¿Cómo resolver problemas de Geometría?

por

María Molero Aparicio, IES Juan de la Cierva de Madrid

Al principio, toda la Matemática se reducía a problemas de Geometría y Aritmética. Los avances de la Matemática en Egipto y Mesopotamia estaban asociados a problemas prácticos de la vida cotidiana y posteriormente en Grecia, asociados a la Filosofía, pasaron a ser problemas teóricos.

En la antigua Grecia el origen de las Matemáticas se puede situar en el siglo VI a. C. con Tales (escuela jónica) y Pitágoras (escuela pitagórica), aunque no tenemos documentos escritos anteriores a la época de Platón en el siglo IV a. C.

Para los pitagóricos la palabra número sólo designaba a los naturales, una fracción era sólo una relación o razón entre dos magnitudes del mismo tipo. Un grave problema en la escuela fue conocer la existencia de segmentos inconmensurables ya que contradecía su filosofía basada en que el número y sus relaciones eran la esencia del universo, pero esto más que un inconveniente fue el descubrimiento de los números irracionales.

Los tres problemas clásicos de la Matemática griega: *la cuadratura del círculo*, *la duplicación del cubo* y *la trisección de un ángulo* han persistido durante siglos hasta demostrar que no tienen solución.

El problema de *la cuadratura del círculo* consiste en construir con regla y compás un cuadrado de igual área que un círculo dado, propuesto por Anaxágoras (siglo V a.C.), cuando estaba en prisión, no fue resuelto hasta 1882 por Lindemann que demostró que el problema no tiene solución ya que π es trascendente.

El problema *la duplicación del cubo* está asociado a una leyenda. En el siglo V a. C. se hace una consulta al oráculo de Delfos para combatir una horrible peste en Atenas, la respuesta del oráculo fue que había que duplicar el altar cúbico de Apolo. Los atenienses duplicaron la arista del altar, pero la peste no cesó, lo cual se interpretó como que el volumen había aumentado ocho veces y no dos. Menecmo (siglo IV a. C.) observó que el problema consiste en encontrar el punto de corte de dos cónicas, pero no se puede resolver con regla y compás, esta demostración junto con la imposibilidad de dividir en tres partes un ángulo cualquiera, *la trisección de un ángulo*, se deben a Wantzel[1] (1837).

No resulta fácil fechar con precisión el nacimiento del razonamiento deductivo pero es evidente que surgió entre los siglos VI y IV a. C. y se consolidó en la gran obra de la Matemática griega, *Los Elementos*, escrita por Euclides (300 a. C.), que era una especie de libro de texto que contenía los fundamentos de lo que en la época se consideraba matemática elemental.

Esta obra, la más famosa de las matemáticas, escrita con mucho rigor y desarrollada en un perfecto orden lógico, no sólo ha sido el libro de texto para muchos estudiantes, sino que también ha sido el modelo para escribir y difundir una teoría matemática y para determinar el modo de comunicar y enseñar conocimientos del profesorado de matemáticas a lo largo de la historia.

En las clases de matemáticas, durante muchos siglos, nos hemos olvidado de los problemas, cuya solución fue un elemento clave para construir y desarrollar una teoría matemática, y hemos enseñado como habíamos aprendido, desarrollando conocimientos con mucho rigor y en un perfecto orden lógico, priorizando el razonamiento deductivo, es decir, con la metodología de Los elementos, relegando la resolución de problemas a una tarea personal en la que el estudiante bucea de forma intuitiva la mejor forma de resolver un problema.

1. ¿Qué es un problema?

Un *problema matemático* es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.

Un problema tiene distinta calificación en función de la persona que se lo plantee, y es evidente que lo que son problemas para unos no lo son para otros. Así cuando una persona sabe los rudimentos del lenguaje algebraico, un problema que pueda resolverse planteando una ecuación de primer o segundo grado o un sistema de ecuaciones no es un problema, sino un ejercicio al que se le aplica una regla fija que es la notación algebraica y los algoritmos para resolver las ecuaciones que resultan. También es distinto un problema de una investigación, que al ser un proceso más abierto, es la persona quien se plantea el objetivo que quiere conseguir. Así, cuando un estudiante al resolver un problema se hace preguntas, intentando generalizar el resultado o modificar las condiciones iniciales, está realizando una

[1] Artículo: *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*

investigación. Podemos pues distinguir entre ejercicio, problema, e investigación.

Las características de un buen problema, el que consigue involucrarnos en el proceso de su resolución, dependen de los conocimientos y las habilidades de la persona que se lo plantea, y desde esta perspectiva, existen rasgos que caracterizan los buenos problemas:

- Es una tarea abordable que creemos poder resolver.
- Parece un reto interesante, sin trampas.
- Supone un desafío a las capacidades matemáticas de un buen resolutor de problemas.
- Su resolución proporciona el tipo de placer asociado a un desafío intelectual.

2. La heurística

El término fue introducido por Polya (1945) en su primer libro sobre resolución de problemas *How to solve it* en el capítulo *Breve diccionario de heurística* en el que matiza el concepto, que hasta entonces tenía, *ars inveniendi*, como la rama del saber que estudia los métodos de la invención y del descubrimiento y con el nombre de "heurística moderna" le atribuye un contenido más preciso que consiste en descubrir el conjunto de procesos mentales que intervienen en la resolución de problemas y es éste el significado que ha prevalecido desde entonces.

La heurística como "arte de resolver problemas" trata de desvelar el conjunto de actitudes, procesos generales, estrategias y pautas que favorecen la resolución de problemas en general y en particular de los problemas matemáticos.

El método heurístico favorece la adquisición de conceptos, que se van formando paulatinamente mediante pruebas y refutaciones, frente al método deductivo en el que se pretende dotar de significado a una palabra mediante una definición formal.

En cierta forma la heurística, respecto a su método y no necesariamente a contenidos explícitos, asume la ley biogenética según la cual, la ontogénesis (desarrollo del ser) repite la filogénesis (desarrollo de la especie). Es decir, el proceso de desarrollo del pensamiento matemático en cada persona debe ser similar a su desarrollo histórico. Esto no implica que cada concepto matemático haya que introducirlo necesariamente mediante su génesis histórica (aunque muchas veces estas referencias pueden ser muy beneficiosas e instructivas para la formación y consolidación de conceptos), sino que se refiere esencialmente a repetir el método y los procesos generales de razonamiento que han hecho surgir históricamente el pensamiento matemático.

3. Historia de la resolución de problemas

En la historia de la resolución de problemas hay un antes y un después, determinados por los trabajos de G. Polya desde 1945 hasta los años sesenta[2].

Como antecedentes históricos podemos remontarnos al primer gran estudioso de heurística conocido Pappus de Alejandría (320. Libro VI) con reflexiones propias sobre procesos de razonamiento, utilizando un método de análisis-síntesis. Leibniz (1646-1716), en su publicación *Arte de la invención* de la que sólo se conservan anotaciones y B. Bolzano (1781-1848) que dedica especial atención a la heurística en sus trabajos de lógica.

