

UNA INTRODUCCIÓN A LA CURVATURA

Eduardo García Río

Un aspecto central en Geometría y más concretamente en la denominada “Geometría de Riemann”, que engloba la teoría clásica de superficies en el espacio como caso particular, es el estudio de la *curvatura* y su relación con la topología. Pretender hacer un desarrollo riguroso de este concepto nos llevaría a desarrollar una serie de herramientas matemáticas que fácilmente nos harían perder el significado geométrico de la *curvatura*. Así pues, el objetivo de la charla que aquí intentamos reflejar se centró en poner de manifiesto algunos aspectos en los que aparece la curvatura y en intentar reflejar la influencia de la misma.

Nuestra experiencia cotidiana nos indica que la geometría está relacionada con problemas relativos a mediciones de distancias, longitudes, ángulos, áreas, volúmenes, etc. A fin de poder llevar a cabo estas mediciones, es necesario disponer de las herramientas básicas para desarrollar dicha tarea. Esta herramienta es la proporcionada por la teoría de las variedades Riemannianas: variedades diferenciales equipadas con productos interiores en sus espacios tangentes (en particular, toda superficie regular en el espacio euclídeo equipada con su primera forma fundamental). Ahora bien, dado que el producto escalar considerado podrá variar de unos puntos a otros, es esperable que lo mismo suceda con las magnitudes que pretendemos medir. Así, “un mismo segmento” podrá tener distinta longitud dependiendo de su posición en la variedad considerada o, “un mismo parche” encerrará distinta área dependiendo del lugar en que lo situemos. A fin de entender estas variaciones estudiaremos la *curvatura* del espacio. Como veremos, este objeto es el responsable último de las variaciones mencionadas.

Un experimento sencillo nos permite confirmar las afirmaciones anteriores. Imaginemos una naranja que hemos cortado a la mitad y a la que, después de exprimir su zumo aplastamos sobre una mesa. Observaremos que se agrieta y abre conforme se va aplastando, de modo muy parecido a como se muestra en la Figura 1. Este hecho pone de manifiesto que el área del casquete esférico es menor el del correspondiente círculo en el plano. La situación opuesta se produce cuando cortamos un trozo pequeño de la superficie de una rosquilla en la zona próxima al agujero. Al aplastarlo sobre una mesa, se arruga y se solapa consigo mismo, mostrando que el área de dicha región es mayor que el de la correspondiente región del plano (véase la Figura 2).



Figura 1. Un disco geodésico sobre la esfera y su correspondencia plana

Este fenómeno es ampliamente conocido por los sastres que, cuando han de formar una parte de una prenda que haya de adaptarse a una forma convexa, como el busto de un vestido, recortan primeramente del tejido unos trozos puntiagudos –llamados sisa- y posteriormente cosen los lados de la abertura resultante.



Figura 2. Un disco geodésico sobre una superficie de curvatura negativa y su correspondencia plana

De nuevo esta situación es familiar a los sastres: a fin de construir prendas con vuelos, se hacen cortes en el tejido a los que se cosen trozos de tela, lo que permite “aumentar” el área.

Con el interés de poner de manifiesto como las dos situaciones anteriores están relacionadas con la curvatura, comenzaremos primeramente recordando como se aborda el estudio de esta.

Curvaturas extrínsecas e intrínsecas: curvatura de Gauss

En general, existen dos tipos importantes de curvaturas: las extrínsecas y las intrínsecas. La curvatura extrínseca de curvas fue la primera en ser estudiada, dando lugar a las fórmulas de Frenet, que describen completamente el comportamiento de una curva en el espacio en términos de su curvatura, torsión, el punto inicial y la dirección. Tras haber sido abordado el estudio de las curvas en el espacio le tocó el turno a las superficies. Las principales curvaturas que surgieron en este estudio fueron la curvatura media y la curvatura de Gauss. Inicialmente, la curvatura media fue la más estudiada, siendo Gauss el primero en reconocer la importancia de la curvatura que, desde entonces, lleva su nombre.

