ESFERA, GUASA Y GEOMETRÍA

(Un poco de todo: Arte, papiroflexia, humor y geometría)

Por fin he dado cima a la ilusión de mi vida: fabricar una esfera de papel. No me gustaban esas hechas de cuñas esféricas como las que inspiran los meridianos de los globos terráqueos. Mi esfera tiene infinitos puntos, pero ese infinito es de orden inferior porque sus puntos resultan agrupados en conjuntos planarios (circunferencias). Es de cartulina reforzada, por exigencias del guión. En fin, dejemos aparte las cuestiones personales y vayamos al grano.

Como todo el mundo sabe, las cosas existen desde el Big Bang: las cosas y los animales; la esfera y el hombre, por poner un ejemplo. Naturalmente, ni la esfera ni el hombre estaban allí como se nos presentan hoy. De ello se dio cuenta enseguida Darwin que se apresuró a decir que tanto la esfera como el hombre habían llegado a su estado actual a fuerza de evolución.

Tomemos el caso del hombre. Nadie sabe cómo era éste en el instante primigenio, pero parece cierto, según los hallazgos paleontológicos, que su primitivo asentamiento estuvo en el centro de África y no en el Paraíso Terrenal de la Mesopotamia como se nos ha contado para nuestro entretenimiento, a niños y mayores que se hacen como niños.

La manzana, como recordamos todos los que estudiamos Historia Sagrada, es la protagonista del Paraíso Terrenal. He visto en Divulgamat una manzana preciosa, debidamente coloreada, que era mezcla de toro y esfera. Las manzanas han sido siempre muy dadas al protagonismo. No hay más que recordar la manzana de la discordia desencadenando la guerra de Troya (Paris y Helena), aquélla cuya caída inspiró a Newton la Ley de la Gravitación Universal o las famosas de *Annie Manzanas* (Bette Davis en *Un gánster para un milagro*) que sirvieron para que *Dandy*, el gánster neoyorquino (Glenn Ford), redimiera a la mendiga de su estado de ciudadana del hampa.

Redención y manzana, también en el Paraíso Terrenal. Luego llegó Milton que adornó el paraíso con luchas de ángeles y otros efectos especiales y así, evolucionando sin parar, la especie humana ha alcanzado ese grado de perfección que culmina en el recibo de la luz, difícilmente superable.

Con la esfera ha ocurrido algo parecido. No sé cómo Plutarco no incluyó en su colección de vidas paralelas la del hombre y la esfera. A lo mejor lo hizo, pero como los antiguos eran tan descuidados y lo perdían todo, quien sabe qué ha podido suceder. Sin entrar en muchos detalles, ya hemos dado un vistazo a la evolución del hombre, pero no se pierdan la de la esfera.

La esfera del Big Bang no era como la que conocemos: tenía forma de tetraedro. Pronto se dio cuenta de ello Platón que, con su concepto de la idea y un poco de *cut and try*, engendró otros cuatro poliedros regulares mediante evolución. Platón fue el pionero de la esfera a la que se aproximó tanto como permite un icosaedro. Sabía muy bien lo que había escrito Jorge Manrique:

> … que la esfera no es esfera
> si no rueda

Como todos los seres tienen nombre, la esfera y el hombre, también. Quiero decir nombre científico además de nombre vulgar. Los nombres son variados según las circunstancias y las épocas. Así, antes, había *homo erectus*, pero de esos ya no quedan porque los hombres se inclinaron a inclinarse tanto ante el poder que, como decía un hampón de la película de Frank Capra antes referida, se les había hecho callo en el ombligo; eso era de tantas reverencias como tenían que hacer en el entrenamiento a que *el Dandy* los sometía para ensayar que eran personas respetables.

Así pues, el hombre se ha quedado en *homo sapiens*, que no sé a quien se le ha ocurrido semejante nombre, vistas las cosas que hace. Y menos mal, porque antes el hombre era *poco inferior a los ángeles* (Salmo 8). El Padre Feijoo explicaba esto en una de sus *Paradojas Matemáticas* afirmando que el hombre y el ángel eran asintóticos.