Como precursor para establecer fases en el proceso de resolución de problemas se puede citar a Wallas que en *The Art of Thought* (1929) describe el proceso de invención dividido en cuatro fases:

1) Preparación: Recogida de información y primer intento de solución; 2) Incubación: Dejar el problema de lado; 3) Iluminación: Aparición de una idea clave; 4) Verificación: Se comprueba la solución.

El verdadero impulsor del proceso de resolución de problemas, como antes se ha comentado, fue G. Polya. El modelo teórico que desarrolla incluye un diccionario de heurística que agrupa las estrategias, las pautas, los procesos generales, los métodos de demostración, las emociones,... que intervienen en la resolución de problemas. Considera que el razonamiento heurístico, aunque poco riguroso, resulta un método muy plausible para resolver un problema y compara la intuición y la demostración formal con la percepción de un objeto por dos sentidos diferentes.

Considera la resolución de problemas como un proceso lineal en el que establece cuatro fases:

1) Comprender el problema; 2) Concebir un plan; 3) Ejecutar un plan; 4) Examinar la solución obtenida. En cada una de estas fases hay una serie de pautas o sugerencias heurísticas que pretenden fijar la atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan avanzar en su resolución.

A finales de los sesenta el trabajo de Kilpatrick introduce el concepto de protocolo que es el acta en que queda constancia de los fenómenos interesantes que han ocurrido a lo largo de nuestra ocupación en el problema y el trabajo de I. Lakatos[3] es una crítica al pensamiento formalista de la época.

Después de Polya, los trabajos más importantes son los de A. Schoenfeld, que en *Mathematical problem solving* (1985) introduce una nueva perspectiva en el proceso. Mientras Polya estudia y describe al resolutor ideal, Schoenfeld basa su estudio en resolutores reales e intenta categorizar sus conductas y describir el proceso como un conjunto de episodios.

---

[2] *Mathematics and Plausible Reasoning* (1954) y *Mathematical Discovery* (1962 -1965)

[3] *Proofs and Refutations. The Logics of Mathematical Discovery* (1976)

También en la década de los ochenta se desarrolla el trabajo de L. Burton que aparece en *Thinking Things Through* (1984) y *Thinking Matemathecally* (1882) de J. Mason, L. Burton y K. Stacey. Lo más relevante de este modelo es diferenciar el proceso de pensamiento de la propia conciencia del proceso, y la importancia que tienen las emociones del resolutor, que consideran elementos indispensables en el proceso de razonar matemáticamente. A pesar de que se considera que la resolución de problemas es una tarea compleja, que no se lleva a cabo de forma lineal, se presenta dividida en tres fases: Abordaje, Ataque y Revisión.

Entre los modelos de resolución de problemas de esta década está el que propone Goldin (1983), que no es un modelo de fases sino de los lenguajes implicados en el proceso, formulado como un modelo de competencia o el de J. D. Bransford y B. S. Stein *Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear* (1986), en el que los problemas matemáticos son un caso particular de los cotidianos, el proceso queda divido en 5 fases utilizando las letras de la palabra IDEAL: I = Identificación, D = Definición, E = Exploración, A = Actuación, L = Logros alcanzados.

En España en 1991 se publica *Para pensar mejor* de Miguel de Guzmán en el que se destaca la identificación de los distintos tipos de bloqueos, la importancia de la actividad subconsciente en el proceso de resolución de problemas, el desarrollo de la creatividad, y la importancia de realizar un protocolo en el proceso de resolución. En *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas* (2003) reflexiona sobre la organización de una clase de problemas y las técnicas que la facilitan como el torbellino de ideas o el trabajo en grupo.

4. Fases de los modelos de resolución de problemas

Algunos modelos de resolución de problemas consideran el proceso dividido en fases, que el resolutor recorre de forma más o menos lineal, ya que es conveniente concluir cada fase para pasar a la siguiente. Estas fases no siempre se presentan explícitamente, depende del tipo de problema y de su dificultad. Además tampoco se presentan aisladas, sino que cada fase interfiere con la anterior y con la siguiente.

4.1. Modelo de Polya

En el modelo de resolución de problemas que propone Polya se establecen cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución. En cada una de estas fases hay una serie de pautas o sugerencias heurísticas que pretenden fijar la atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan avanzar en su resolución. No todas las pautas sirven para todos los problemas, sino que forman un conjunto de posibilidades entre las que debemos elegir aquellas que se adaptan a cada problema determinado. No pretende enfrentarse a un problema con una lista de sugerencias heurísticas, sino interiorizarlas para que posteriormente surjan de forma espontánea.

Comprender el problema. Es una fase de preparación donde se examina la situación, se manipula para entenderla mejor y se relaciona con situaciones semejantes. En esta fase se pretende que después de leer el enunciado del problema y aceptar el reto de resolverlo seamos capaces de contestar las siguientes preguntas: *¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuál es la condición?*.

Concebir un plan. Consiste en determinar las estrategias que transforman el problema, facilitan la solución y averiguar las conexiones entre los datos y las incógnitas. Si nos encontramos atascados las preguntas que nos pueden ayudar a superar el bloqueo son las siguientes: *¿Qué relación tienen los datos entre sí? ¿Qué se puede deducir a partir de los datos? ¿Se puede dividir el problema en partes? ¿Se puede enunciar el problema de forma diferente? ¿Y si el problema no tiene solución? ¿Hay algún dato contradictorio en el problema? ¿Hay alguno redundante o irrelevante?* Al final de esta fase se debe tener un plan de resolución.

Ejecutar un plan. En esta fase se realizan los cálculos y operaciones necesarios para aplicar los procedimientos y estrategias elegidos en la fase anterior. Es importante tener en cuenta las siguientes sugerencias: *¿Se ha comprobado cada uno de los pasos? ¿Se puede justificar que cada paso es correcto?*.

Ante las dificultades no hay que desistir hasta ver claramente que el plan no es válido y en ese caso hay que ser flexible, abandonarlo y volver a la fase anterior de búsqueda.

Examinar la solución. Consiste en examinar a fondo el camino seguido, comprobar cálculos, razonamientos, que la solución corresponde al problema propuesto, localizar rutinas útiles, resolverlo de una forma más sencilla o más elegante, así como intentar generalizarlo a un contexto más amplio, buscar nuevos problemas relacionados y la posible transferencia de resultados, métodos y procesos.

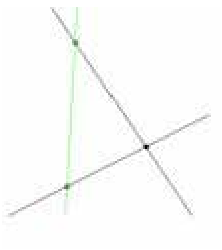
Las pautas heurísticas asociadas a esta fase son: *¿Se puede verificar el resultado y el razonamiento? ¿Puede haber otra solución? ¿Se puede resolver de otra forma? ¿Se puede generalizar el resultado? ¿Se puede plantear con datos más generales?*.

4.2. Problema Regiones, con el modelo de Polya

Como ejemplo, de este modelo, se analiza el siguiente problema, poniendo de manifiesto las fases de resolución.