Curvas en el plano

La *curvatura* de una curva plana (que supondremos de velocidad unidad) se define como el módulo de su vector de aceleración. Geométricamente, la curvatura tiene la siguiente interpretación: dado un punto sobre la curva, existen muchos círculos tangentes a la curva en dicho punto –aquellos cuya velocidad en dicho punto coincida con la de la curva-. Entre estos círculos hay exactamente uno cuya aceleración en el punto fijado es la misma que la de la curva. Así, la curvatura de la curva no es otra cosa que el radio de dicho círculo –el círculo osculador de la curva-. A veces es conveniente asignar un signo a la curvatura. Para ello, se elige un vector unitario normal a lo largo de la curva y se asigna a la curvatura un valor positivo si la curva gira hacia el vector normal elegido y signo negativo si lo hace en dirección opuesta.

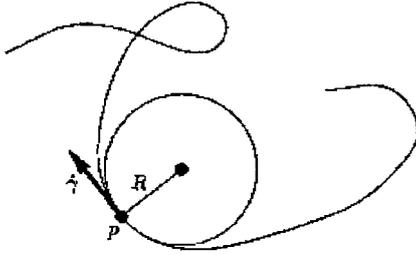


Figura 3. La curvatura de la curva en el punto p es $K(p)=1/R$.

La situación para curvas en el espacio es más compleja, ya que estas pueden retorcerse fuera de un plano sin cambiar su curvatura. Así aparece otra “curvatura”, denominada *torsión*. La relación entre las distintas curvaturas aparece reflejada en el triedro de Frenet-Serret y el Teorema Fundamental de la Teoría de Curvas, que esencialmente asegura que la curvatura y la torsión determinan la curva en el espacio.

Superficies en el espacio

Cuando se considera la situación de las superficies regulares en el espacio, de nuevo el invariante básico es la curvatura, pero esta resulta más complicada que para curvas planas, dado que una superficie puede curvarse de modo diferente para distintas direcciones. Así, la curvatura de una superficie en el espacio se describe por medio de dos números llamados *curvaturas principales*. Supongamos que S es una superficie en el espacio y en un punto dado p , consideramos un vector unitario normal N . Para cualquier plano Π pasando por p y que contenga a N , la intersección de Π con S es una curva plana que pasa por p . Así calculamos la curvatura de dicha curva con el signo correspondiente al vector N . Repitiendo este proceso para todos los planos normales Π , se definen las curvaturas principales de S en p como el mínimo y el máximo de las curvaturas obtenidas.

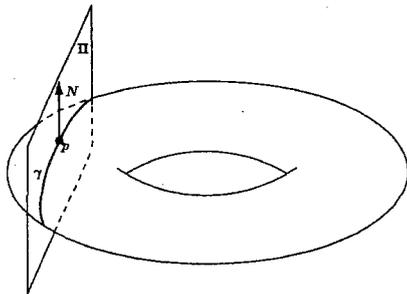


Figura 4. Curva intersección de un plano normal con la superficie.

De un modo algebraico, expresando las curvaturas principales como autovalores de la diferencial de la aplicación de Gauss, es posible construir dos invariantes algebraicos de la misma: la traza y el determinante, lo que da lugar a las dos curvaturas: la *curvatura media* H (obtenida como la suma de las curvaturas principales) y la *curvatura de Gauss* K (el producto de las curvaturas principales). Aunque las curvaturas principales de una superficie no son intrínsecas, Gauss (1827) hizo el descubrimiento sorprendente de que el producto de las curvaturas principales si es un invariante intrínseco. Este resultado constituye lo que conocemos como *Teorema Egregium de Gauss*. (El hecho de que la curvatura media no es un invariante intrínseco se observa fácilmente sin más que considerar dicha curvatura sobre superficies localmente isométricas como son el cilindro y el plano).

Dado que el Teorema Egregium de Gauss muestra que dos superficies localmente isométricas han de tener iguales curvaturas de Gauss, uno podría plantearse el problema inverso de si dos superficies con igual curvatura de Gauss han de ser localmente isométricas. Sin embargo, la respuesta ahora es negativa y, no es difícil construir ejemplos como las superficies de la Figura 5 que, teniendo la misma función curvatura de Gauss, *no* son localmente isométricas. Así se muestra que la curvatura de Gauss, si bien es una herramienta necesaria, no es suficiente para determinar la clase de isometría de una superficie.

