

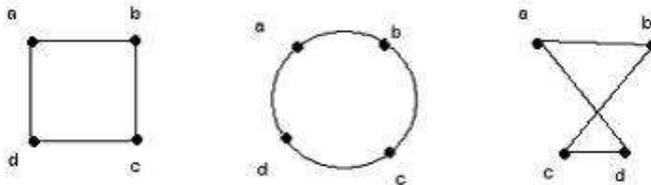
Digitalización de imágenes y Topología

por

Pedro Real Jurado, Universidad de Sevilla

1. Introducción

La Topología es un área de las Matemáticas que privilegia fundamentalmente la noción de vecindad, adyacencia o relación entre objetos. Sin ningún tipo de dudas, podemos afirmar que el concepto más representativo y emblemático de la Topología es el de grafo, objeto abstracto consistente en vértices (o nodos) y lados (o arcos) entre pares de vértices. Una codificación abstracta de un grafo concreto podría ser $G = (V, A)$, donde $V = \{a, b, c, d\}$ y $A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$. En la figura siguiente, se muestra tres realizaciones o visualizaciones (en el plano o en el espacio) distintas del mismo grafo.



La deformaciones o transformaciones planas o espaciales que llevan una realización de un grafo a otra equivalente las catalogaremos de transformaciones topológicas. Extendiendo esta definición informal a cualquier objeto donde se pueda hablar de vecindad entre sus elementos, diremos que una propiedad de un objeto es de tipo topológico si no se altera ante “transformaciones topológicas” sobre el mismo. En la figura siguiente mostramos una imagen de un conjunto de manchas negras sobre fondo inmaculadamente blanco, seguida de dos imágenes, resultado de sendas transformaciones geométricas de la imagen original: la primera es una

transformación topológica y la última no. Es fácil ver que el número de “manchas” negras distintas o el número de “manchas blancas” rodeadas por una mancha negra podrían considerarse intuitivamente propiedades topológicas.



Por otra parte, hablaremos aquí de imágenes digitales, es decir, representaciones de imágenes dos-dimensionales como conjuntos finitos de elementos pictóricos o píxeles, a los que se les asigna un valor en un nivel de gris o una escala de color. Las imágenes digitales que manejaremos aquí se enmarcarán en un malla cuadrado y serán binarias, es decir, en la que sus píxeles sólo pueden tener color 0 (blanco) o color 1 (negro). La principal tarea del procesamiento de Imágenes Digitales es reconocer propiedades de objetos reales basados en sus imágenes digitales. Una imagen real dos-dimensional continua binaria (que presenta únicamente dos colores: blanco y negro) puede ser representada como un subconjunto generalmente infinito de \mathbb{R}^2 . Las imágenes digitales se obtienen usando alguna herramienta de muestreo como una cámara digital o un escáner. Basados en propiedades técnicas de estos aparatos de muestreo, los píxeles de la imagen digital se suponen formando un malla cuadrado y modelados en forma binaria como subconjuntos finitos de \mathbb{Z}^2 , es decir, como subconjunto de puntos con color 1 (negro), teniendo los restantes puntos color 0 (blanco).

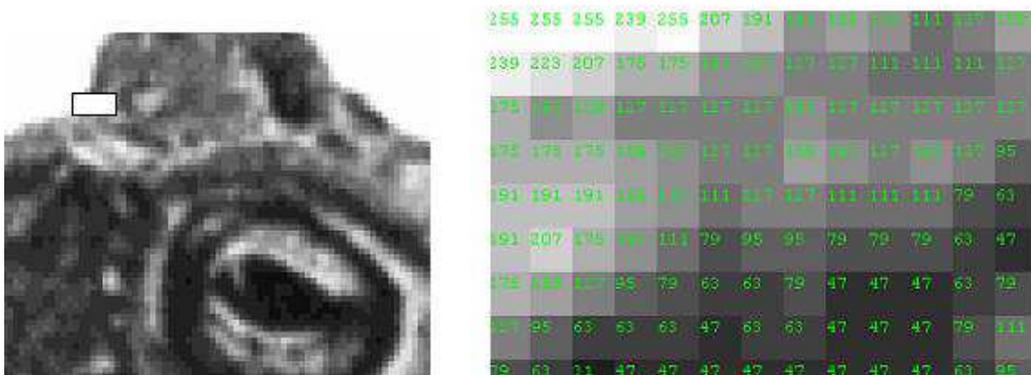


Figura 1. Imagen digital en escala de grises (con paleta de colores grises entre 0 (negro) y 255 (blanco)) y ampliación o zoom de una zona rectangular de la misma en la que el valor de gris de cada píxel aparece resaltado.

