ABC, 23 de Mayo de 2022
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

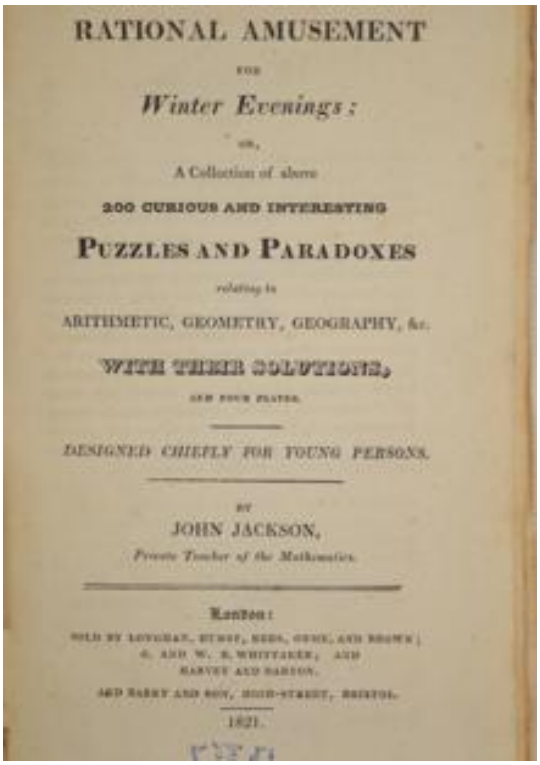
Un ejercicio de sagacidad y un poco de paciencia en el que un jardín se convierte en puntos y rectas en un plano

Adobe Stock

En la reseña de hace unas semanas, la del teorema de Pappus , les proponía un par de cuestiones de matemática recreativa sobre disponer en filas unos cuantos árboles, que no han tenido mucho éxito, dado que ninguno de ustedes me ha comentado nada ni enviado ninguna solución o propuesta de una. Como les indicaba allí, el británico
Henry Ernest Dudeney
, dedicó alguno de sus trabajos a cuestiones que bautizó como 'Puntos y líneas'.

Junto a la cuestión atribuida a **Isaac Newton** de plantar nueve árboles formando diez filas rectas con tres árboles por fila, afirmaba que la colección más antigua de este tipo de cuestiones que había logrado localizar era el raro libro 'Rational Amusement for Winter

Evenings', publicado en 1821, por John Jackson.



RATIONAL AMUSEMENT

FOR

Winter Evenings:

OR,

A Collection of above

200 CURIOUS AND INTERESTING

PUZZLES AND PARADOXES

relating to

ARITHMETIC, GEOMETRY, GEOGRAPHY, &c.

WITH THEIR SOLUTIONS,

AND FOUR PLATES.

DESIGNED CHIEFLY FOR YOUNG PERSONS.

BY

JOHN JACKSON,

Private Teacher of the Mathematics.

London:

SOLD BY LONGMAN, HURST, REES, ORME, AND BROWN; G. AND W. B. WHITTAKER; AND HARVEY AND DARTON.

AND BARRY AND SON, BOND-STREET, BRISTOL.

1821.

Si leen la primera página de ese libro (la que se muestra a la derecha), resulta curiosa la presentación: 'Diversión racional para las tardes de invierno, o una colección de 200 rompecabezas y paradojas curiosos e interesantes relativos a Aritmética, Geometría, Geografía y otras cosas similares, con sus soluciones y cuatro platos. Diseñados principalmente para personas jóvenes'.

En ese libro hay diez ejemplos de **'Árboles plantados en hileras'**, acertijos que según Dudeney, siempre han sido motivo de gran perplejidad. Los califica como verdaderos «rompecabezas», en el pleno sentido de la palabra, «porque nadie ha tenido éxito todavía en encontrar una forma directa y segura de resolverlos. Exigen el ejercicio de la sagacidad, el ingenio y la paciencia, y lo que llamamos 'suerte' a veces también es de gran ayuda».