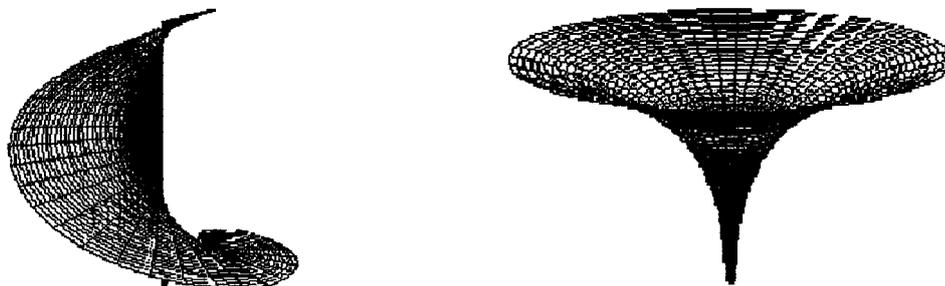


Figura 5. Dos superficies no localmente isométricas con la misma curvatura de Gauss.

Sin embargo, cuando la curvatura de Gauss sea constante, sí se obtiene un resultado de clasificación local de superficies, y estas han de ser localmente isométricas a

- una esfera (si K es positiva)
- el plano (si K es cero)
- la pseudoesfera (si K es negativa)

Es importante señalar que la clasificación anterior es puramente local, pudiendo ser completamente diferente la estructura global. Así, a modo de ejemplo, podemos considerar los siguientes ejemplos de superficies con curvatura de Gauss constante:

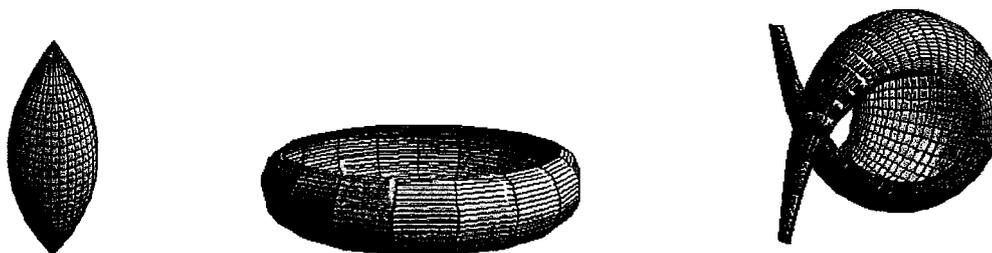


Figura 6. Superficies con curvatura de Gauss constante positiva.