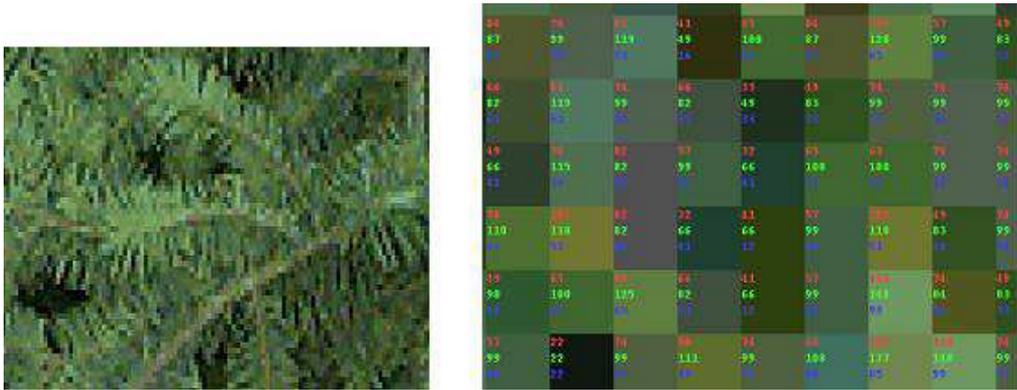


Figura 2: Imagen digital en color y ampliación de una parte de la misma . La paleta de 16.777.216 colores de esta imagen se estructura en forma vectorial (R, G, B) , donde R indica la cantidad de rojo, G la cantidad de verde y B la cantidad de azul, todas en un rango numérico de 0 a 255.

Abordaremos aquí la constitución de una imagen digital a partir de una imagen real, también llamado proceso de digitalización. Hablando en término de percepciones, el paso de una entidad continua a una discreta se describe fundamentalmente como un cambio de rotura de un ente indivisible y consistente a un objeto completamente segmentado, en la que incluso sus elementos más simples (píxeles) pueden percibirse individual y separadamente. Un buen tratamiento de esta cuestión es fundamental a la hora de poder trasladar “adecuadamente” la práctica totalidad de nociones y propiedades del mundo matemático continuo al discreto. Por tanto, una cuestión esencial en Procesamiento de Imágenes Digitales es determinar qué características, en nuestro caso topológicas, de la imagen digital corresponden, bajo ciertas condiciones, a propiedades del objeto subyacente. En las aplicaciones prácticas esta cuestión se resuelve la mayoría de los casos, juzgando visualmente las imágenes digitales obtenidas.

Como ya hemos comentado anteriormente, las propiedades topológicas de imágenes dos-dimensionales continuas binarias más intuitivamente evidentes son el número de componentes conexas negras y el número de componentes conexas blancas “encerradas” por alguna componente negra (más informalmente llamadas “agujeros”). Por componente conexa entenderemos el conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 del mismo color, tal que para dos puntos cualesquiera de dicha componente, exista siempre un camino continuo dentro de ella que una a ambos puntos.



Figura 3: Imagen 2D binaria con 9 componentes conexas negras y 4 agujeros.

Veremos aquí como trasladar al contexto discreto estas propiedades, así como definir las en términos exclusivamente de adyacencia entre píxeles no es tan fácil como parece. La gran cantidad de imágenes que aparecen en este artículo se pretende justificar en aras de una mejor y más rápida comprensión y “visualización” de los conceptos y las ideas. La pérdida de rigurosidad a la hora de describir conceptos y la escasez de texto científico en este trabajo, creemos que también se pueden disculpar si se logra aquí el objetivo prioritario de divulgación de conocimiento. La bibliografía que se añade al final intenta guiar a aquellos aventureros lectores que quieran adentrarse más en el mundo científico-técnico que rodea a este campo que compagina armoniosamente Matemáticas y Tecnología.

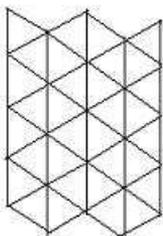
Una gran parte de las imágenes expuestas en este trabajo consisten en capturas de pantalla de la interfaz gráfica al usuario del software educativo PIXELIN. Dicho programa simula procesos elementales de digitalización para imágenes binarias dos-dimensionales y se puede descargar gratuitamente de la web.

2. Digitalización

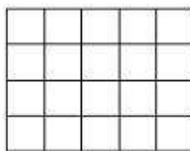
En esta primera sección, nos limitaremos a mostrar las partes fundamentales de las que consta un proceso de digitalización cualquiera de una imagen: el muestreo y la cuantización.

Una imagen natural capturada con una cámara, un telescopio, un microscopio o cualquier otro tipo de instrumento óptico presenta una variación de sombras y tonos continua. Imágenes de este tipo se llaman imágenes continuas o analógicas. Mediante el proceso de digitalización conseguimos transformar nuestras imágenes continuas en imágenes fácilmente manipulables y controlables tanto por nosotros como, fundamentalmente, por el ordenador.

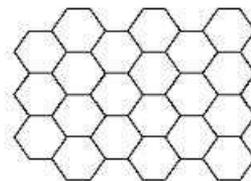
Un muestreo consiste en una subdivisión de la imagen analógica en porciones regulares. Las porciones que habitualmente más se utilizan son cuadrados, aunque también se utilizan mallados o teselaciones triangulares o hexagonales (véase la figura de abajo). En el caso de un muestreo cuadrado, éste queda definido fundamentalmente por el lado r de la cuadrícula unidad que genera el mallado.