Volviendo a la esfera, la cosa no queda en Platón, porque después vino Arquímedes que se dedicó a truncar todo lo que había hecho su antecesor y, truncando, truncando, consiguió el icosaedro truncado que es el antecedente directo del balón de fútbol (Fig. 1): de cada una de sus pirámides pentagonales cortó un pentágono y, de paso, cada triángulo equilátero quedó rebanado como exágono. Arquímedes murió sin saberlo, pero había descubierto la Liga de Campeones. Su esfera no tenía infinitos puntos, sino solamente los 60 de sus vértices, suficientes, sin embargo, incluso para meter goles de cabeza sin riesgo de herirse con las puntas del balón. Espero que dentro de nada en todos los estadios de fútbol se erija un monumento al del *¡Eureka!*

Fig. 1

Como muy bien matizan los ingleses, el fútbol es un deporte en que unos bestias juegan a lo señorito, mientras que el rugby es un juego de señoritos que juegan a lo bestia. Así pues, el balón de Arquímedes hubo de ser mejorado por el *homo sapiens* mediante el inflado que era desconocido en la Magna Grecia. (Ver http://www.caprichos-ingenieros.com/papirabstracta3.html).

El perspicaz lector ya se ha dado cuenta de que se me ha olvidado citar los nombres vulgares que se asignan a hombres y esferas; helos aquí en versión sumaria: menda, tío, para el *homo sapiens*; bola, pelota, para la esfera. Aunque sabido es que, algunos plumillas, tanto de la palabra escrita como de la que se lleva el viento, dicen *esférico*. Pero eso es sólo para darse importancia delante de sus colegas.

Se me olvidaba también lo del fullereno (Fig. 2). Como en Siracusa no existía ni Sociedad General de Autores ni Registro de la Propiedad, Arquímedes no pudo patentar su invento aunque, vaya usted a saber si Platón le hubiera dejado … El caso es que el *homo sapiens* que siempre se olvida de la antigüedad, patentó en 1985 el fullereno a nombre de Fuller, el arquitecto Buckminster Fuller que empleó la estructura del icosaedro truncado en la construcción de sus cúpulas geodésicas. El fullereno es una forma alotrópica estable del carbono, que se añade a las ya conocidas del diamante y el grafito (C_{60} -un átomo de C en cada vértice; recordar que hay en juego 60 vértices-). Podría afirmarse, en rigor, que el fullereno es también una forma alotrópica del balón de futbol porque está hecho de exágonos y pentágonos rellenando una superficie esférica.

Fig. 2

Hablemos ya de mis esferas, que tienen cosas muy particulares. En primer lugar debo aclarar que lo que a mí me interesaba era teselar una esfera con círculos y con sus consecuencias pero, infeliz de mí, la cosa no es tan fácil como pensaba. Pretendía que los círculos fueran todos idénticos al igual que sus interespacios, pero al avanzar el montaje ví que para estos se imponía una mezcla de triángulos, cuadriláteros y hasta pentágonos esféricos, y aún así quedaba algún que otro hueco anómalo. Lo que conseguí al final fue lo que llamo un teselado aleatorio (Fig. 3).

Fig. 3

Curiosamente, hacía poco que había necesitado hurgar en los teselados planos (para los teselados curvo-espaciales está Gaudí) y recordaba uno en que se combinaban arcos de círculo de radios en proporción áurea que ofrecía un vistoso resultado. Sin dudarlo, acudí a la ayuda de don Fibonacci y, milagrosamente, comprobé que los pequeños círculos áureos encajaban divinamente en los huecos raros, y aparecían bien acomodados entre sus hermanos mayores.