Problema Regiones: *Si n rectas de un mismo plano se cortan dos a dos en puntos distintos, se parte así el plano en regiones distintas. ¿Cuál es el número de esas regiones?*

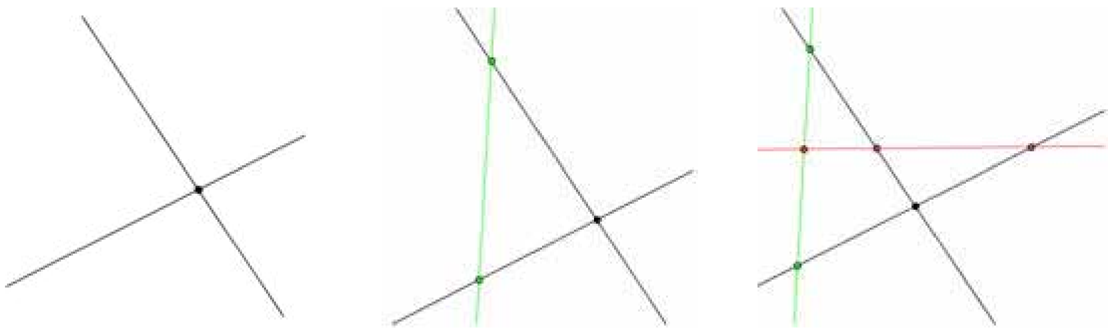
Comprender el problema.



El primer paso es comprender bien el enunciado. Lo normal cuando se plantea este problema en clase, es que comiencen a dibujar casos particulares.

Cuando se dibujan tres rectas se observan: tres puntos, tres segmentos finitos, seis semirrectas y siete regiones, una finita y 6 infinitas.

Concebir un plan. Lo primero que intenta el alumnado es relacionar los puntos, las semirrectas y los segmentos con las regiones para lo que tiene que analizar casos particulares de forma sistemática.



Suelen llegar a diferentes conclusiones como que el número de semirrectas es el doble que el número de rectas y que además este valor coincide con el número de regiones infinitas. A veces también observan que el número de segmentos finitos e infinitos que hay en cada recta coincide con el número de rectas, por lo que el número total de segmentos es el cuadrado del número de rectas.

Sin embargo no parece fácil relacionar el número de puntos y segmentos con el de regiones por lo que parece adecuado realizar una tabla para buscar regularidades en función de los resultados.

Rectas	Puntos	Regiones	Segmentos	Semirrectas
2	1	4	4	4
3	$1+2=3$	$4+3=7$	9	6
4	$3+3=6$	$7+4=11$	16	8
5	$6+4=10$	$11+5=16$	25	10
6	$10+5=15$	$16+6=22$	36	12

Ejecutar un plan. Dadas n rectas, sea P_n el número de puntos, R_n el número de regiones y S_n el número de segmentos (los finitos y las semirrectas), entonces:

- Número de puntos con n rectas, P_n:

Ley de recurrencia: $P_n = P_{n-1} + n - 1$, Hipótesis: $P_n = C_{n,2}$,

donde $C_{n,m}$ es el número combinatorio $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

- Número de regiones con n rectas, R_n:

  Ley de recurrencia: $R_n = R_{n-1} + n$, Hipótesis: $R_n = 1 + C_{n+1,2}$,

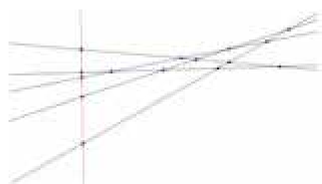
$$\begin{aligned}
R_n &= 4 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n \\
R_n &= 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\
R_n &= 1 + (n+1)\frac{n}{2} \\
R_n &= 1 + C_{n+1,2}.
\end{aligned}$$

- El número de segmentos (incluyendo las semirrectas) con n rectas es $S_n = n^2$.
- El número de semirrectas coincide con el número de regiones infinitas, y es $2n$.

Examinar la solución.

- Cada punto es la intersección de dos rectas, por lo tanto, $P_n = C_{n,2}$.
- El número de segmentos es el cuadrado del número de rectas: en cada una de las rectas hay $n - 1$ puntos y n segmentos (finitos y semirrectas) y como hay n rectas se tiene que $S_n = n^2$.
- El número de semirrectas es el doble que el número de rectas, $2n$, y, es evidente, que este valor coincide con el número de regiones infinitas.
- La hipótesis respecto al número de regiones es cierta demostrada por inducción.

  Para $n = 2$ el número de regiones es 4. Supuesta cierta para n rectas, añadimos una nueva recta. Se observa que con la nueva recta se añaden n nuevos puntos y $n + 1$ nuevos segmentos (2 son semirrectas) que dividen en dos $n+1$ regiones por lo tanto hay $n + 1$ regiones más y



$$\begin{aligned}
R_{n+1} &= R_n + n + 1 \\
R_{n+1} &= 1 + (n+1)\frac{n}{2} + n + 1 = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 1 + C_{n+2,2}.
\end{aligned}$$

  Y queda demostrada la hipótesis de inducción.

Generalización el resultado: ¿Qué ocurriría si p de las n rectas fueran paralelas? ¿Y si q rectas de las n convergen en un mismo punto?

4.3. Modelo de Mason-Burton-Stacey

Este modelo analiza el pensamiento y la experiencia matemática en general, que engloba como un caso particular la resolución de problemas. Además muestra la influencia que tiene el desarrollo del razonamiento matemático en el conocimiento de nosotros mismos y del mundo que nos rodea.

Las emociones de quien resuelve el problema, son elementos indispensables en el proceso de razonar matemáticamente, ya que surge una situación en la que se mezclan contradicción, tensión y sorpresa en una atmósfera de preguntas, retos y reflexiones.

Otra característica es el enfoque positivo que se concede al hecho de estar atascado o atascada, que se considera una situación muy digna y constituye una parte esencial del proceso de mejora del razonamiento, valorando más un intento de resolución fallido que una cuestión resuelta rápidamente y sin dificultades. Ya que lo que importa no son las respuestas sino los procesos.

Una sugerencia importante es dejar por escrito todo el proceso de resolución con objeto de poder recordar y reconstruir un momento determinado del problema y como un método para superar el bloqueo, cuando el resolutor/a se encuentra sin saber que hacer. También son importantes los rótulos que son símbolos que indican los estados de ánimo por los que se pasa, las ideas felices, los bloqueos y las situaciones delicadas en las que hay peligro de equivocarse.

La actividad de razonar se describe, como si hubiera un agente externo dentro de nosotros mismos, que nos aconseja lo que tenemos que hacer, lo denominan monitor interior y actúa como un tutor que vigila los cálculos y los planes a ejecutar, identifica los estados emocionales sugiriendo alternativas, examina críticamente los razonamientos y el proceso, y nos recuerda que hay que revisar y generalizar resultados, en definitiva controla el proceso de resolución desde fuera.

A pesar de que los autores reconocen que la resolución de problemas es una tarea compleja, que no se lleva a cabo de una forma lineal, consideran tres fases: Abordaje, Ataque y Revisión.

Abordaje. Esta fase está encaminada a comprender, interiorizar y familiarizarnos con el problema.

Después de leer cuidadosamente el problema es necesario contestar las siguientes preguntas: *¿Qué es lo que sé? ¿Qué es lo que quiero? ¿Qué es lo que puedo usar?*.

La fase puede darse por concluida cuando somos capaces de representar y organizar la información mediante símbolos, diagramas, tablas o gráficos.