Mallado triangular



Mallado cuadrangular



Mallado hexagonal

Un esquema simple de digitalización es superponer un mallado regular cuadrado sobre la imagen (proceso de muestreo) y posteriormente “colorear” cada cuadrícula unidad resultante de la imagen con un color (de una paleta de un número finito de colores diferentes) que se asemeje lo más posible al colorido de dicha cuadrícula. Este último proceso de coloreado se llama cuantización.

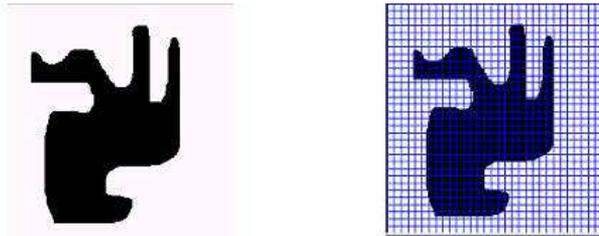


Figura 4: (Izquierda) Imagen continua binaria; (Derecha) muestreo de la misma, superponiéndole un mallado cuadrado.

Supongamos ahora que tenemos un dibujo (en un folio A4, por ejemplo) de una mancha negra sobre fondo blanco (como la mostrada en la figura anterior) y nos planteamos calcular el área de dicha mancha. El calcar la mancha en un papel cuadrículado y posteriormente rellenar de negro los cuadraditos con alguna porción de color negro en el interior de los mismos nos permitiría al tiempo, calcular sin mucho esfuerzo el área aproximada de la mancha (por exceso) dada en cuadrículas unidad de un lado determinado, así como disponer de una aproximación geométrica de la imagen de partida. Es claro que la aproximación al área verdadera de la mancha será mayor cuanto menor sea la cuadrícula unidad del mallado cuadrado que se superponga. El proceso de coloreado de cuadrículas (también llamado más técnicamente, cuantización) puede realizarse considerando otras reglas. Por ejemplo, si coloreamos un cuadradito de blanco en el momento de que tenga alguna porción de color blanco y de negro en caso contrario, aproximaremos el área de la mancha por defecto.

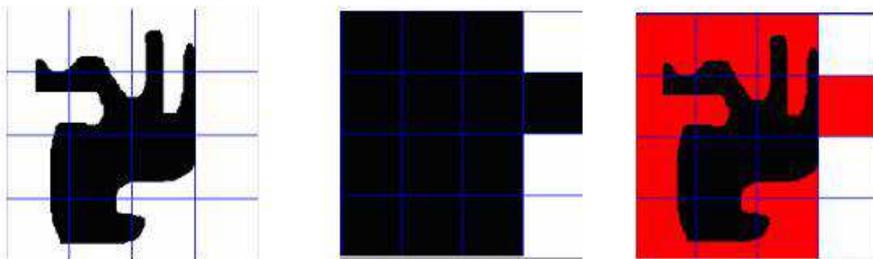


Figura 5: (Izquierda) Mancha con muestreo cuadrado; (Centro) Cuantización por exceso: todo píxel con una mínima porción de negro se colorea negro. El área de la imagen digitalizada es de 13 cuadrados negros (Derecha): La diferencia entre la aproximación digital y la mancha se muestra en rojo.

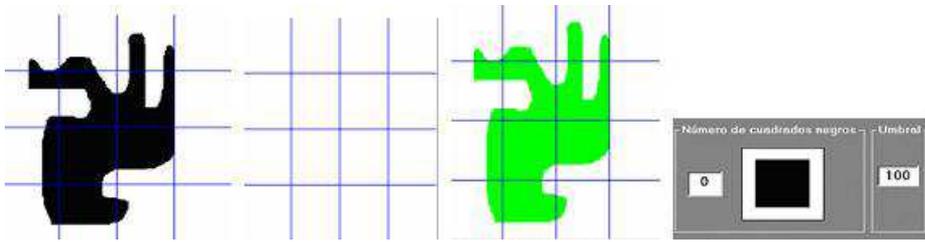


Figura 6: (Izquierda) Mancha con muestreo cuadrado; (Centro Izquierda) Cuantización por defecto: todo píxel con una mínima porción de blanco se colorea blanco. El área de la imagen digitalizada es de 0 cuadrados negros (Derecha): La diferencia entre la mancha y su aproximación digital se muestra en verde.

Si ahora en cada cuadradito pudiera disponerse un sensor físico sensible a la intensidad de luz capaz de determinar el porcentaje de color blanco (y por tanto, también de color negro) existente en el área del cuadrado, podríamos cuantizar la imagen binaria muestreada considerando un cuadrado como negro en el momento de que la proporción de color negro sobre el área total del cuadrado igualase o superase un determinado valor umbral q (medido por ejemplo en porcentajes enteros de 1 a 100). Insistamos aquí que nuestro dispositivo físico sobre cada cuadrado será el que determinará automáticamente esta proporción, no siendo para nosotros un problema su cálculo. No consideramos el valor umbral $q = 0$, ya que este significaría que cualquier cuadradito elemental sería coloreado de color negro debido a que todos presentarían una proporción de negro sobre el área total del cuadrado igual o superior a 0. Los casos de valores umbrales $q = 1$ y $q = 100$ son los casos anteriormente tratados. Ahora si asociamos a toda cuadrícula elemental del muestreo, un punto representativo del mismo (por ejemplo, el centro de dicho cuadrado), el resultado del proceso de cuantización es un conjunto finito de puntos, cada uno de los cuales podría expresarse con un par de coordenadas enteras (m, n) . A la cuadrícula elemental de muestreo podemos llamarle píxel físico y al punto representativo de dicha cuadrícula, píxel lógico. La idea es que a partir de un subconjunto de píxeles lógicos es posible siempre reconstruir la imagen digital con el tamaño de muestreo (resolución) que se quiera.

