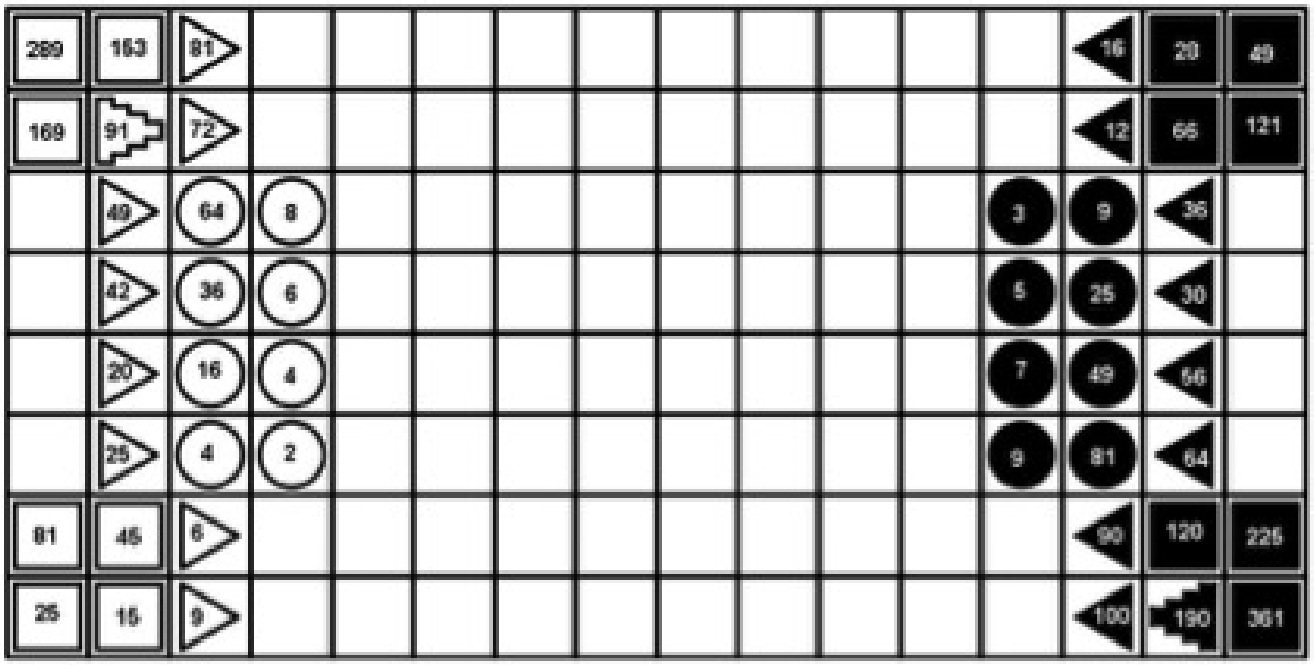
$$(n+1)^2 + \frac{n}{n+1} \cdot (n+1)^2 = (n+1)^2 + n \cdot (n+1) = (2n+1) \cdot (n+1)$$

$$(2n+1) \cdot (n+1) + \frac{n}{n+1} \cdot (2n+1) \cdot (n+1) = (2n+1) \cdot (n+1) + n \cdot (2n+1) = (2n +$$

Es decir, los números que forman la primera columna, llamando n al primer valor serían: n, n+n, n(n+1), (n+1)(n+1), (n+1)(2n+1), (2n+1)(2n+1), con lo que se puede apreciar una regularidad.

Una actividad para practicar, en un determinado contexto, las expresiones algebraicas puede ser hallar la expresión de los restantes números de la tabla. Es fácil porque sería sustituir n por los valores primeros de cada columna, es decir, n=2, n=3 y n=4.

Una vez que tenemos las fichas con sus valores, el siguiente paso es colocarlas en el tablero y eso es lo que nos indica la siguiente imagen.



Ejemplo de tablero de juego. Las piezas blancas se colocan en la fila inferior, mientras que las negras lo hacen en la superior. Los números indican el valor de cada pieza. Las piezas blancas y negras como en ajedrez o damas, pero realmente no aporta nada al juego, por lo que es mejor que sean todas los cuadros iguales.
Las piezas blancas se colocan en la fila inferior, mientras que las negras lo hacen en la superior. Los números indican el valor de cada pieza. Las piezas blancas y negras como en ajedrez o damas, pero realmente no aporta nada al juego, por lo que es mejor que sean todas los cuadros iguales.

5. Reglas del juego.

Como ya se ha dicho, el juego se desarrolla en un tablero de 16 casillas de ancho por 8 de alto. Cada jugador controla las piezas de su color, situadas en la fila más cercana a su lado del tablero. Los números que aparecen en las piezas indican su valor. Los jugadores deben mover una pieza de su color por turno, y la primera ficha correspondiente de las negras, y la misma con las demás.

5.1. Movimientos de las piezas.

Según la figura geométrica de la pieza, el movimiento es diferente.