Ataque. Es la fase más compleja ya que en ella se trata de asociar y combinar toda la información de la fase anterior. Es en esta fase donde intervienen las distintas estrategias heurísticas que nos permiten acercarnos a la solución del problema.

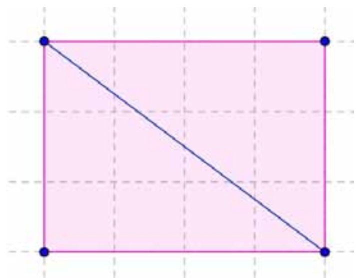
Los estados de ánimo más característicos son el de estar *¡Atascado!* y el de las ideas *¡Aja!* Los procesos matemáticos fundamentales, que aparecen en esta fase, son la inducción, que se materializa en el hecho de hacer conjeturas orientadas a conseguir la solución del problema, y la deducción que pretende justificar dichas conjeturas mediante las leyes lógicas a través de los teoremas matemáticos.

Revisión. Cuando se consigue una solución es conveniente revisarla e intentar generalizarla a un contexto más amplio, para esto es necesario:

- Comprobar la solución, los cálculos, el razonamiento y que la solución corresponde al problema.
- Reflexionar en las ideas, en los momentos clave, en las conjeturas y en la resolución.
- Generalizar a un contexto más amplio, buscar otra forma de resolverlo o modificar los datos iniciales.
- También es importante redactar la solución dejando claro qué es lo que se ha hecho y porqué.

4.4. Problema ¡Vaya corte!, con el modelo de Mason-Burton-Stacey

Como ejemplo de este modelo se considera el siguiente problema, intentando plasmar la situación que tiene lugar cuando se propone en una clase con estudiantes.



Problema ¡Vaya corte!: *En una cuadricula trazamos rectángulos que tengan un número entero de cuadraditos en cada lado.¿Cuál es el número de cuadrados a los que corta la diagonal de un rectángulo?*

Fase de Abordaje. El primer paso es comprender bien el enunciado. La diagonal del rectángulo puede cortar o no a los cuadrados que atraviesa, se considera que no corta si sólo contiene un vértice.

Lo normal, cuando se plantea este problema en clase, es que comiencen a dibujar casos particulares. Trazan distintos rectángulos y cuentan el número de cortes, a veces hay que aconsejarles que realicen una tabla con los datos obtenidos. También es importante que elijan una buena notación para los datos y la incógnita llamando, por ejemplo, a y b al número de cuadrados de los lados del rectángulo y c al número de cortes.

Otra forma de particularizar más sistemática, que aparece usualmente cuando se propone este problema, es confeccionar una tabla considerando el caso de un cuadrado y a continuación dejando un lado fijo ir variando el otro.

a	b	c
3	1	3
3	2	4
3	3	3
3	4	6
3	5	7

En esta tabla la primera regularidad que observan es que al aumentar una unidad uno de los lados, el corte va también aumentando en una unidad. Y después de esta observación lo normal es lanzarse a formular hipótesis.

Fase de Ataque. La primera conjetura que establecen es que el número de cortes c es igual a $a+b-1$ salvo en el caso específico de un cuadrado que entonces no se verifica.

Aunque parece correcta la solución encontrada, no resulta satisfactorio ya que no se verifique para un cuadrado, es decir, que no se cumpla para "un caso límite".

Una vez que han formulado esta conjetura se les aconseja volver a leer el enunciado y a particularizar más con otros datos por ejemplo cambiando $a = 3$ por $a = 4$. Después de considerar $a = 4$ con $b = 5$, $b = 6$, $b = 7$, $b = 8$, llegan a la conclusión de que si $a+b$ es impar c es igual a $a+b-1$, si es par c vale $a+b-2$ y si uno es múltiplo del otro c es igual al mayor. Cuando se pregunta ¿qué pasa cuando dos números verifican dos de las condiciones? o ¿cuál de ellas hay que aplicar primero?, se observa que el objetivo que tienen es encontrar rápidamente una fórmula general, sin la menor intención de justificarla, haciendo gala del principio de que si una fórmula se verifica para cinco casos se verifica para todos. Ante este bloqueo y con la suerte de tener quien les dirija, cosa que a todos nos gustaría tener cuando nos enfrentamos a un problema, se les propone considerar $a = 12$ y $b = 9$ y se obtiene $c = 18$. Aún así les cuesta mucho aceptar que cualquier hipótesis ha de estar justificada. En este caso lo importante es considerar los casos en los que la diagonal pasa por el punto vértice común de dos de los cuadraditos y esto ocurre precisamente cuando los números de cuadraditos de los lados tienen divisores comunes.

Por ejemplo en el caso $a = 4$ y $b = 8$ el número de cortes es 8, y cada dos cuadrados consecutivos, el corte es el mismo que en los dos cuadrados siguientes. Luego, la solución es cuatro veces lo que ocurre en el rectángulo $a = 1$ y $b = 2$, y $c = 4(1 + 2 - 1)$. Por tanto la hipótesis $c = a + b - 1$ es válida cuando a y b son primos entre sí. En caso contrario como $a/mcd(a, b)$ y $b/mcd(a, b)$ son primos entre sí, se tiene que el valor de c es igual a $(mcd(a, b))(a/mcd(a, b) + b/mcd(a, b) - 1)$, y el valor de c es $a+b-mcd(a, b)$. De esta manera, al intentar justificar la conjetura, se obtiene la solución.

Fase de Revisión. Es muy difícil conseguir que los alumnos y alumnas, una vez que han conseguido resolver el problema, comprueben cálculos, razonamientos, soluciones y revisen el proceso. Sin embargo, les gusta especialmente inventarse nuevos problemas que lo generalicen.

En este caso, un problema más general, en el que además podemos utilizar los logros conseguidos en éste, es considerar una cuadrícula formada por rectángulos.

5. Elementos del proceso de resolución de problemas

En el modelo de resolución de problemas que presentamos, consideramos en primer lugar los procesos generales del pensamiento matemático como son la generalización, la particularización, la inferencia, la deducción, la creatividad, el trabajo subconsciente y las técnicas de demostración matemática, que son los ejes que articulan la resolución de problemas; las estrategias heurísticas son herramientas que nos permiten transformar el problema en otra situación que nos acercan hacia la solución; las pautas heurísticas son sugerencias que nos prestan una gran ayuda en aspectos muy concretos del problema y en momentos de bloqueo.

Por último hay actitudes que facilitan positivamente el proceso como son la flexibilidad, la perseverancia, el gusto por el riesgo y por afrontar situaciones que supongan un reto, y la práctica de reflexionar sobre la experiencia acumulada.

Al investigar a los buenos resolutores de problemas se han obtenido dos conclusiones: la primera es que la capacidad para resolver problemas mejora con la práctica, la segunda es que el análisis de los métodos matemáticos, así como el de las distintas estrategias que intervienen en la resolución de problemas también mejora dicha capacidad.

5.1. Procesos generales del pensamiento matemático

Particularizar. Particularizar consiste en concentrar la atención en ejemplos concretos, para entender mejor el significado del problema. Es, además, una sugerencia muy útil para salir de una situación en la que nos encontramos atascados, porque proporciona seguridad en momentos clave en los que hay peligro de abandonar la tarea, también se utiliza para verificar una solución. En este caso es conveniente, que aunque pensemos que una hipótesis es cierta, tengamos la habilidad suficiente de encontrar, si existen, las excepciones para refutar la regla.