La digitalización física (resp. lógica) de una imagen real binaria dos-dimensional I , usando como valor de muestreo cuadrado r y valor umbral de cuantización q , se notará $\text{Dig}_f(I; r, q)$ (resp. se notará $\text{Dig}_l(I; r, q)$) y representa el conjunto finito de píxeles físicos (resp. píxeles lógicos) resultantes del muestreo y cuantización mencionados. Es claro que la digitalización física es una transformación del plano \mathbb{R}^2 en sí mismo mientras que la digitalización lógica es una transformación del plano \mathbb{R}^2 en \mathbb{Z}^2 . Por imagen digital entenderemos aquí, indistintamente, un subconjunto finito de píxeles físicos o lógicos y será el contexto el que discrimine en qué espacio \mathbb{R}^2 o \mathbb{Z}^2 nos movemos.

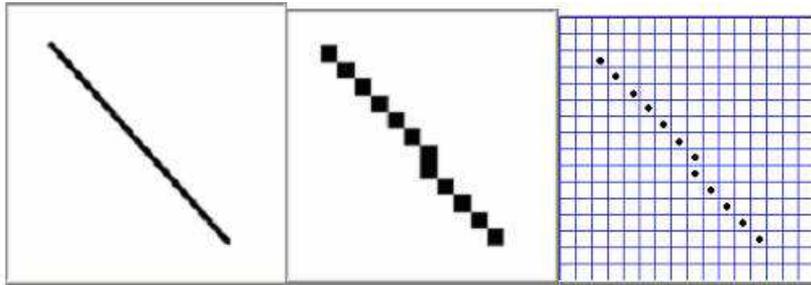


Figura 7: (Izquierda) Imagen de una recta; (Centro) “Digitalización física” de la recta vista como subconjunto de \mathbb{R}^2 ; (Derecha) “Digitalización lógica” de la recta como subconjunto de “píxeles” en \mathbb{Z}^2 .

En el caso de nuestro problema de medida de área de una mancha, estas cuantizaciones para valores intermedios entre 1 y 100, proporcionan mediciones de área comprendidas entre el área de la digitalización física con valor umbral $q = 100$ y el área con valor umbral $q = 1$.

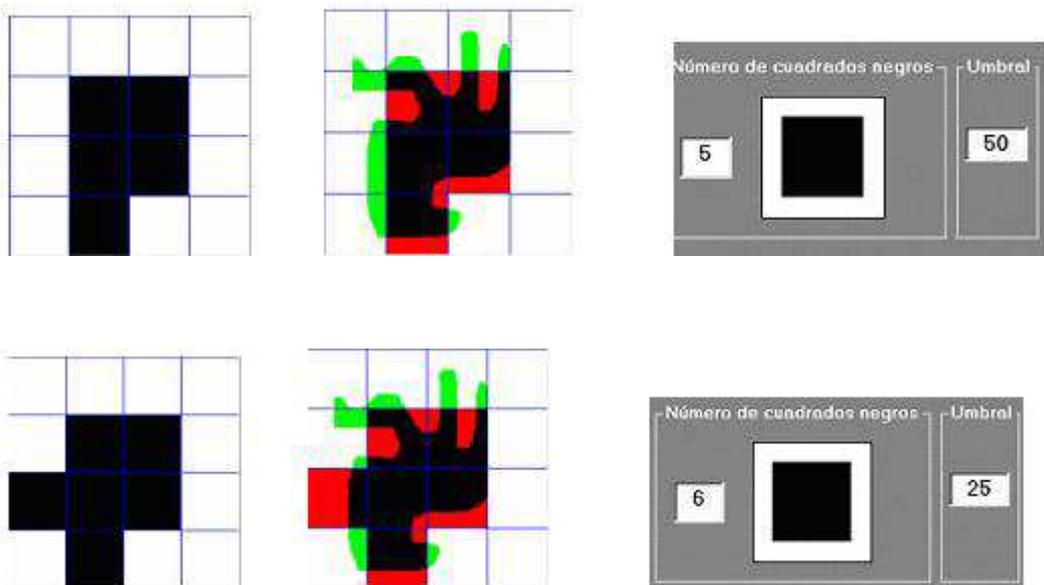


Figura 8: Diferentes cuantizaciones (valores umbrales $q = 50$ y $q = 25$) de la mancha usando el mismo valor de muestreo. En cada columna tenemos la imagen digitalizada (izquierda), las diferencias (en verde o rojo) entre las imagen real y la digital (centro) y el valor umbral empleado y el área de la imagen digital en píxeles (derecha). La diferencia en verde resalta la información pictórica que se ha perdido al digitalizar, mientras la diferencia en rojo destaca la información pictórica nueva que aparece en la aproximación digital.