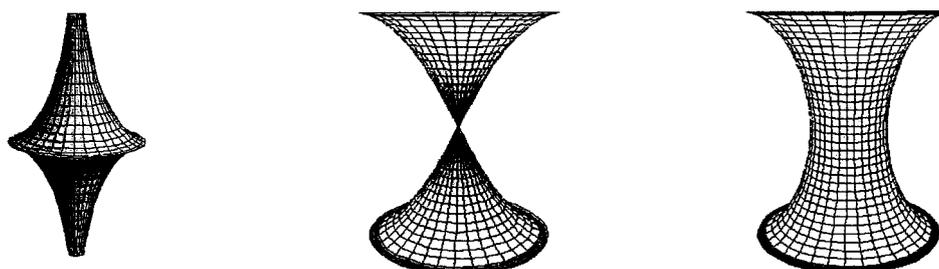


Figura 7. Superficies de revolución con curvatura de Gauss constante negativa

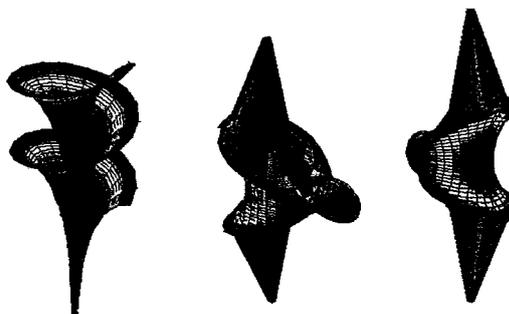


Figura 8. Superficies con curvatura de Gauss constante negativa

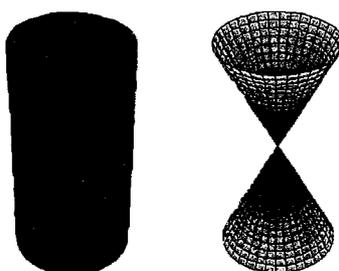


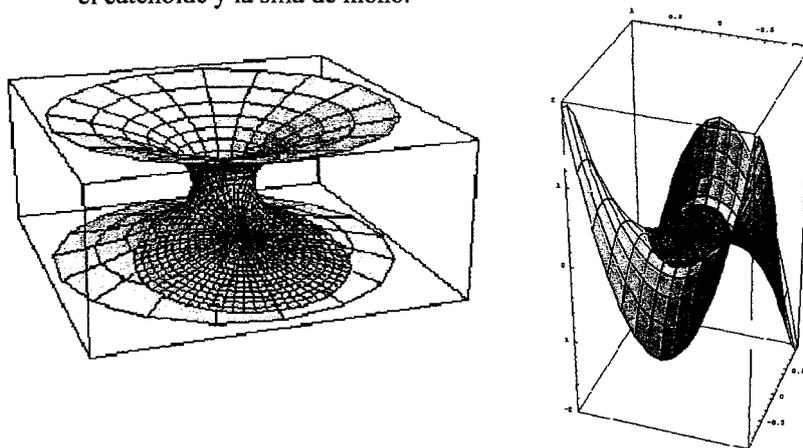
Figura 9. Superficies con curvatura de Gauss constantemente cero

Circunferencias geodésicas

El hecho de que la curvatura de Gauss sea intrínseca la hace detectable a los “habitantes” de la superficie. Su influencia se pone de manifiesto en el hecho de que controla el área de las distintas regiones consideradas sobre la superficie y, por tanto, el tamaño de la región misma en la que reside el habitante. Así, si R es una región sobre la superficie S como las consideradas al inicio, es posible medir la influencia de la curvatura de Gauss en el tamaño de su perímetro.

Una *circunferencia geodésica de centro p y radio $r > 0$* es el conjunto de los puntos de S que se encuentran a distancia exactamente r del punto base p . Para valores del radio suficientemente pequeño, es posible describir estos conjuntos como las imágenes por la aplicación exponencial del correspondiente disco en el plano tangente. En la Figura 10 se muestran discos geodésicos sobre el catenoide y la silla de mono:

Figura 10. Discos geodésicos sobre el catenoide y la silla de mono.

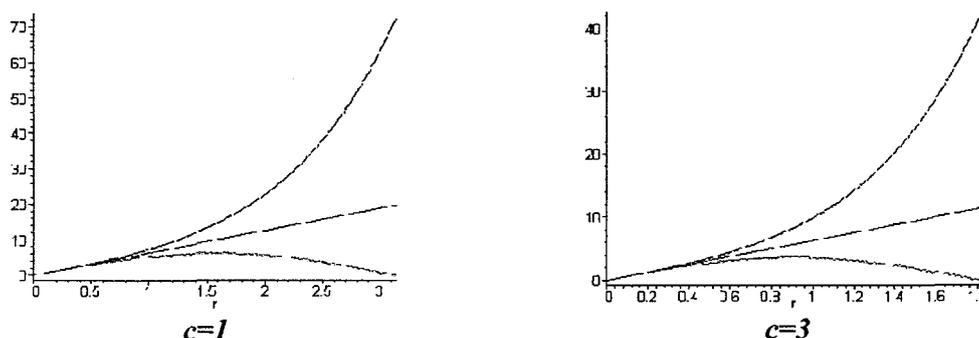


A modo de ejemplo, y como indicación de la situación general, es posible calcular la longitud de los círculos geodésicos cuando la superficie sobre la que realizamos las mediciones tiene curvatura de Gauss constante. Los resultados obtenidos se resumen en la siguiente tabla, en la que se especifica la longitud de un círculo geodésico de radio r con centro en cualquier punto de la superficie. Dicho resultado depende del valor constante c de la curvatura de Gauss, si bien es independiente del punto elegido como centro.