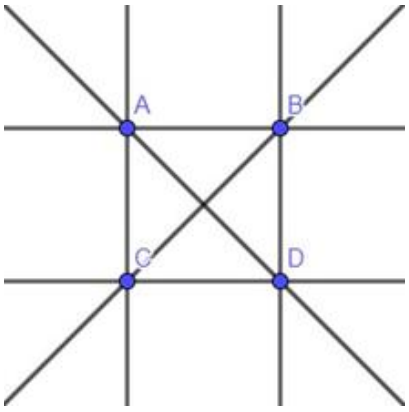
Más de un siglo después de que Dudeney hiciera esos comentarios (su libro, 'Amusements in Mathematics' se editó en 1917), los problemas geométricos de incidencia siguen siendo objeto de artículos tanto para matemáticos profesionales como de aficionados a los juegos,

porque no se ha encontrado por el momento una forma directa y metódica de resolverlos. Por supuesto, los matemáticos no trabajan la cuestión en términos de árboles e hileras, sino con planteamientos de este otro tipo:

1.- ¿Cuántas rectas pasan por n^2 puntos del plano conteniendo cada una al menos n puntos?

2.- Si en cada una de N rectas elegimos (como máximo) N puntos, ¿cuántas rectas adicionales pueden contener N de esos N^2 puntos?

La investigación matemática de este tipo de preguntas no es en absoluto elemental: suele involucrar aspectos no sólo geométricos (geometría combinatoria, geometría proyectiva, geometría discreta, etc.), sino también de álgebra abstracta (teoría de grupos, configuraciones de simetría, transformaciones proyectivas, etc.), y de análisis complejo (puntos de torsión sobre curvas cúbicas, comportamiento asintótico, etc.). Obviamente, completamente fuera de este contexto divulgativo. Pero podemos tratar de entender al menos de qué va el problema con casos concretos, aunque las técnicas necesarias para su entendimiento no podamos detallarlas en exceso.

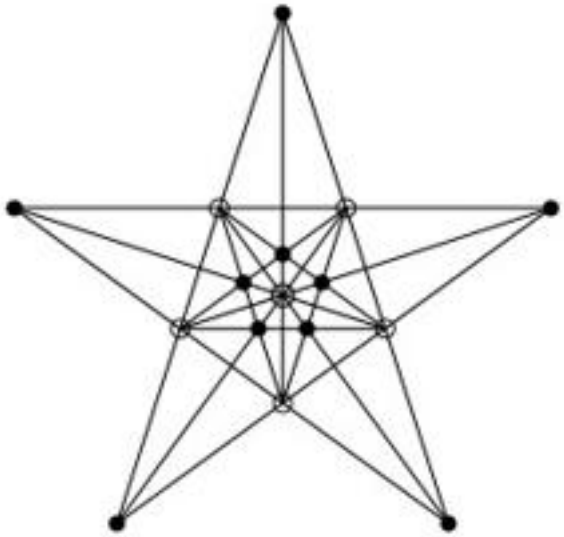


Por ejemplo, imaginemos una disposición cuadrada de n puntos, con n >1 (con un único punto, la situación es trivial). ¿Cuál es el número mínimo de rectas que podemos formar? Pensemos el caso n = 2 (cuatro puntos). Es evidente que podemos trazar con ellos, no sólo como mínimo, sino también como máximo 6 rectas con dos puntos cada recta (2 rectas horizontales, 2 verticales y las 2 diagonales, como vemos en la imagen). Con 9 puntos (caso n = 3), haciendo exactamente lo mismo, trazamos 8 rectas (3 horizontales, 3 verticales y 2

diagonales) conteniendo 3 puntos cada una.

Escribiendo una expresión general, podíamos 'aventurar' que el número de rectas que pasan por n^2 puntos, conteniendo cada una n puntos es

$r(n^2) = 2n + 2$



Sin embargo, desde 1908, que ya ha llovido, se conoce la siguiente disposición para 16 puntos (n = 4).

