# Simetría

**por**

**Antonio F. Costa González, U.N.E.D.**

El concepto de simetría es de gran importancia, no sólo en arte y en matemáticas sino en muchas otras ciencias. Así simetría aparece en física, química, biología, geología,.... En matemáticas es esencial en la aparición y en el desarrollo de muchas ideas fundamentales. Por supuesto es de gran importancia en geometría pero también es central en álgebra donde se halla en la base de la teoría de grupos. Por dar un ejemplo, la teoría de Galois está basada en la simetría y se aplica desde para determinar qué polígonos regulares se pueden construir con regla y compás hasta para saber qué ecuaciones algebraicas se pueden resolver mediante expresiones con radicales.

En arte el término simetría es sinónimo de armónico, bello, bien proporcionado, pero también se aplica a la simetría geométrica que puede presentar un objeto. El objetivo de esta ponencia ha sido introducir el concepto de simetría (geométrica) y el de grupo de simetrías de una figura. Hemos descrito los posibles grupos de simetrías planas y algunos de figuras tridimensionales o en espacios con geometría más compleja.

Como ocurre habitualmente en matemáticas es necesario en principio abstraer el concepto de simetría a su máxima generalidad. Esto nos permitirá estudiar la simetría en muy distintos contextos. Para ello nos hemos de situar en un universo dotado de cierto tipo de transformaciones naturales. Una simetría de un objeto de tal universo será una transformación que deja invariante tal objeto.

El paradigma y origen de la simetría se da en el estudio de las figuras del plano o del espacio. El universo es el plano, el espacio tridimensional o n-dimensional y las trasformaciones son los movimientos. Por ejemplo en la Figura 1 vemos varios ejemplos de motivos de arte primitivo que son figuras planas y como tales con simetrías que son rotaciones.

*Figura 1*

El copo de nieve de la Figura 2 además de tener simetrías que son rotaciones tiene simetrías que son reflexiones (salvando pequeñas imperfecciones). Así pues el análisis de las simetrías de las Figuras 1 y 2 nos están marcando una diferencia interna entre tales motivos.

Las simetrías de una figura tienen estructura algebraica de grupo. El tipo algebraico del grupo nos permite analizar las distintas posibles simetrías que pueden poseer las figuras planas. Los grupos de simetrías de las figuras planas se llaman grupos de Leonardo y algebraicamente son de dos tipos: cíclicos (generados por un solo elemento, geométricamente sólo contienen rotaciones, los de la Figura 1) o diédricos (que tienen también reflexiones como en la Figura 2).

Si dejamos que nuestra imaginación cree en nuestra mente un friso que se extiende en una dirección y su opuesta hasta el infinito los grupos de simetrías pueden ahora contener movimientos que son traslaciones y reflexiones sesgadas (composiciones de traslaciones con reflexiones con eje paralelo al vector de traslación). Los grupos de simetrías posibles para los frisos son siete. Algunos de ellos están ilustrados en la Figura 3.

Otros grupos de simetrías más complejos son los cristalográficos planos que son los grupos de simetrías de arabescos infinitos. Estos grupos contienen traslaciones en dos direcciones distintas. Los grupos cristalográficos planos se clasifican en 17 tipos dependiendo de su estructura algebraica o bien del tipo de movimientos que contienen. Los grandes maestros de este tipo de simetría son sin duda los antiguos artesanos de la España musulmana. El arabesco que aparece en la Figura 4 ha sido creado recientemente usando un programa de diseño (Taprats).

*Figura 2*

El tipo de grupos de simetría crece al considerar objetos de tres dimensiones o más y crece aun más considerando geometrías no euclídeas sobre los universos donde se hallan los objetos.

Los grupos de simetría de figuras no sólo son interesantes para analizar una figura o una obra de arte sino que también poseen una potencia generadora. Algo parecido a lo que ocurre cuando situamos algo dentro de un caleidoscopio. El resultado es la repetición simétrica de la figura original, dando lugar a diseños con distintos tipos de grupos de simetrías dependiendo de la forma de construcción del caleidoscopio. Actualmente existen programas que emulan “caleidoscopios” para cualquier grupo cristalográfico (sin espejos pues el grupo puede no contener reflexiones) y que originan cualquier grupo cristalográfico. En la bibliografía hay algunas direcciones de Internet donde se puede experimentar con tales programas.