Cuando elegimos ejemplos, podemos hacerlo de forma aleatoria, para hacernos una idea del significado del problema. Si lo hacemos de forma sistemática, con la vista puesta más en el porqué que en el qué, preparamos el camino a la generalización y cuando los elegimos hábilmente estamos comprobando si el esquema descubierto es o no el correcto.

Generalizar. Generalizar significa pasar de un conjunto de objetos a otro conjunto más amplio que contenga al primero. Es también descubrir una ley general que permita justificar una conjetura, así como buscar un planteamiento más amplio del problema, cambiando el contexto, los datos o la solución.

La generalización permite hacer conjeturas a partir de unos pocos ejemplos. Ser sistemático y ordenado a la hora de particularizar ayuda mucho para generalizar, aunque es fácil engañarse y es preciso conseguir el equilibrio entre el crédulo que acepta toda generalización y el demasiado escéptico que no es capaz de dar un salto en el vacío.

A veces generalizar un problema puede ser útil para resolverlo si éste es un caso particular de uno más general que conocemos, como ocurre en el siguiente problema de geometría del espacio que propone G. Polya: *Dada una recta y un octaedro regular en el espacio, determina un plano que contenga a la recta y divida al octaedro en dos partes de igual volumen.*

Este problema puede sugerirnos otro más general: *Dada una recta y un sólido en el espacio con centro de simetría, determinar el plano que contiene a la recta y divide al sólido en dos partes iguales.*

El plano que tenemos que hallar pasa por el centro de simetría del sólido. Luego el problema inicial se reduce a calcular un plano que contiene a la recta y al centro de simetría del octaedro.

Esto sugiere lo que llama G. Polya "*La paradoja del inventor: El plan más ambicioso puede ser también el mejor*". Y aunque resulte paradójico ocurre a veces que un problema más general se resuelve más fácilmente que uno particular.

Otra idea importante sobre el proceso de generalización, es que muchas veces es conveniente transformar un problema numérico en uno literal, ya que con una dificultad similar, tener una solución general en función de unos parámetros, permite variar los datos para verificar los resultados.

Inferencia. La inferencia es una forma de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares. Lo hemos llamado inferencia, aunque podríamos llamarlo inducción o acción de conjeturar.

La inferencia trata de descubrir, a partir de la observación, la regularidad y la coherencia, basándose en la particularización, la generalización y la analogía.

Para que surja una conjetura ante un problema se necesita confianza en sí mismo y valentía, que se consigue con el poso que dejan los éxitos anteriores al resolver otros problemas, y relajando las tensiones que produce el hecho de querer encontrar una solución y haber agotado las posibles sugerencias.

Deducción. Justificar una conjetura es descubrir una estructura subyacente o una relación que une los datos con la solución mediante una serie de razonamientos. Es responder *¿por qué?* mediante una serie de razonamientos lógicos o teoremas matemáticos.

Si recordamos el problema **¡Vaya corte!**, las conjeturas que proponían los alumnos y alumnas no eran definitivas, porque surgían del resultado de considerar una serie de particularizaciones, y en ningún momento se preguntaban el por qué de esa conjetura.

Conseguir que alumnos y alumnas de Secundaria justifiquen las hipótesis que realizan es bastante difícil. Una vez que han hecho una conjetura y la han comprobado para varios casos, ya es cierta para ellos. Por lo que, si no conseguimos que la justifiquen, si podemos enseñarles a ser críticos en la comprobación, intentando refutarlas, eligiendo hábilmente casos particulares para adquirir cierto grado de escepticismo con respecto a nuestros razonamientos y los de los demás.

Creatividad. La creatividad es un fenómeno raro y muy escaso. Cuando se presenta se encuentra tan impregnado de azar, casualidad y trabajo que nos resulta muy difícil determinar las conductas y procedimientos que la facilitan. Lo que sí podemos asegurar es que cuando se produce un descubrimiento el inventor o la inventora posee las habilidades necesarias para lograr dar el salto en el vacío que separan un conjunto de conocimientos conocidos de uno nuevo y desconocido.

Probablemente valoramos tanto la creatividad por las ventajas que todo descubrimiento tiene para la sociedad, y porque conocemos poco los mecanismos que hacen surgir el pensamiento creativo. Sin embargo, lo que sí parece posible es aprender a desarrollar nuestra creatividad de forma parecida a como aprendemos a leer o hablar.

También hay rasgos característicos de la personalidad creativa como son la originalidad, la flexibilidad, la autoconfianza, la curiosidad intelectual y la capacidad de analizar, sintetizar e imaginar. Muchas veces cuando se establecen relaciones a partir de distintas ideas tenemos la sensación de estar construyendo algo nuevo. La pregunta es ¿es esto pensamiento creativo o son simplemente modificaciones de razonamientos o pensamientos preexistentes?. Sin embargo, al formular hipótesis, o visualizar ideas que nos conducen hacia la solución de un problema, y cuando generalizamos el resultado, o modificamos los datos para obtener un nuevo problema, tenemos la sensación de haber realizado un descubrimiento.

Trabajo subconsciente. ¿Quién no ha tenido alguna experiencia en la que, después de una noche de descanso o de varios días sin pensar conscientemente en un problema, como por arte de prestidigitación se nos ocurre la solución? La sensación que tenemos está muy cerca del mundo mágico y sorprendente de la mente, del que sólo conocemos una mínima parte de su capacidad y posibilidades, aunque normalmente lo explicamos racionalmente con argumentos relacionados con el hecho de seguir trabajando en el problema de forma inconsciente. Pero para que surja una idea durante el sueño, es necesario que previamente hayamos realizado un trabajo consciente, y que éste nos haya provocado una tensión mental producida por el ardiente deseo de resolverlo.

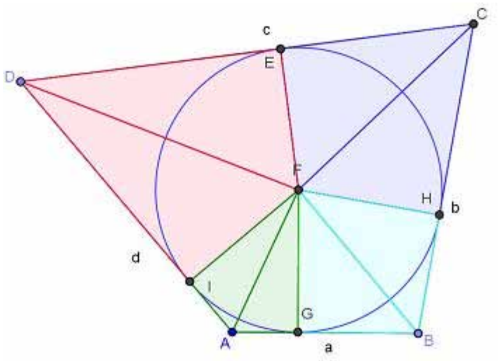
Técnicas de demostraciones matemáticas. El método matemático de **reducción al absurdo** consiste en partir de una hipótesis falsa, deducir consecuencias correctamente derivadas pero igualmente falsas, hasta llegar a una consecuencia evidentemente falsa. Para G. Polya "*La demostración indirecta establece la verdad de una afirmación demostrando la falsedad de la contraria*".

Una demostración indirecta es más fácil de realizar y, en muchas ocasiones, no es difícil convertir una demostración indirecta en una demostración directa.