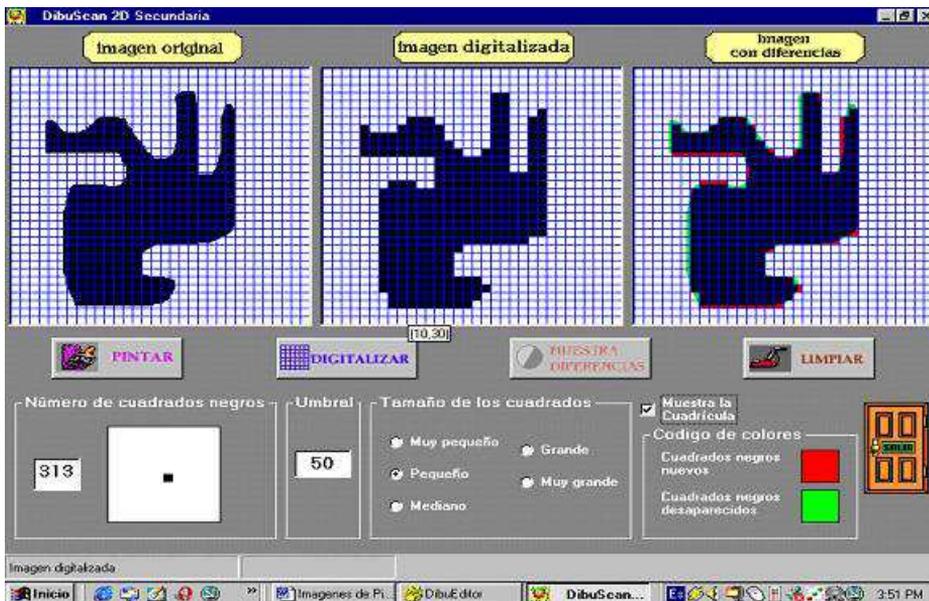


Figura 9: Capturas de pantalla de Dibuscan 2D (de Estudio Gráfico PIXELIN) en la que se muestra dos digitalizaciones físicas de la mancha usando el mismo valor umbral de cuantización pero distinto valor de muestreo.

Es claro que cuanto más fino es el muestreo, más fidedignas serán digitalizaciones físicas de la imagen original. Resultados menos evidentes y dependientes de la forma de la imagen, se obtienen cuando variamos el valor umbral y fijamos el valor de muestreo.

El proceso de cuantización no sólo puede aplicarse a imágenes binarias, sino también a imágenes donde aparecen una gama de tres o muchos más colores. Por el momento, nos limitaremos aquí a decir que cada pixel de la imagen muestreada deberá tener tras este proceso de coloreado un color constante. Nuestro coloreado de la imagen estará limitado a una paleta de colores finita y el color final homogéneo de cada pixel (físico o lógico) se dilucidará según reglas de proporción y de similitud entre colores. Aunque evidentemente de ingeniería matemática mucho más avanzada que la que aquí hemos mostrado con aquí con el programa “simulador” de digitalización Dibuscan 2D del estudio gráfico PIXELIN, muchos escaners y cámaras digitales modernos presentan todavía como estrategia primaria de digitalización de imágenes la simulada por Dibuscan2D.

3. Preservación topológica en la digitalización física.

En esta sección, consideraremos sólo el proceso de digitalización física de una imagen y analicemos aquí los cambios topológicos que presentan las imágenes bajo dicho mecanismo. Consideramos, por tanto, que tanto la imagen original continua como la digitalizada son subconjuntos de \mathbb{R}^2 .



Figura 10: Imagen binaria (izquierda) y digitalización (derecha) vistas ambas como subconjuntos de \mathbb{R}^2 .

Trabajamos aquí con la distancia euclídea entre puntos de \mathbb{R}^2 que, como es bien sabido, se define como $d_e((a, b), (c, d)) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$. El conjunto de puntos que se encuentran a una distancia de un punto (a, b) menor que un valor fijo dado r , nos define el círculo de centro (a, b) y radio r , que se nota $B((a, b), r)$. El concepto de vecindad en \mathbb{R}^2 que determina la topología de este espacio es precisamente el que nos proporciona localmente para cada punto, el conjunto de círculos de centro en el punto y radio positivo cualquiera.

Dado un subconjunto A de \mathbb{R}^2 , definimos el borde de A , y lo notamos $\partial(A)$, como el conjunto de puntos (x, y) de A que satisfacen la propiedad de que cualquier círculo centrado en (x, y) y radio cualquiera siempre tiene intersección no vacía con el conjunto complementario de A .



Los puntos coloreados en negro pertenecen al borde de la “mancha” naranja.