$c > 0$	$c = 0$	$c < 0$
$2\pi \left(\frac{\text{Sen}(r\sqrt{c})}{\sqrt{c}} \right)$	$2\pi r$	$2\pi \left(\frac{\text{Senh}(r\sqrt{-c})}{\sqrt{-c}} \right)$

11. Longitud de las circunferencias geodésicas en función de la curvatura de Gauss constante.

La comparación de los resultados obtenidos se muestra en las siguientes gráficas, donde puede verse que las circunferencias geodésicas $S_p(r)$ sobre una superficie de curvatura de Gauss constante positiva tienen longitud menor que la de los correspondientes círculos en el plano Euclídeo que, a su vez es menor que la correspondiente a las circunferencias geodésicas sobre superficies con curvatura de Gauss constante negativa.



12. Comparación de las longitudes de las circunferencias geodésicas en 11.

Así, se tiene que la longitud de las circunferencias geodésicas (equivalentemente el área de los círculos geodésicos) disminuye al aumentar la curvatura y aumenta al disminuir la curvatura. Este hecho se mone de manifiesto si consideramos el desarrollo en serie de Taylor de la función que mide la longitud $L(S_p(r))$ de las circunferencias geodésicas en función de su radio. Así, se obtiene que

$$L(S_p(r)) = 2\pi r \left(1 - \frac{K(p)}{6} r^2 + \dots \right)$$

13. Primeros términos en el desarrollo en serie de Taylor de la función longitud de las circunferencias geodésicas

Recíprocamente, a partir de la expresión anterior es posible obtener el valor de la curvatura de Gauss por un proceso de paso al límite. Dicho proceso involucra tan sólo la longitud de las circunferencias geodésicas, lo que claramente muestra que la curvatura de Gauss es un invariante de la geometría intrínseca de la superficie.

$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3(2\pi r - L(S_p(r)))}{\pi r^3}$$

14. Expresión de la curvatura de Gauss en términos de la longitud de circunferencias geodésicas.

A continuación mostraremos una serie de figuras a través de las que pueden visualizarse las circunferencias geodésicas sobre superficies con curvatura de Gauss constante. En primer lugar, sobre el cilindro (localmente isométrico al plano), se observa como todas las geodésicas radiales que emanan del centro se separan de igual forma en todas las direcciones y, además, el grado de separación es el mismo que en el plano. Así, la longitud (o el área) de las circunferencias geodésicas (o los círculos geodésicos) es el mismo que en el plano Euclídeo, siempre y cuando el diámetro de la circunferencia sea inferior al correspondiente del cilindro – situación esta en la que aparecerían autointersecciones-.

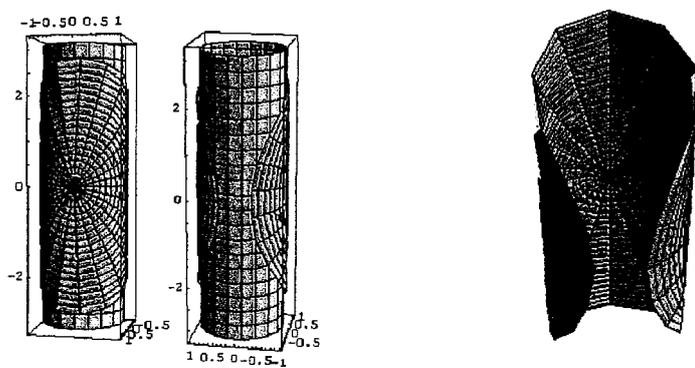


Figura 15. Discos geodésicos sobre el cilindro ($K=0$).

La situación en la esfera es, de alguna forma diferente al caso de curvatura de Gauss cero. De hecho, la positividad de la curvatura de Gauss fuerza que las geodésicas radiales, que inicialmente se separan al emanar del centro, posteriormente —pasado el ecuador de la esfera— tiendan de nuevo a juntarse en el punto antipodal al centro de la circunferencia geodésica.