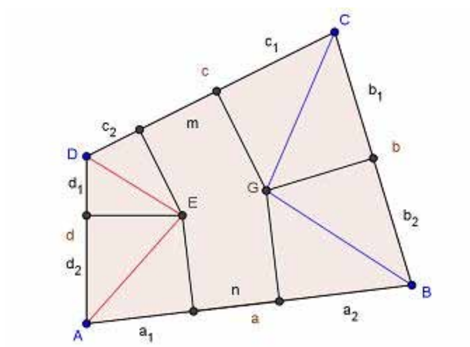
Existen ejemplos clásicos de demostraciones indirectas en la historia de las Matemáticas, que ya fue utilizada por Euclides en *Los Elementos*. Un ejemplo que utiliza este método es el siguiente.

Problema Los lados de un cuadrilátero: *En un cuadrilátero convexo se puede inscribir una circunferencia si y sólo sí la suma de las longitudes de los lados opuestos coincide.*

Si en un cuadrilátero se puede inscribir una circunferencia a partir de la figura adjunta es evidente que la suma de las longitudes de los lados opuestos coincide, es decir, $a + c = b + d$.



Además el centro de la circunferencia inscrita es el punto en el que se cortan las cuatro bisectrices por lo tanto podemos inscribir una circunferencia si y sólo sí las bisectrices concurren en un punto.



Para demostrar que si la suma de las longitudes de los lados opuestos coincide entonces se puede inscribir una circunferencia utilizamos el método de reducción al absurdo.

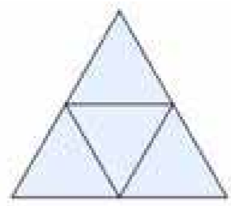
Suponemos que no se puede inscribir, entonces las bisectrices no concurren en un mismo punto y a partir de la figura adjunta es evidente que la suma de las longitudes de los lados opuestos no coincide.

La **inducción matemática** es el método que se utiliza para demostrar conjeturas sobre números naturales. Como ejemplo de este método es el que se ha utilizado en el problema llamado **Regiones**, otro problema que se resuelve fácilmente con este método es el siguiente.

Problema Los dos colores: *Una partición del plano con n rectas puede ser coloreada con dos colores distintos de modo que dos regiones que tienen una frontera común tengan colores diferentes.*

Un método de demostración matemática que Dirichlet utilizó en teoría de números y con el que logró resultados asombrosos es el **principio del palomar** o principio de Dirichlet que podemos formular del siguiente modo: *Si m palomas ocupan n nidos y $m > n$, entonces hay al menos un nido con más de una paloma.* Un ejemplo concreto en el que podemos aplicar esta técnica es el siguiente.

Problema: *En un triángulo equilátero de lado* 1*, se eligen cinco puntos en su interior, prueba que hay como mínimo dos cuya distancia es menor que* 1/2.



La solución es evidente al dividir el triángulo en cuatro triángulos equiláteros de lado 1/2 y aplicar el principio del palomar.

5.2. Estrategias heurísticas de la resolución de problemas geométricos

Las estrategias de resolución de problemas son, más que reglas, técnicas generales que nos ayudan a comprender el problema y favorecen el éxito en encontrar la solución.

Vamos a examinar algunas de las estrategias de resolución de problemas geométricos: codificar, organizar, experimentar, explorar, buscar problemas análogos, introducir elementos auxiliares, dividir el problema en partes y suponer el problema resuelto.

Para cada una, elegimos un problema que se resuelva, casi exclusivamente, mediante esa estrategia. Aunque es evidente que la relación entre un problema y la estrategia utilizada para resolverlo no es unívoca, lo normal es que distintas estrategias resuelvan un mismo problema y que en la resolución de un problema intervengan distintas estrategias.

Codificar. Usar una buena notación. Muy a menudo la resolución de un problema depende de la utilización de un lenguaje o una notación adecuados. La importancia de una buena de notación en un problema de geometría se pone de manifiesto si tratamos de resolverlo sin nombrar los datos o los elementos que construimos de un modo adecuado.

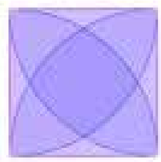
Hay reglas implícitas, que todos tenemos asumidas, y que nos ayudan a entender y a resolver un problema geométrico como que los puntos se nombran con letras mayúsculas y las rectas con minúsculas, los segmentos mediante sus extremos, los ángulos y los planos con letras griegas, los lados de un triángulo con la misma letra en minúscula que el vértice opuesto. Una buena notación debe ser clara, concisa y que no plantee ambigüedades. Los símbolos que utilizamos deben recordarnos el objeto que representan. Elegir una buena notación es un paso decisivo en el camino hacia la solución de un problema.

Organizar: hacer una figura, un esquema o una tabla.

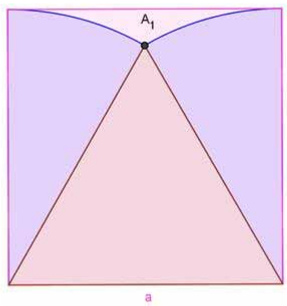
Hacer una figura. Una figura nos presta una gran ayuda para resolver un problema, ya que facilita la comprensión del mismo y hace surgir ideas que nos acercan a la solución.

La importancia que tiene una figura en los problemas geométricos es evidente, sin embargo también hay muchos problemas algebraicos, en los que una figura nos permite llegar a la solución de forma más rápida y elegante.

El siguiente problema es un ejemplo de la importancia de una figura en la resolución de un problema.



Problema La flor: *Calcula el área de la flor de cuatro pétalos de la figura inscrita en un cuadrado de lado a.*



La figura adjunta resuelve el problema. Se trata de calcular el área A_1 restando al área del cuadrado, la del triángulo y la de los dos sectores.

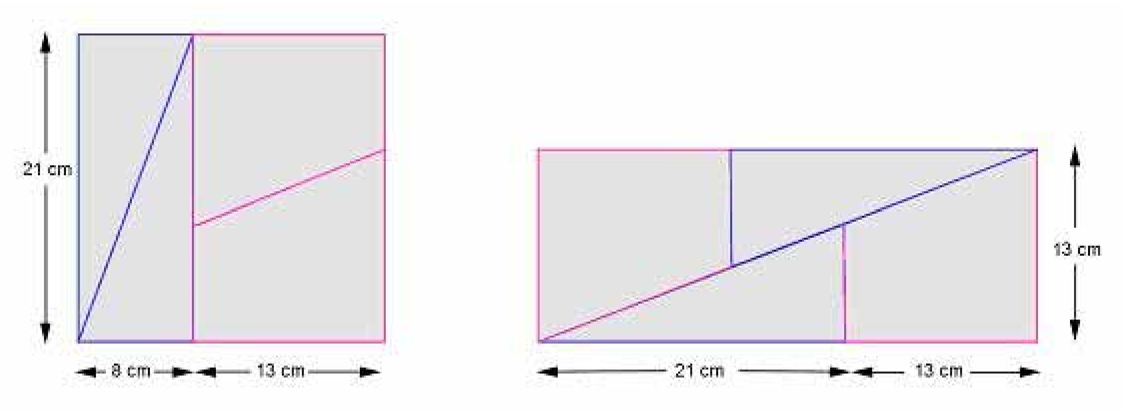
Área del cuadrado $= a^2$; Área del triángulo $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$; Área de un sector $= \dfrac{\pi a^2}{12}$; Área de la flor $= a^2\left(\sqrt{3}+\dfrac{2\pi}{3}-3\right)$.