Siempre suponemos aquí que las imágenes binarias continuas que manipulamos presentan una componente conexa blanca que “rodea” a todas las demás (sean blancas o negras). Se trata del fondo de la imagen. Diremos que una transformación “preserva la topología” de una imagen binaria cuando el número de componentes conexas negras y de agujeros de la misma se mantiene inalterable antes y después de la transformación.

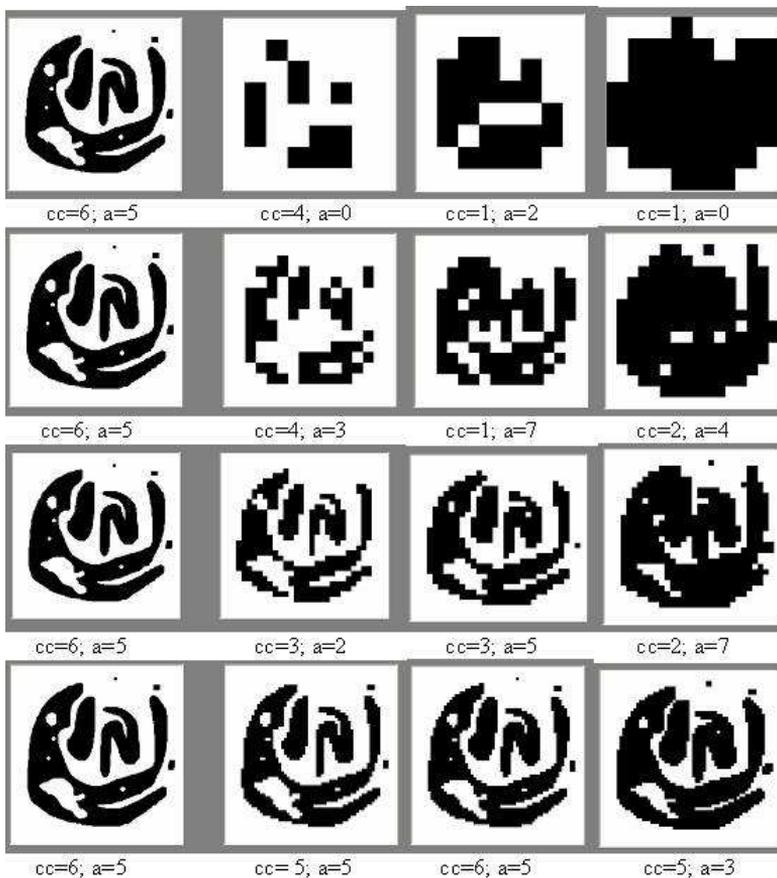


Figura 11: Primera columna con la imagen original ($cc = 6$; $a = 5$); las restantes columnas, distintas digitalizaciones de la imagen con valor umbral de cuantización

fijo ($q = 70$, para la primera columna, $q = 50$ para la segunda y $q = 5$ para la tercera); por filas, vemos las distintas imágenes digitalizadas con un muestreo fijo (valores $8r, 4r, 2r$ y r). Apréciase las variaciones en el número de componentes conexas negras y blancas de las distintas aproximaciones digitales a la imagen.

Queremos establecer aquí algún resultado de preservación de la topología en la digitalización física en términos de la finura del mallado, del valor umbral de cuantización y/o de la distancia euclídea entre puntos o subconjuntos de \mathbb{R}^2 . Experimentemos con casos concretos y veamos en qué manera los números de componentes negras y blancas van variando en las imágenes digitalizadas.

Al preferenciar como condición el valor de muestreo sobre el valor de cuantización, la complejidad del problema de la preservación topológica se simplifica un poco.

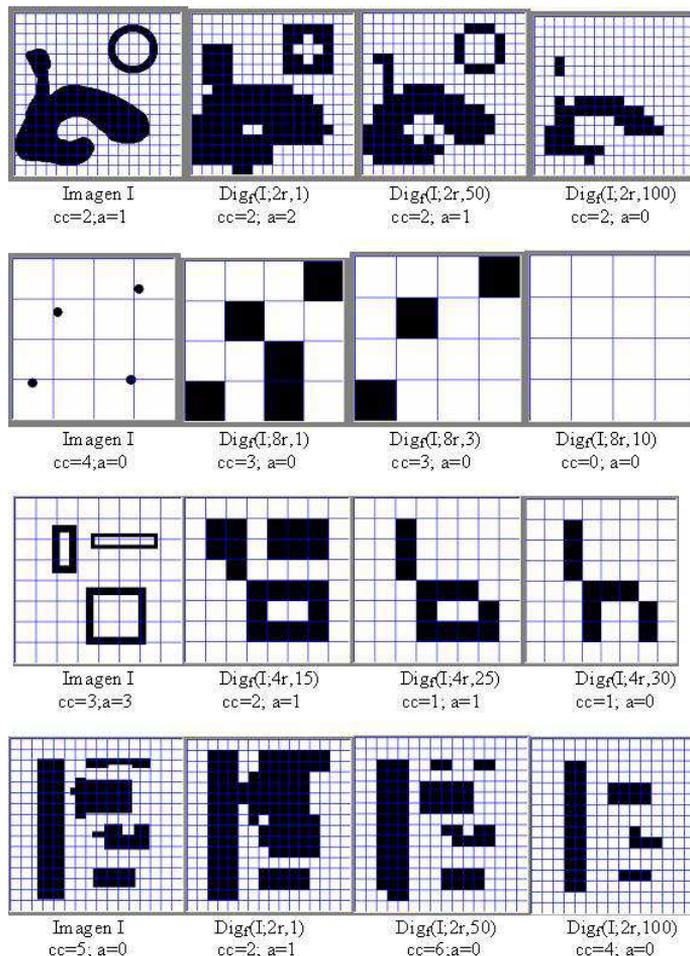


Figura 12: Distintas imágenes y distintas digitalizaciones físicas de las mismas, informando del número de componentes conexas negras y de agujeros de cada una de estas imágenes.