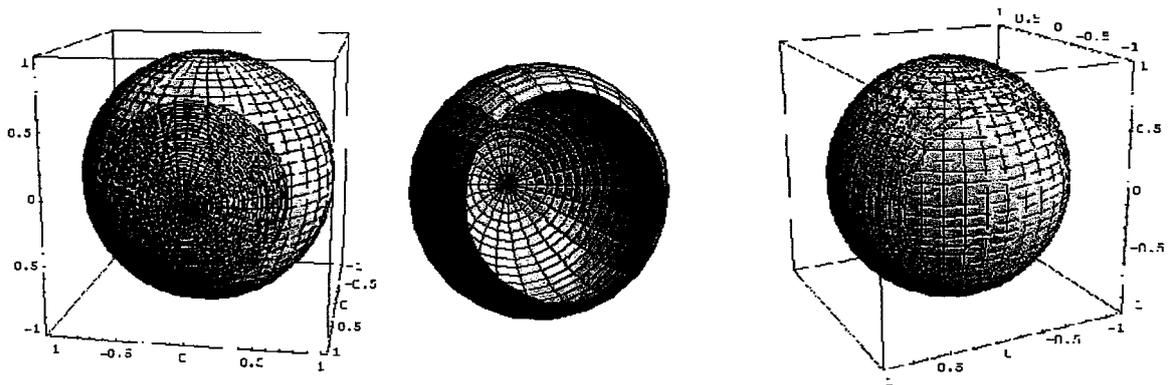


Figura 16. Discos geodésicos sobre la esfera ($K > 0$).

De nuevo la situación es diferente cuando la curvatura de Gauss es negativa. En esta situación, como puede verse sobre la pseudoesfera, los radios geodésicos se separan al emanar del centro, pero sin volver a juntarse.

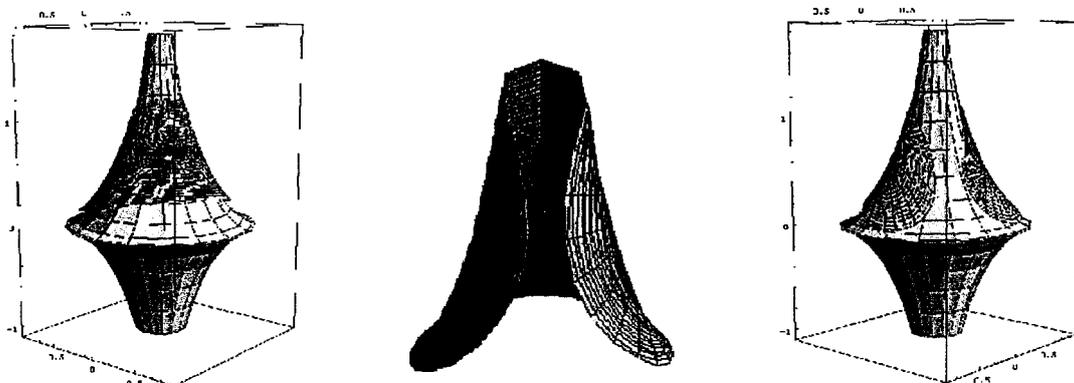


Figura 17. Discos geodésicos sobre la pseudoesfera ($K < 0$).

Referencias

- [1] M. Berger, Riemannian Manifolds: From Curvature to Topology (A brief historical overview) en *S. S. Chern. A great geometer of the twentieth century*. Expanded edition. (S.-T. Yau, Ed.). International Press, Cambridge, MA, 1998.
- [2] M. P. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1990.
- [3] L. A. Cordero, M. Fernández, A. Gray, *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies con Mathematica*, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., Wilmington, Delaware, U.S.A., 1994.
- [4] A. Gray, *Tubes*, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1990.
- [5] S. Montiel, A. Ros, *Curvas y superficies*, Proyecto Sur de Ediciones, S.L., Granada, 1997.