Al utilizar figuras para resolver problemas tenemos el peligro de llegar a una solución falsa al razonar sobre ellas, por lo que es conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Una figura inexacta puede sugerir una solución errónea.
- Una figura debe actuar como una representación de relaciones lógicas.
- Las figuras no deben incluir ninguna relación que no esté indicada en el enunciado del problema.

En el libro *Errores en las demostraciones geométricas*, citado en la bibliografía, se encuentran muchos ejemplos. Este es el primero.

Problema: *Un cuadrado de lado 21 cm tiene la misma área que un rectángulo de lados 34 cm y 13 cm.*



El cuadrado se descompone en dos trapecios y en dos triángulos de las dimensiones indicadas. Con los cuatro trozos componemos el rectángulo. Y sin embargo $21^2 = 441\,cm^2$ y $34 \times 13 = 442\,cm^2$. ¿Cómo es que el área del rectángulo tiene un centímetro más?

Un método para asegurarnos de no cometer errores al realizar una figura es utilizar un programa informático de geometría dinámica. Estos programas nos permiten construir todas las figuras que realizamos con regla y compás de una forma rápida y precisa. La construcción se lleva a cabo a partir de objetos iniciales entre los que se establecen relaciones de dependencia de tipo geométrico de manera que al mover los objetos iniciales se desplazan también los que dependen de estos pero permanece la construcción realizada, esta propiedad lo diferencia esencialmente de los clásicos programas de dibujo. Pero quizás lo más importante es que acercan la Geometría a la realidad, transformando un teorema matemático en una realidad observable.

Hacer un esquema o una tabla. En los problemas en los que es necesario contar, es preciso disponer de métodos que nos aseguren que hemos considerado todas las posibilidades y que no hemos repetido ninguna. Un esquema permite sintetizar la información, que en muchos casos no sería posible realizar sin su ayuda.

Una tabla esquematiza los datos del problema además de los resultados que obtenemos al considerar casos particulares. En el problema que hemos llamado Regiones la solución se obtenía a partir de las regularidades que observábamos al analizar casos particulares que se resumían de forma sistemática en una tabla. También en el problema **¡Vaya corte!** el análisis exhaustivo de los casos particulares resumidos en una tabla era un paso decisivo para obtener la solución.

Es más seguro tener éxito al resolver un problema si adoptamos un método sistemático que analice toda la información del enunciado del problema de forma esquemática así como aquella que generamos a partir de los datos.

Experimentar. Ensayo y error. Consiste en llevar a cabo una operación sobre los datos, y probar si se ha conseguido el objetivo. Si no, repetir hasta conseguirlo o probar que es imposible. Hay varios tipos de ensayo y error.

- **Fortuito**. Es muy fácil de utilizar pero no siempre resulta eficaz porque se van eligiendo casos de forma aleatoria.
- **Sistemático**. Es más eficiente que el anterior porque se va realizando la operación de forma ordenada.
- **Dirigido**. Consiste en elegir casos que estén cada vez más cerca del objetivo. Sin embargo, aunque éste es el mejor método, hay que tener en cuenta casos particulares en los que para llegar a la solución hay que dar un pequeño rodeo.

Como ejemplo de problema en el que se puede utilizar el método de ensayo y error para obtener la solución se ha elegido el siguiente.

Problema Cien cuadrados: *¿Cuál es el menor número de líneas rectas que tenemos que dibujar para tener exactamente* 100 *cuadrados?*

Si se empieza de forma sistemática a contar los cuadrados que hay en una malla cuadrada $n \times n$, o por ejemplo recuerdas que en un tablero de ajedrez hay 204 cuadrados puedes adoptar el mismo método sistemático de contar cuadrados. La solución se obtiene por ensayo y error ya que está entre un cuadrado 6×6 en el que hay 91 cuadrados y uno 7×7 en el que hay 140.

La estrategia de ensayo y error se considera a veces ineficaz para la resolución de problemas, sin embargo existen casos en los que el ensayo y error dirigido es especialmente útil al limitar los elementos entre los que está la solución. Por otra parte cuando el número de casos es finito, si analizamos sistemáticamente todos los casos, podemos estar seguros de conseguir la solución.

Explorar: Buscar simetrías. Son muchos los problemas geométricos que se resuelven mediante la simetría expresada explícita o implícitamente.

La simetría puede entenderse en su sentido geométrico, que es el más usual, y en su sentido lógico más amplio, así la expresión $xy+xz+yz$ es simétrica respecto a las letras x, y, z.

Como ejemplo de problema que se resuelve utilizando la simetría se ha elegido el siguiente.

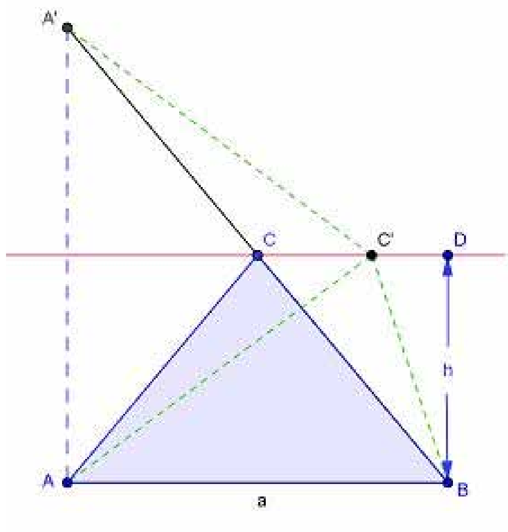
Problema Perímetro mínimo: *De todos los triángulos que tienen la misma base y la misma área, determina el que tiene perímetro mínimo.*

Este problema, que se puede resolver utilizando el cálculo diferencial, es sorprendente lo elegante y sencilla que resulta la demostración utilizando la simetría.

Si los triángulos tienen la misma base, AB, y la misma área, también tienen la misma altura, h.

La solución resulta al calcular el simétrico de uno de los extremos de la base, por ejemplo, A respecto a la recta d, paralela a la base, a una distancia h, el tercer vértice del triángulo C es la intersección de la recta d con el segmento que une el simétrico del punto A y el otro extremo de la base, el punto B.

La simetría en el más amplio sentido de la palabra nos permite simplificar problemas y casi siempre está asociada con la búsqueda de la solución óptima.



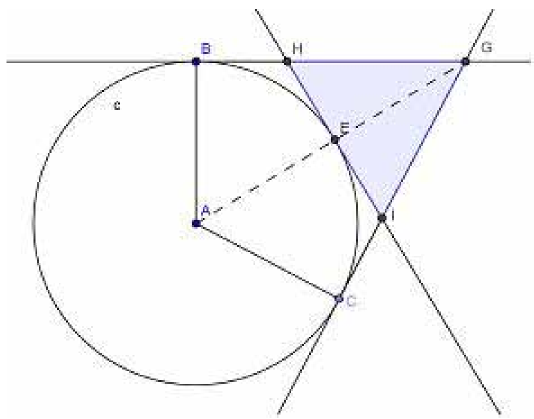
Explorar: Analizar casos límite. El análisis de los casos límite es muy efectivo cuando intentamos refutar una conjetura y antes de intentar justificarla. Si recordamos el problema **Vaya corte** la razón por la que desechamos la primera hipótesis que planteamos era que no se verificaba para un caso límite, el cuadrado.