Vengo hablando de círculos sobre una esfera sin explicar la relación entre ambas cosas. La relación es, simplemente, un cono: la generatriz de éste es el radio de la esfera, su vértice, el centro, y la circunferencia de su base queda asentada en la superficie esférica a modo de tesela. Los numerosos conos tangentes entre sí confluyen en el centro de la esfera de forma muy natural y dándole una gran consistencia. Se trata, pues, de una esfera conoidea y, además, virtual. O sea, una gavilla de cuádricas degeneradas hermanadas para formar una cuádrica perfectamente virtuosa.

No hay que decir que la esfera rueda muy bien, y es notable apreciar cómo su centro se ve desplazándose a la altura constante de su radio, mientras la bola gira. Ésta es la primera vez que he visto el centro de una esfera. Para confirmar el fenómeno he consultado a todas las videntes que conozco, por si ellas, que ven más que nadie, habían visto alguna vez el centro de sus bolas de cristal. Ninguna tiene experiencia de haberlo visto jamás. Quién sabe si lo verán en el futuro, pues el futuro es su especialidad.

Fue esta construcción la que me condujo a esferificar los cinco sólidos platónicos. Yo los había visto antes inscritos o circunscritos a esferas y, excepcionalmente, he encontrado un pentagonododecaedro alámbrico (que sólo tiene aristas) envolviendo una esfera-globo, es decir con sus aristas tangentes a la esfera.

Yo he hecho algo parecido, pero distinto, con los cinco poliedros platónicos: he conseguido las circunferencias inscritas en sus caras para que de por sí constituyan la esfera virtual; y ello por medio de conos como expliqué más arriba. Mis esferas tienen un tamaño intermedio entre las inscritas y las circunscritas a los poliedros regulares (Fig. 4).

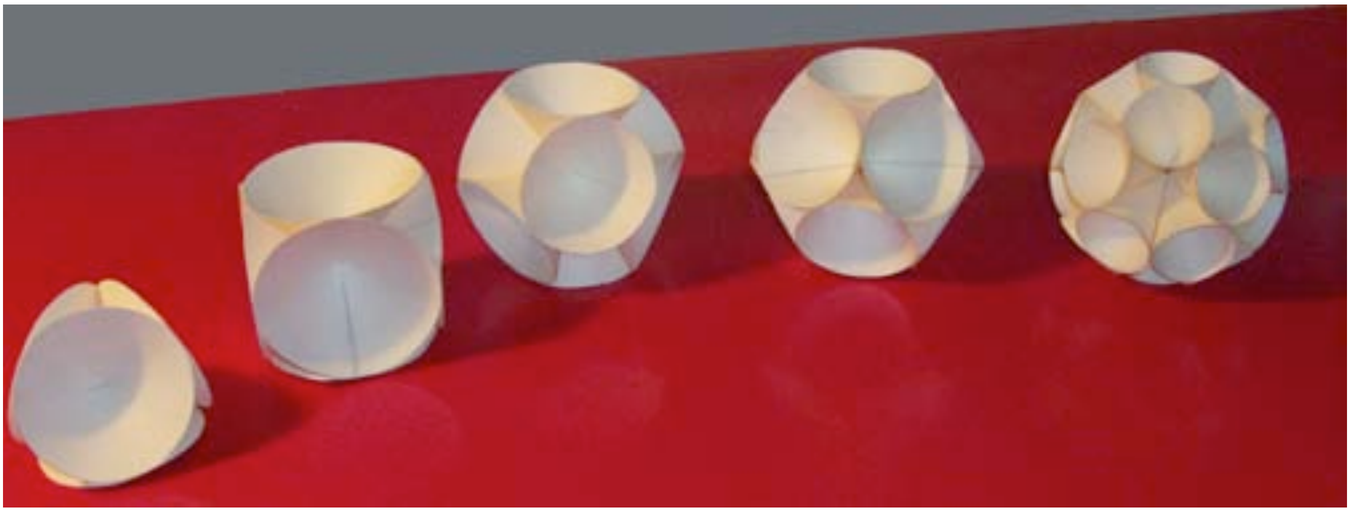

Fig. 4

Voy a mostrar ahora, brevemente y a título de ejemplo, el andamiaje que me ha permitido edificar la esfera icosaédrica.