Reflexionemos sobre los ejemplos y focalicemos ahora nuestro interés en intentar comprender la siguiente condición suficiente de preservación topológica bajo digitalización física, que depende únicamente del valor de muestreo y de la imagen.

Un subconjunto A de \mathbb{R}^2 se dice que es r -regular si para cada punto (x, y) del borde de A se tiene que el círculo centrado en (x, y) y de radio $2\sqrt{2}r$ presenta exactamente dos componentes conexas, una negra y otra blanca. Un conjunto r -regular presenta formas suaves, sin golfos ni cabos estrechos.

Fijemos ahora el valor de muestreo r que será un número real mayor que cero. Sea cual sea el valor umbral de cuantización q , una condición suficiente para que la digitalización física $\text{Dig}_f(I; r, q)$ de una imagen I binaria 2D preserve la topología es que la imagen I sea un conjunto r -regular.

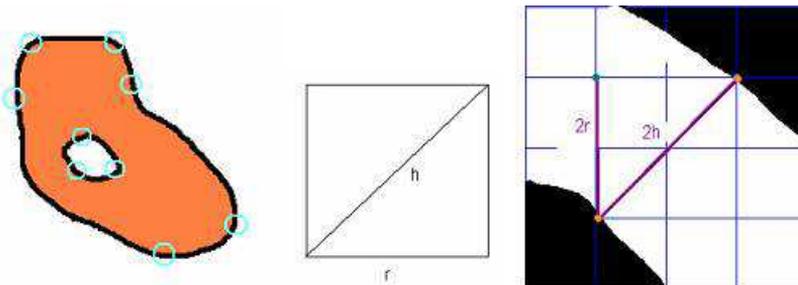


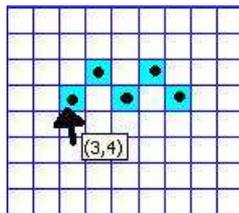
Figura 13: (Izquierda) Ejemplo de figura r -regular para un r pequeño. (Centro) Cuadrícula unidad de un muestreo de lado r . La hipotenusa del cuadrado vale obviamente $\sqrt{2}r$. (Derecha) Situación límite de digitalización en la que los puntos naranja en diagonal no van a conseguir cambiar la topología de la digitalización con respecto a la imagen original, independientemente del umbral de cuantización que utilicemos.

La definición de conjunto r -regular que damos aquí difiere de la proporcionada por los matemáticos Serra y Pavlidis que, en su día, resolvieron de forma independiente el problema de preservación topológica para distintos tipos de digitalización física.

4. Preservación topológica de la digitalización lógica

Nos centraremos en esta sección en la digitalización lógica. Este es un proceso aparentemente más difícil de describir topológicamente que el de la digitalización física ya que el traspaso de información va del plano continuo \mathbb{R}^2 al conjunto discreto \mathbb{Z}^2 . En este último conjunto es necesario introducir una topología que se

corresponda adecuadamente con la topología euclídea que posee la imagen original. Aquí, imagen digital significará de principio un subconjunto finito de puntos de \mathbb{Z}^2 . No obstante, fijado un tamaño de resolución, que en nuestro caso estará determinado por el valor del lado de la cuadrícula elemental del mallado cuadrado donde tengamos intención de plasmar dicha imagen, ésta podrá visualizarse sin problemas como un conjunto de píxeles cuadrados físicos en \mathbb{R}^2 . Si, por ejemplo, la imagen digital I está constituida por los puntos de coordenadas enteras $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$, $(7, 4)$ una “realización” de dicha imagen aparece en la figura siguiente



La labor de determinar una topología en \mathbb{Z}^2 se remite localmente a establecer los vecinos de un punto cualquiera en dicho espacio. En principio, existen dos soluciones muy intuitivas para este problema: la 4-adyacencia y la 8-adyacencia. Ambas aparecen gráficamente descritas en la figura de abajo

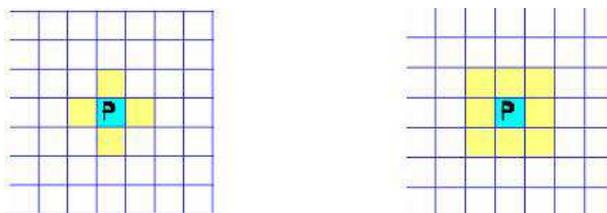


Figura 14: Visualizando subconjuntos de \mathbb{Z}^2 en un mallado cuadrado, establecemos los vecinos (en amarillo) de un píxel P (en celeste) con la 4-adyacencia (izquierda) y con la 8-adyacencia (derecha).

