

ABC, 3 de Abril de 2018

CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas

Pedro Alegría

**La demostración del problema de las ternas pitagóricas booleanas ocupó 200 terabytes de información proporcionada por un supercomputador**

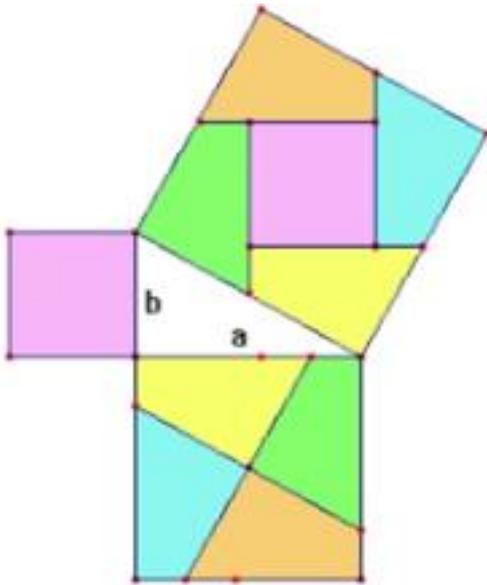


Supercomputador «Stampede» - UT

¡Quién le iba a decir a Pitágoras que su teorema, caso de que fuera realmente suyo, iba a entretener al colectivo matemático veinticinco siglos después! Pues hoy nos encontraremos

con un juego de estrategia con el que todavía puedes ganar si logras establecer un nuevo récord mundial.

Antes de describir el juego, vamos a presentar a los protagonistas, ni más ni menos que los lados de un **triángulo rectángulo**, es decir los catetos y la hipotenusa.



Demostración sin palabras del teorema de Pitágoras

Es bien sabido que, si llamamos  $a$  y  $b$  a las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y  $c$  a la longitud de la hipotenusa, entonces  $a^2 + b^2 = c^2$ . Ciertamente, este es el llamado **teorema de Pitágoras**.

. Quizá no es tan conocido que la propiedad recíproca también es cierta:

*Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son tres números positivos que verifican la relación  $a^2 + b^2 = c^2$ , entonces  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los lados de un triángulo rectángulo.*

En matemáticas, se llama **terna pitagórica** a cualquier conjunto de tres números naturales ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) para los cuales se cumple la relación  $a^2 + b^2 = c^2$ . Los primeros ejemplos son (3, 4, 5), (5, 12, 13), (6, 8, 10), (7, 24, 25), ... como se comprueba fácilmente.

Entre las ternas pitagóricas, como en todo grupo social, también hay clases: se llaman **ternas**

### pitagóricas primitivas

aquellas cuyos elementos son primos entre sí, es decir que no tienen ningún divisor común -aparte del uno, claro-. Por ejemplo, la terna pitagórica (3, 4, 5) es primitiva pero no lo es la terna (6, 8, 10) porque los tres números son múltiplos de dos. Es fácil demostrar también que, conocidas todas las ternas pitagóricas primitivas, se pueden conocer las demás porque basta multiplicar cada elemento por un mismo número para obtener otra terna pitagórica. Es decir, si (a, b, c) es una terna pitagórica, al multiplicar sus elementos por cualquier número natural n, la terna (n · a, n · b, n · c) también es pitagórica.

Desde tiempo inmemorial se conocen todas las ternas pitagóricas, al menos la forma de conseguirlas. Resulta que, si elegimos arbitrariamente dos números naturales u y v, con  $u > v$ , entonces basta calcular  $a = u^2 - v^2$ ,  $b = 2 \cdot u \cdot v$ ,  $c = u^2 + v^2$  de modo que (a, b, c) es una terna pitagórica. En la siguiente tabla se muestra la forma de calcular las primeras.