Sea l el lado del triángulo de un icosaedro.

En las págs. 193 / 194 de mi libro *Matemáticas y Papiroflexia*

(Extraordinario 2000.pdf o http://www.caprichos-ingenieros.com/papiromat.html -ver enlace al final de la página-)

se ha calculado que el radio R del icosaedro es $R = 0{,}9510565 \times l$. R es algo mayor que la generatriz g del cono. Ya lo dije antes: g es el radio de mi esfera y R es el de la esfera circunscrita al poliedro.

En la pág. 193 se calcula el ángulo entre dos caras adyacentes del poliedro, que me permite dibujar en Autocad la fig. 3 de la pág. 193. Añadiendo a esa figura la posición del centro del poliedro ya determinada, puedo medir directamente la distancia del centro del poliedro al punto medio de un lado que resulta ser la generatriz del cono $g = 0{,}809017 \times l$.

Esto mismo se puede calcular siguiendo el texto y las figuras de las páginas referidas pero, al ser engorroso, yo he optado por la medida directa en Autocad que se obtiene con rapidez, precisión y seguridad.

El radio r del círculo base del cono es el de una circunferencia inscrita en un triángulo icosaédrico (Fig. 5). Que vale 1/3 de la altura de éste. Será:

$r = (1/3)\sqrt{(l^2 - (l^2/4))} = (\sqrt{3}/6) \times l$

El ángulo completo α del cono valdrá:

$\alpha = 2 \text{ arc sen } (\sqrt{3} / (6 \times 0{,}809017)) = 41{,}81^{\circ}$

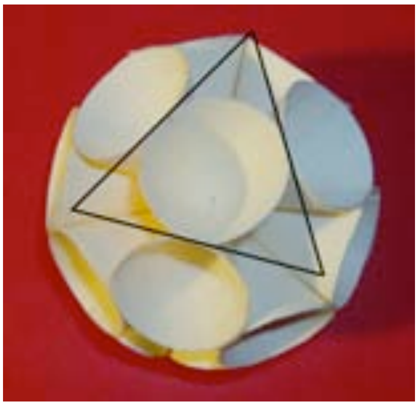

Fig. 5

En las páginas 234 / 235 del mismo libro se indica cómo construir un cono a partir de su desarrollo obtenido mediante el radio de su base y la generatriz.

Recordando lo de la evolución, ya se ve que las esferas basadas en el tetraedro y el hexaedro (Figs. 6 y 7) son de rodadura prácticamente imposible; la del octaedro empieza a resultar precaria (Fig. 8 destacando sólo una mitad); la del dodecaedro (Fig. 9 mostrando un solo pentágono), medianamente aceptable, y la del icosaedro (ver Fig. 5), buena. Las otras dos esferas que he construido (de teselado aleatorio y teselado fractálico) al estar hechas de muchos más conos, resultan de excelente rodadura.