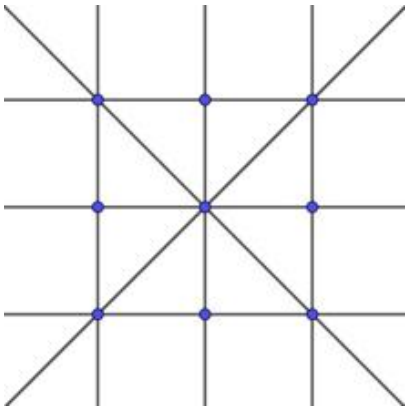
Si hiciéramos caso de la fórmula anterior, tendríamos como máximo 10 rectas (sustituyan 4 en 2n + 2). Pero contemos las rectas que salen en el anterior dibujo: ¡¡15 rectas con 4 puntos cada una!! Por tanto, nuestra suposición anterior era falsa. Pero podemos 'arreglarla' poniendo que

$r(n^2) \geq 2n + 2$, para $n > 1$

Ahora nos cuadran todos los casos vistos anteriormente, pero, ¿es esa cota óptima? ¿Se puede afinar más? En el caso de 9 puntos (n = 3), el acertijo atribuido a Newton (uno de los que les propuse como ejercicio), también utiliza más de las 2n + 2 rectas:

¿Cómo se pueden colocar nueve árboles en diez filas, de modo que cada fila contenga exactamente tres árboles?

Veamos cómo encontrar la solución. Partamos del procedimiento que descrito para los 4 puntos, es decir, tracemos las 8 rectas que pasan por los 9 puntos dispuestos en forma de cuadrado



Ahora juntamos un poco los tres puntos de la segunda columna (los del medio), de modo que aunque perdemos dos segmentos (los horizontales superior e inferior), 'ganamos' cuatro 'en diagonal', con lo que en vez de 8 rectas, tenemos 10.

A nadie se le escapa que, nos podemos plantear un problema más general que el de n^2 puntos: distribuir n puntos del plano formando filas, cada una conteniendo exactamente k puntos, de modo que tengamos el mayor número de filas posibles r(n, k).

Encontrar una expresión matemática para r(n, k). Este problema, tan sencillo de enunciar y

entender, a día de hoy, no está resuelto en general, para cualquier valor de n y k.

$$r(n, 2) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Para esta cuestión, el caso k = 2 (que haya dos puntos en cada recta), es trivial, ya que por dos puntos siempre pasa una única recta, de modo que, si se quieren distribuir n puntos en rectas que contengan dos puntos únicamente, el valor exacto es:

Obsérvese que cuando n = 4, la expresión coincide con el 2n + 2 que comentábamos para el caso de los n^2 puntos. Sin embargo, cuando k > 2, el asunto se complica tanto que muchos investigadores se han centrado en un único valor, por ejemplo, en r(n, 3). De hecho, en geometría discreta, este caso tiene un nombre concreto: e**l problema de plantación de árboles o problema del huerto** .

$$r(n, 3) \leq \frac{\binom{n}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{6}n(n-1)$$

Es sencillo encontrar una cota superior para este caso: como dos líneas no pueden compartir dos puntos distintos, un límite superior trivial para el número de líneas de 3 puntos determinado por n puntos es:

Probablemente algún lector se dará cuenta de que el número de rectas de estas disposiciones es un número natural, mientras que esa cota superior, para n = 5, por ejemplo, nos resulta un número racional (10/3), lo que parece un poco 'chapucero'. Por eso, debemos 'naturalizar' esa expresión. Eso en matemáticas se consigue mediante funciones de teoría de números, como son:

$[x]$: ***parte entera*** de x (a veces se denota también como $E(x)$)
$\lfloor x \rfloor$: ***función suelo*** de x (la forma de los corchetes es clara)
$\lceil x \rceil$: ***función techo*** de x (la forma de los corchetes es clara)

Se definen del siguiente modo (es sencillo; es más complicada la nomenclatura que su significado)