Las piezas cuadradas pueden moverse una casilla en horizontal o vertical.

Las triangulares se mueven dos casillas en diagonal.

Las circulares se mueven tres casillas en cualquier dirección, horizontal, vertical o diagonal.

En el ejemplo de la figura, la pieza de 25 puede moverse a cualquier casilla de la fila superior, o a la casilla inferior derecha.

Las piezas, como ya se ha indicado, no pueden moverse fuera del tablero. Si una pieza está en la esquina inferior derecha, por ejemplo, no puede moverse a la casilla inferior izquierda, ni a la superior izquierda, ni a la superior derecha. Tampoco puede saltar por encima de otras piezas, ni propias, ni de su oponente. Si una pieza de su oponente se encuentra en una casilla a la que quiere mover una pieza, puede capturarla.

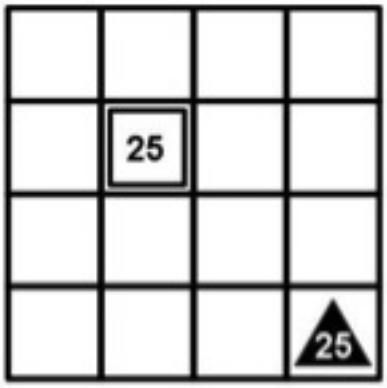
Las piezas no pueden quedarse en la casilla en la que se encuentran, tienen que moverse.

5.2. Captura de una pieza del oponente.

Para capturar una pieza, se puede mover una pieza de su color, situada en alguna fila o columna, a una casilla en la que se encuentra una pieza del oponente, siempre y cuando la pieza que se mueve tenga un valor igual o superior a la pieza del oponente. Si la pieza que se mueve tiene un valor inferior, no puede capturar a la pieza del oponente.

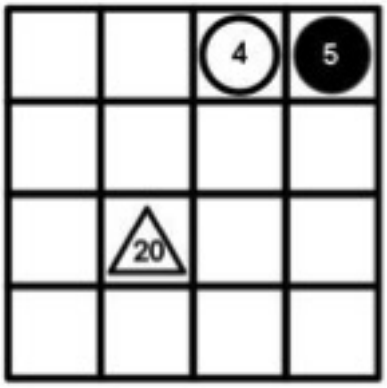
Ejemplo de captura de pieza del oponente.

Por ejemplo, si nuestra pieza de valor 25 está situada en la casilla inferior derecha, y en la casilla de la fila superior y columna central tenemos una pieza del oponente de valor 25, nuestra pieza puede moverse a esta casilla, y capturar a la pieza del oponente.



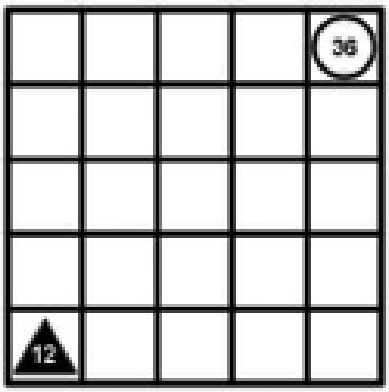
Ejemplo de captura de pieza del oponente.

Por ejemplo, si nuestra pieza de valor 25 está situada en la casilla inferior derecha, y en la casilla de la fila superior y columna central tenemos una pieza del oponente de valor 20, nuestra pieza puede moverse a esta casilla, y capturar a la pieza del oponente. Por ejemplo, si en la figura tenemos una pieza de valor 5 en la casilla inferior izquierda, y en la casilla central de la fila superior tenemos una pieza de valor 4, nuestra pieza puede moverse a esta casilla, y capturar a la pieza del oponente.

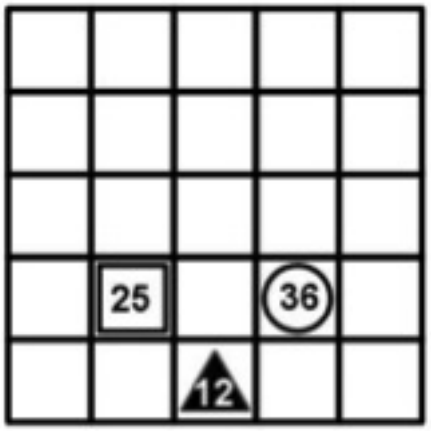


Ejemplo de captura de pieza del oponente.

Por ejemplo, si nuestra pieza de valor 5 está situada en la casilla inferior derecha, y en la casilla central de la fila superior tenemos una pieza del oponente de valor 4, nuestra pieza puede moverse a esta casilla, y capturar a la pieza del oponente.



Ejemplo de tablero de juego.



Ejemplo de tablero de juego.

5.3. Cómo ganar en Ritmomaquia.

El objetivo de cada juego, en Ritmomaquia, es ganar la partida, para lo cual deben ir a la casilla ganadora, en el caso, la casilla de juego, que es precisamente llamada "meta", y ahí ganar el juego. Pero antes deben conocer que en cada juego existen dos casillas especiales.