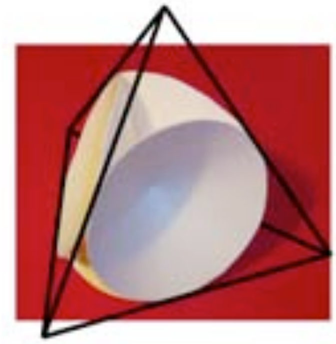

Fig. 6

Fig. 7

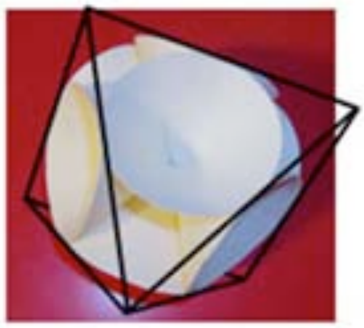

Fig. 8

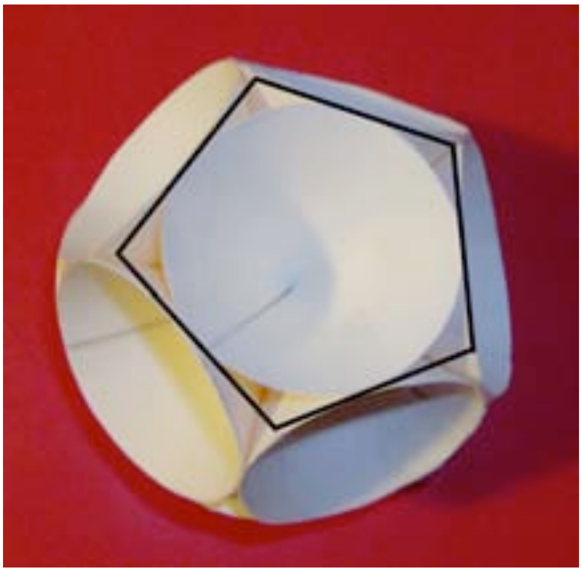

Fig. 9

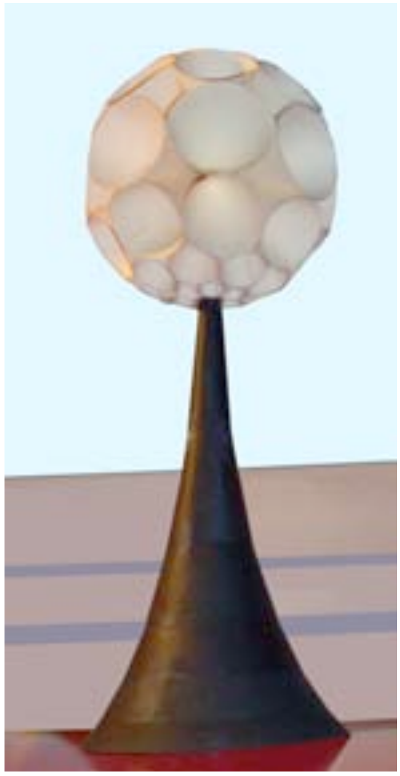

Fig. 10

Me faltaba reseñar otra particularidad platónica. Los interespacios entre circunferencias resultan de la siguiente manera en forma de polígonos regulares esféricos: triángulos en el caso del tetraedro, hexaedro y dodecaedro; cuadrados en el octaedro y pentágonos en el icosaedro.

Hasta aquí, lo platónico y el teselado aleatorio (Fig. 3). Pero yo no quería rendirme y seguí buscando otras formas de teselación. Así es como di con la que represento en la Fig. 10, que me recuerda la esfera de Riemann. En esa figura represento una esfera teselada con círculos que decrecen en diámetro a medida que se alejan del ecuador; naturalmente, en los polos se encuentran los más pequeños.

La esfera de Riemann es una trasposición del plano complejo, al del espacio. En el ecuador, y en cuadratura, aparecen las unidades positiva y negativa, tanto real como imaginaria. En el polo norte está el infinito, y en el sur el cero.

Lo que yo he pretendido en mi esfera es un teselado fractálico, de esos cuyas teselas tienden a cero cuando se acercan al infinito, el infinito horizonte al que nunca se llega. En mi caso el cero y el infinito son una misma cosa. Quiero decir que en mi construcción, en el límite, ambos polos estarían poblados de una cantidad infinita de círculos de radio cero. Claro que, para ello, los círculos del ecuador también se habrían hecho más pequeños, aunque siempre mayores que cero.

Cabría preguntar qué tienen que ver mis esferas conoideas con las del tipo fullereno. La Fig. 11 es un icosaedro en el que se muestran: un pentágono (rojo) rodeado de hexágonos (azules), como en el fullereno; una circunferencia (verde) inscrita en una de las caras triangulares del poliedro, y que son las bases de los conos de mi esfera; las circunferencias concéntricas con los pentágonos (amarillas), todas tangentes entre sí y que, cuando el balón se infle, quedarán asentadas en su superficie esférica.