La función parte entera es el resultado de truncar el valor de x, eliminando su parte decimal si la tuviera. Así:

[2] = 2, [2.5] = 2, [1.9] = 1

La función techo de x devuelve el mínimo número entero no inferior a x. O sea:

$$\lceil 2 \rceil = 2, \quad \lceil -2 \rceil = -2, \quad \lceil 2.5 \rceil = 3, \quad \lceil -2.5 \rceil = -2$$

La función suelo de x es el máximo número entero no superior a x. Por ejemplo:

$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor -2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 2.5 \rfloor = 2, \quad \lfloor -2.5 \rfloor = -3$$

De los anteriores ejemplos podemos deducir que cuando x es un número positivo, la parte entera coincide con la función suelo, mientras que, si el número x es negativo, la parte entera coincide con la función techo. Es decir,

$$[x] = \begin{cases} \lceil x \rceil, & si\, x < 0 \\ \lfloor x \rfloor, & si\, x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces, una expresión más acorde con los tipos de números que tratamos para la cota superior del número de rectas es

$$r(n, 3) \leq \left\lfloor \frac{1}{6} n(n-1) \right\rfloor$$

En el año 1974 (también queda ya lejos), los matemáticos Stefan A. Burr, Branko Grunbaum y N. J. A. Sloane probaron, entre otras cosas, que una cota inferior para r(n, 3) es

$$r(n, 3) \geq 1 + \left\lfloor \frac{1}{6} n(n-3) \right\rfloor$$

Hace menos, en 2013, Ben Green y Terence Tao, han demostrado que la cota inferior para r(n, k) de Burr, Grunbaum y Sloane es también cota superior para ciertos valores de n. Es decir, que es el valor exacto. Para nuestro r(n, 3), es exacto para los primeros 14 valores, proporcionado la sucesión

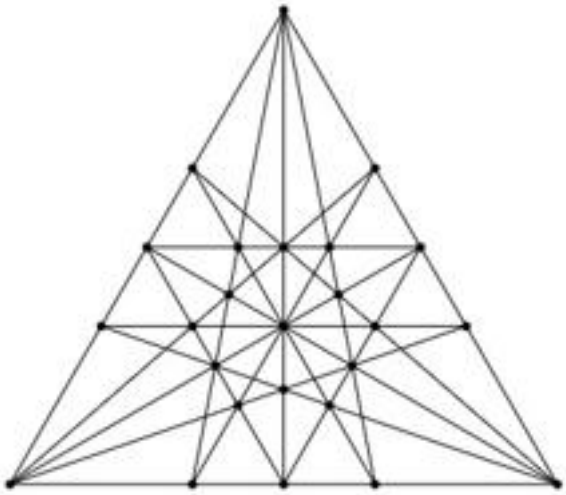
n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$r(n, 3)$	1	1	2	4	6	7	10	12	16	19	22	26

Como ven la propuesta de acertijo atribuida a Newton, es la óptima: sólo existen 10 posibles hileras de árboles de tres árboles cada una, utilizando 9 árboles.

Yo además les propuse la siguiente cuestión:

Colocar 25 árboles en 18 filas de 5 árboles exactamente cada fila.

Una configuración que lo resuelve es la siguiente:



Pero se desconoce si es la cantidad máxima de rectas que se pueden formar con esos 25 árboles, con 5 por segmento.

Por supuesto, se conocen más resultados sobre este tipo de problemas, e involucran matemáticas muy avanzadas. Aquí solo les he dado una pequeña introducción para que se hagan una ligera idea. Y para que comprueben que cuestiones aparentemente elementales pueden derivar en investigaciones de muy alto nivel, con muchas incógnitas aún por resolver.

Así que, este verano, cuando vayan al pueblo a pasear por el huerto, tengan cuidado con las cuestiones que se les puedan ocurrir y, sobre todo, no se las digan a un matemático, ya que de ellas puede generar vaya usted a saber qué.

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)