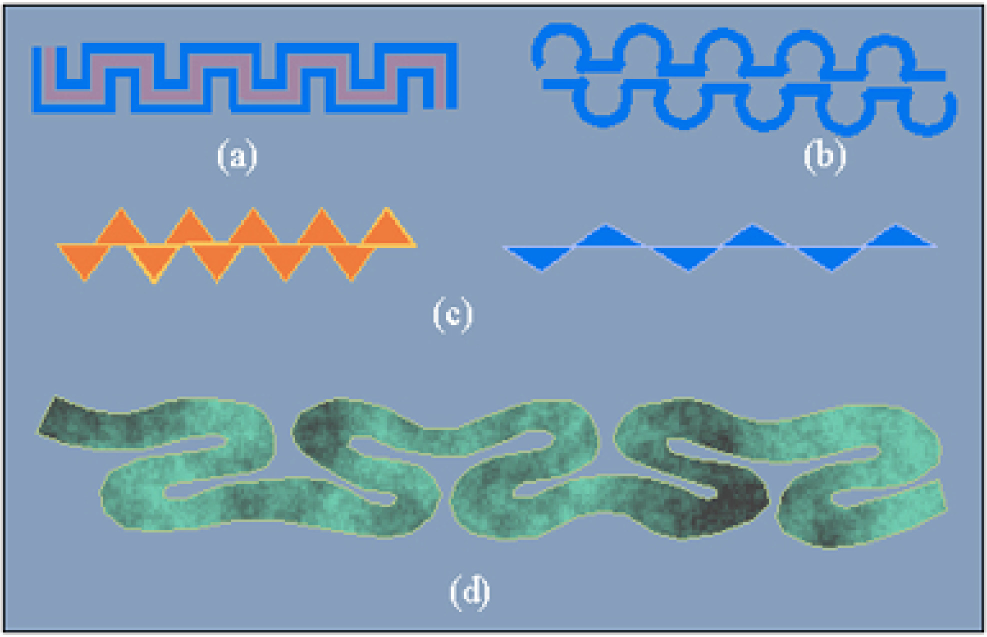


*Figura 3*

El análisis de los grupos de simetrías de obras de arte ayuda a su análisis y también presenta un nuevo punto de vista que puede permitir disfrutar de un modo más completo de algunas realizaciones artísticas.

¿ Qué es lo que hace que nos gusten las figuras simétricas? Podríamos decir que aparecen en la naturaleza y que nos parece bien que este tipo de regularidad también esté presente en nuestras creaciones. Me gustaría ofrecer otra interpretación. Imaginémonos contemplando un arabesco en una pared. El grupo de simetría crea en nuestra imaginación la continuación infinita y regular de tal diseño. Al comprobar que nuestra creación coincide con la realización material que vemos en la pared tenemos una agradable sensación de placer. Algo parecido a lo que los matemáticos sentimos al comprobar que un teorema matemático se verifica en un ejemplo particular o lo que le ocurre a un físico cuando comprueba experimentalmente sus desarrollos teóricos.

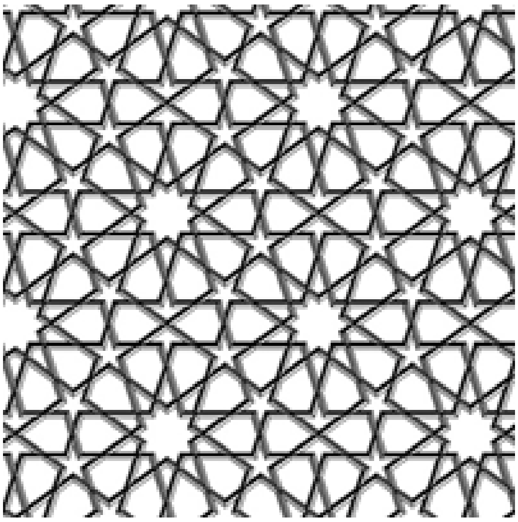

*Figura 4*

## Bibliografía

[1] C. Alsina, R. Pérez, R. Ruiz, *Simetría Dinámica*, Editorial Síntesis, Madrid, 1990.

[2] C. Alsina, E. Trillas, *Lecciones de Álgebra y Geometría. Curso para estudiantes de Arquitectura*, Gustavo Gili, Barcelona, 1990.

[3] M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Undergraduate Texts in Maths., Springer Verlag, New York, 1988.

[4] A. F. Costa, *Arabescos y Geometría*, Vídeo, U.N.E.D., Madrid, 1996.

[5] D. L. Johnson, *Symmetries*, Undergraduate Texts in Maths., Springer Verlag, New York, 2001.

[6] A. Ramírez, C. Usón, *Los 17 grupos de simetría en el arte mudéjar aragonés*, U.N.E.D.-Aragón, Barbastro 2002.

[7] H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton, 1952.

**Algunas direcciones de Internet:**


Programas en Java:

[8] *El programa KALI*:

**http://www.scienceu.com/geometry/handson/kali/kali.html**

[9] *Frisos*:

**http://www.licm.com/noFr.f/BordNF.html**

[10] *Caleidoscopio*:

**http://www.permadi.com/java/spaint/spaint.html**

[11] *Tessellate*:

**http://shodor.org/interactivate/activities/tessellate/index.html**

[12] *Taprats*:

**http://www.cs.washington.edu/homes/csk/taprats/**

[13] *Webs con documentación sobre el tema*:

**http://comp.uark.edu/~cgstraus/symmetry.unit/**

**http://mathforum.org/geometry/rugs/symmetry/**

**http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/jbsymteslk.htm**

**http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/**

**http://www.ucs.mun.ca/~mathed/Geometry/Transformations/symmetry.html**

**http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/symmetry.htm**

**http://www.geom.umn.edu/docs/doyle/mpls/handouts/handouts.html**

**http://www.math.okstate.edu/mathdept/symmetry/**