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2 \cdot u \cdot v$	$c = u^2 + v^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
3	1	8	6	10
4	3	7	24	25
4	2	12	16	20
4	1	15	8	17

Ahora ya podemos plantear nuestro juego pitagórico, conocido como el **problema de coloración de ternas pitagóricas**

o el de

**las ternas pitagóricas booleanas**

:

*¿Eres capaz de escribir los elementos del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$  utilizando solo dos colores, de modo que cada terna pitagórica de dicho conjunto no esté formada por números del mismo color?*

Veamos un ejemplo ilustrativo: si hacemos  $N = 15$ , la coloración

**{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}**

cumple los requisitos porque las únicas ternas pitagóricas en dicho conjunto son

**(3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13) y (9, 12, 15)**

y cada una de ellas está dibujada con dos colores.

Este ejemplo ha sido sencillo, de hecho hay más de una solución válida pues los números que no pertenecen a ninguna terna pitagórica pueden dibujarse indistintamente de rojo o de azul. Ahora bien, el reto consiste en encontrar una solución al problema con el máximo valor posible de  $N$ . ¿Te atreves a intentarlo con  $N = 100$ ? Naturalmente, antes de empezar debes tener la lista de todas las ternas pitagóricas cuyos elementos no excedan de cien. Si no he contado mal, hay 52 de esas ternas.

La mayor puntuación obtenida hasta el momento corresponde al valor  **$N = 7824$** , conseguida en 2016 por el equipo formado por

**Marijn Heule, Oliver Kullman y Victor Marek**

(y la inestimable colaboración de una red de potentes ordenadores, claro). Pero lo más interesante del trabajo de estos investigadores es la prueba de que el valor  $N = 7824$  es el máximo que puede alcanzarse. La demostración que ocupa 200 terabytes de información proporcionada por el supercomputador de la imagen concluye que:

*¡Es imposible pintar con dos colores el conjunto de números desde el 1 hasta el 7825 con las limitaciones impuestas por el juego pitagórico!*



Supercomputador «Stampede» del Centro Avanzado de Computación de Texas

No sé si es lo más importante del asunto, pero el premio de 100 dólares ofrecido hace más de 30 años por el matemático y malabarista **Ronald Graham** ha podido ser entregado. Quizá tampoco sea relevante la conclusión de que existen 10 elevado a 2300 soluciones del problema (sí, un uno seguido de 2300 ceros) para el caso de  $N = 7824$ . No parece razonable pensar que nadie vaya a contradecir a estos ordenadores.

Lo que sí podemos esperar es que el honor del espíritu humano no quede completamente satisfecho. De modo que el problema puede ampliarse utilizando tres colores y preguntarse:

*¿Habrá un valor máximo de  $N$  de modo que los elementos del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$  se puedan dibujar utilizando solo tres colores, de modo que cada terna pitagórica de dicho conjunto no esté formada por números del mismo color?*

Es fácil llegar al valor  $N = 7825$  pues basta escribir los 7824 primeros números con los dos colores conseguidos por Heule, Kullman y Marek y escribir el siguiente con el tercer color. De momento, el mayor valor conocido es  **$N = 11066$** , al cual llegaron **Shalom Eliahou y Jean Fromentin** en 2017 por métodos elementales (como demuestran en su artículo titulado [Pithagore et mixité](#)

). ¿Será próximo el día en que se conozca el máximo valor posible, si es que existe, como en el caso de dos colores?

**Notas finales:**

-A pesar del nombre que damos al teorema de Pitágoras, trece siglos antes de Pitágoras ya era conocido este teorema por la civilización babilonia como demuestran las inscripciones contenidas en la tablilla [Plimpton 322](#).

-Otro juego de coloración, relacionado con el de las ternas pitagóricas, es el conocido como [juego de Sim](#), inventado por el matemático Gustavus Simmons en 1969. Los fundamentos matemáticos de ambos juegos se apoyan en la llamada [teoría de Ramsey](#), que tiene ocupada a una buena parte de la comunidad matemática.

***Pedro Alegría es profesor de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea y forma parte de la comisión de divulgación de la RSME.***

***El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la [Real Sociedad Matemática Española \(RSME\)](#)***