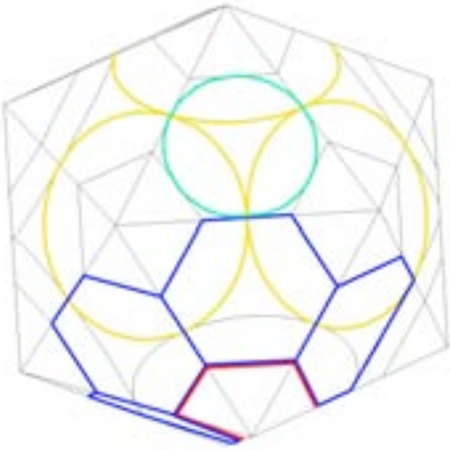

Fig. 11

EL SUBPRODUCTO

Lo que viene ahora no es en realidad un subproducto, sino todo lo contrario: es un preproducto. Lo que yo quería hacer desde el principio era un montaje de conos como el de la Fig. 12, pero mientras trabajaba en él se me apareció la relación intercónica que me arrastró a la esfera y, ya en ésta, a la posibilidad de esferificar los poliedros platónicos. Terminado todo ello ya me pude dedicar con tranquilidad a la construcción de lo que ahora llamo inmerecidamente el subproducto. Al construirlo me beneficié de la experiencia que acumulé fabricando conos y que me resultó de gran utilidad.

Fig. 12

Empecé por dibujar en Autocad la Fig. 13 en la que se exigían ciertas condiciones: el tamaño, proporciones y cantidad de conos, además de la condición fundamental de que cada vértice debía apoyarse en un punto de la generatriz del precedente de manera que el cono entrante quedara impedido de resbalar hacia fuera. Y, por supuesto, había que conseguir que el conjunto completo de los conos se cerrara en círculo, con precisión de simetría.

Fig. 13

Así conseguí la Fig. 12, pero luego no sabía qué hacer con ella por tratarse de un conjunto frágil. Lo primero que hice fue reforzar las uniones entreconos para diseñar a continuación un asentamiento adecuado. El de la Fig. 14, que me proporcionaba estas ventajas: era un conjunto sencillo y vistoso que se logra con relativa facilidad plegando sucesivamente en monte y valle curvados; entre las dos figuras del conjunto había el necesario contraste de color y, sobre todo, se daba la facilidad de producir el ajuste fino en el desarrollo del cono negro al girar éste el ángulo preciso que requiere el encunado de una figura en la otra.

Fig. 14

Fig. 15

El conjunto final resultó ser el de la Fig. 15 que, para esos que siempre preguntan, *¿y eso qué es?* hay varias respuestas: una tarta cónica, una noria, una turbina Pelton, o una anguila de mazapán de Toledo. Usted elija; que el cliente siempre tiene razón.

Pero mi amigo José Ignacio Royo Prieto, que es mucho más serio que yo, me dice que él está investigando en el Departamento de Matemática aplicada en la Universidad del País Vasco, sobre la **foliación de Reeb**, que es algo muy semejante a esta pintoresca cosa mía. Vean cómo la Fig. 16 le da la razón. Yo le deseo a José Ignacio todo el éxito que se merece: Los fabricantes de turbinas Pelton se lo agradecerán.

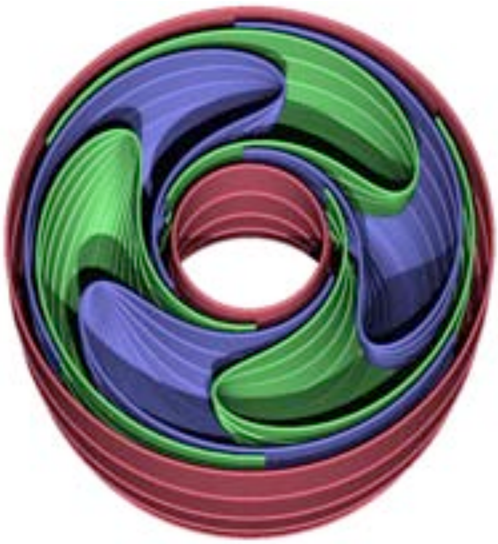

Fig. 16