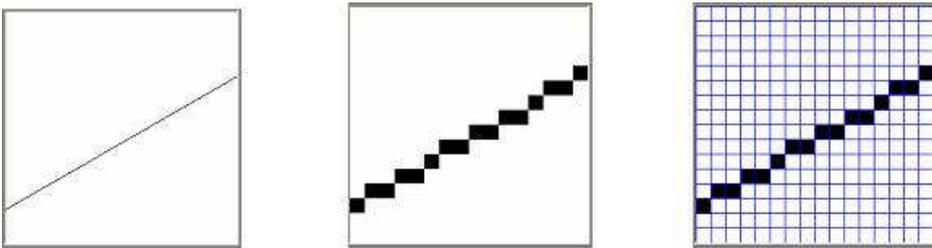
Diferentemente a como ocurre con \mathbb{R}^2 , nos encontramos aquí con un mundo mucho más amigable, donde cada píxel tiene un número finito de vecinos.



Figura 15: Vecindades de un punto en \mathbb{R}^2 , de un píxel en \mathbb{Z}^2 considerando 4-adyacencia y de un píxel en \mathbb{Z}^2 considerando 8-adyacencia. Los números indican la distancia al píxel azul.

Para definir el concepto de componente conexa en el marco de la 4-adyacencia o la 8-adyacencia, necesitamos determinar el concepto de camino entre dos puntos cualesquiera de \mathbb{Z}^2 . Un 4-camino (resp. un 8-camino) entre los puntos P y Q de \mathbb{Z}^2 , es una sucesión finita de puntos $P_0 = P, P_1, P_2, \dots, P_n = Q$, tales que P_i y P_{i+1} son puntos 4-adyacentes (resp. 8-adyacentes), para todo valor i desde 0 hasta $n - 1$. Una 4-componente conexa (resp. una 8-componente conexa) de una imagen digital binaria es el conjunto de puntos de \mathbb{Z}^2 del mismo color, tal que para dos puntos cualesquiera de dicha componente, exista siempre un camino constituido por puntos de la misma que una a ambos puntos

Ahora bien, enseguida nos encontramos con problemas a la hora de trasladar adecuadamente las propiedades topológicas del plano continuo al discreto (tanto con 4-adyacencia como con 8-adyacencia).



En la figura de arriba, tenemos a la izquierda la imagen continua de una recta que presenta una componente conexa negra y dos componentes blancas. En el centro, hay una digitalización física de la imagen anterior con las mismas propiedades topológicas que ésta. A la derecha, trabajando con 4-adyacencia tenemos que el número de componentes conexas negras de la digitalización lógica se dispara a 10 mientras el número de componentes blancas continua siendo 2. En el caso de 8-adyacencia, el número de componentes conexas negras es de uno pero el número de componentes conexas blancas es también de uno.

Una forma de resolver este problema y otros de índole similar fue dada ingeniosamente por el matemático Azriel Rosenfeld: el tipo de adyacencia que debían tener los píxeles negros de la imagen digital debía ser diferente al tipo de adyacencia de los píxeles blancos. Esta idea constituye la base y fundamento del área de la Topología Digital o Topología de Imágenes Digitales. Por ejemplo, si consideramos 8-adyacencia para los píxeles negros y 4-adyacencia para los píxeles blancos, la digitalización lógica anterior presenta una componente conexa negra y dos componentes conexas blancas al igual que la imagen original.

En resumen, si la digitalización física de una imagen preserva la topología de la misma, la digitalización lógica también, considerando en \mathbb{Z}^2 la 8-adyacencia para píxeles negros y la 4-adyacencia para píxeles blancos.

Bibliografía

- [1] L.J. Latecki, *Discrete Representation of Spatial Objects in Computer Vision*, Kluwer, 1998.
- [2] L.J. Latecki, C. Conrad, A. Gross, *Preserving Topology by a Digitization Process*, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 8, pp. 131-159, 1998.
- [3] T. Pavlidis, *Algorithms for Graphics and Image Processing*, Computer Science Press, 1982.
- [4] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, 1982.
- [5] PIXELIN, *Software didáctico sobre digitalización de imágenes*, <https://ieeesb.us.es/pid/Pixelin/RinconPalmi2.html>
- [6] Curso de formación on-line “*Procesamiento de Imágenes Digitales*”, impartido por Pedro Real Jurado y Rocío González Díaz, Secretariado de Recursos Audiovisuales y Nuevas Tecnologías, Universidad de Sevilla, <http://www.sav.us.es/formaciononline/asignaturas/asigpid/>
- [7] A. Rosenfeld, A.C. Kak, *Digital Picture Processing*, Academic Press, 1981.

Pedro Real Jurado

Universidad de Sevilla

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Departamento de Matemática Aplicada I

Avda. Reina Mercedes, s/n

41012 Sevilla

e-mail: real@us.es

<http://www.pdipas.us.es/r/real/>