Existen dos casillas especiales, cada una de ellas, que son diferentes entre sí, pero que tienen una característica en común: cada casilla tiene un número, que es el que, por lo que se ve, hace que se pueda ganar en la partida.

La primera casilla, que también es la primera casilla en salir, es el número de multiplos de cada jugador, en su casilla de juego. Por ejemplo, si 12 es el número de multiplos de cada jugador, el

Para conocer cuándo un jugador se encuentra cercano al número de multiplos, y, por lo tanto, que es el momento de ganar la partida, se puede usar la siguiente fórmula, que es muy sencilla:

$$\frac{c}{a} = \frac{c-b}{b-a}.$$

Por ejemplo, si 12 es el número de multiplos de cada jugador, entonces:

$$\frac{12}{6} = 2 = \frac{12-8}{8-6}.$$

Existen, pues, dos tipos de casillas:

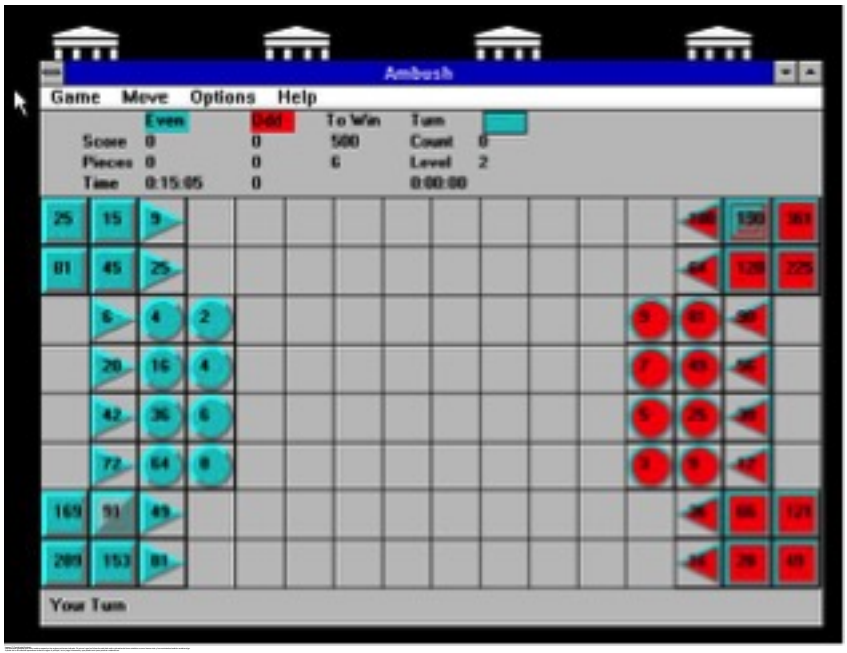
5.3.1. Casillas especiales.

Estas, en un juego, están, como mínimo, una vez en cada jugador, y son, hay dos diferentes:

- Casilla de multiplos: Hay tan una diferente casilla de multiplos en cada jugador, y es el número que, si consigue alcanzar esta casilla, entonces ganará la partida. Por ejemplo, si el número de multiplos es 12, y un jugador
- Casilla de divisores: Hay tan una diferente casilla, y, igual que el número de multiplos, es el número que, si consigue alcanzar esta casilla, ganará la partida. Por ejemplo, si el número de divisores es 25, y un jugador
- Casilla de divisores [illegible]: Aparte de la casilla de divisores, que hay en cada jugador, hay una casilla de divisores [illegible] más. Es, en un jugador, la casilla "25", y, en otro jugador, la casilla "36". Pero, si, en un jugador, la casilla "25" es la casilla de divisores, para el otro jugador, el número de divisores es 36, y, por lo tanto, la casilla de divisores para este jugador es la casilla "36".
- Casilla de [illegible]: Aparte de la casilla de multiplos, hay una casilla de [illegible], que, en un jugador, es la casilla "25", y, en otro jugador, es la casilla "36". Igual, también, que la casilla de divisores.
- Casilla de [illegible] y [illegible]: Hay una casilla de [illegible] que, en un jugador, es la casilla "25", y, en otro jugador, es la casilla "36". Igual, también, que la casilla de divisores.

5.3.2. Casillas jugadas.

Son las casillas en el tablero "Meta" en los cuales, en cada turno de cada jugador, que, si, por ejemplo, tiene que ir a la casilla de divisores [illegible], [illegible] que, en cada turno, no tiene que ir a la casilla de divisores, sino que, en el caso de que, en cada turno, no tiene que ir a la casilla de divisores, sino que, por ejemplo, tiene que ir a la casilla de [illegible], [illegible] que, en cada turno, no tiene que ir a la casilla de [illegible], sino que, por ejemplo, tiene que ir a la casilla de [illegible] y, por lo tanto,



7. Referencias.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Notas:

[illegible]