Cuando tenemos que demostrar una hipótesis y dudamos de su certeza, antes de embarcarnos en intentar demostrar una falsedad, resulta muy útil refutarla analizando los casos límite. Como ejemplo se propone el siguiente problema.

Problema: *Calcula el perímetro del triángulo determinado por dos tangentes a una circunferencia en dos puntos B y C que se cortan en un punto G y una tercera tangente en un punto del arco CB, tal como muestra la figura, conociendo la longitud del segmento BG.*

A partir del dibujo y trazando la tercera tangente en el punto medio del arco CB la solución es evidente, el perímetro del triángulo IGH es el doble de la longitud del segmento BG.

Este resultado sigue siendo válido para cualquier punto del arco CB por un razonamiento similar al que hemos utilizado en el caso límite. Ahora nos podemos plantear que ocurre cuando elegimos un punto del arco BC.



Explorar: Buscar regularidades. Formular hipótesis es el resultado de observar regularidades en una serie de casos particulares. Buscar regularidades es encontrar leyes generales que constituyen la organización y estructura profunda de un problema.

Cuando formulamos hipótesis, debemos tener cuidado con el sentimiento de certidumbre que tenemos habitualmente ante una hipótesis que surge como generalización de una serie de casos particulares, ya que la belleza de una conclusión general siempre nos parece verdadera, y hay que tener en cuenta que estas hipótesis son simples conjeturas, que tendremos que refutarlas o confirmarlas mediante el razonamiento. En el problema **¡Vaya corte!** era difícil convencer al alumnado de que la hipótesis $a+b-1$ si a o b son impares y $a+b-2$ si a y b son pares no era correcta y era necesario buscar un ejemplo especialmente elegido que refutara su conjetura.

Después de formular una hipótesis, debemos intentar refutarla considerando casos límites, o casos estratégicamente buscados para que no se verifique. Sin embargo, si nuestra conjetura supera todas estas pruebas, para tener la certeza de que es verdadera tenemos que encontrar una razón por la que es así y no de otra manera. En definitiva, hay que encontrar la relación lógica entre el enunciado del problema y la conjetura formulada.

En el problema **Regiones** las regularidades observadas en el estudio sistemático de una serie de casos particulares sugería la hipótesis que permitía encontrar la solución.

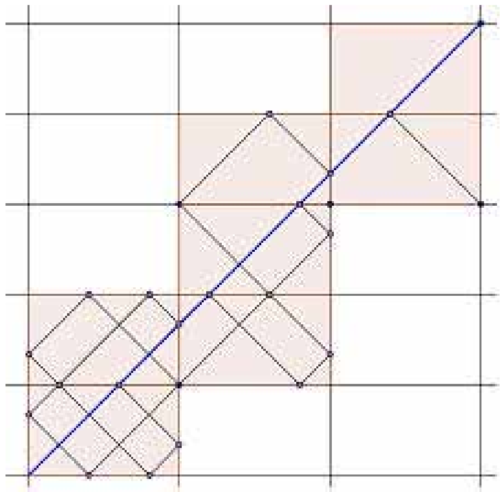
De una serie de casos concretos se puede conjeturar una hipótesis a partir de las regularidades de las observaciones realizadas, y aunque al aumentar el número de casos analizados aumenta nuestra confianza en ella, sólo la demostración garantiza su certeza.

Buscar problemas análogos. La analogía ocupa todo nuestro pensamiento, desde los diálogos de la vida cotidiana, hasta las actividades artísticas y científicas. Consiste en una concordancia de relaciones entre los elementos de objetos semejantes. La analogía entra en juego cuando te ves sorprendido por un parecido con algún problema estudiado anteriormente, por lo que es plausible sugerir conjeturas parecidas.

Aunque a veces no nos damos cuenta, en la mayoría de los problemas que resolvemos, utilizamos la analogía. Así, cuando nos encontramos con un problema de Álgebra lo primero que consideramos es plantear una ecuación, en un problema de Probabilidad o de Combinatoria realizar un diagrama en árbol o una tabla de contingencia, y ante un problema de Geometría dibujamos la figura intentando encontrar las relaciones lógicas que se establecen entre sus elementos.

Un problema con una estrategia similar al que hemos llamado **Vaya corte**, es el siguiente.

Problema Una mesa de billar: *Se tiene una mesa rectangular en la que las dimensiones son números enteros a y b, por lo que se puede suponer dividida en cuadrados. Se lanza una bola desde uno de los vértices siguiendo las diagonales de los cuadrados y que rebota siguiendo una reflexión perfectamente elástica. ¿A qué* *esquina llegará? ¿Cuántos rebotes habrá hecho?*



La solución surge al representar gráficamente los rebotes de la bola en una cuadrícula de rectángulos de longitudes a y b utilizando la simetría hasta que la poligonal de los rebotes se transforma en una recta, el problema se reduce a determinar cuando esta recta encuentra por primera vez un vértice de la cuadrícula. La conjetura que surge al analizar este planteamiento es análoga a la utilizada en el problema **Vaya corte**.

Buscar problemas análogos es una estrategia muy útil cuando se tiene cierta experiencia en la resolución de problemas. Consiste en recordar otros problemas semejantes, en los que las relaciones entre sus elementos sean concordantes con las de nuestro problema

Introducir elementos auxiliares. Los elementos auxiliares son un conjunto muy diverso, formado por incógnitas, teoremas, rectas, ángulos, planos..., que nos permiten establecer lazos lógicos, entre los datos del enunciado y las incógnitas del problema.

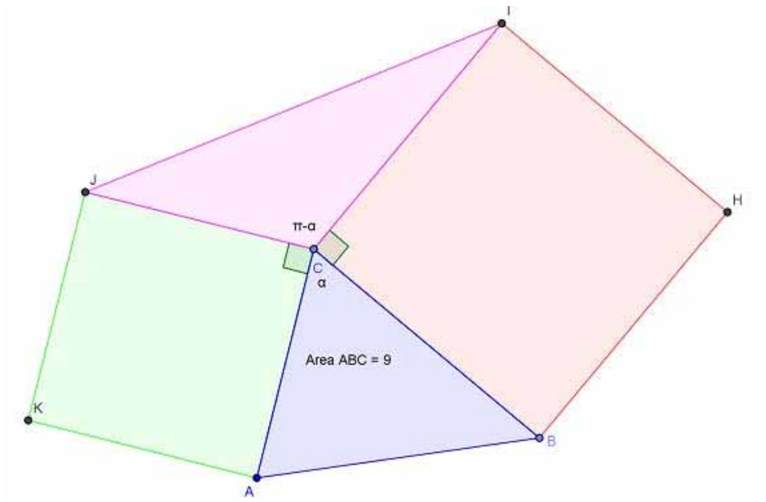
Un ejemplo en el que introducir elementos auxiliares nos descubre un plan de resolución es el que acabamos de citar, **Una mesa de billar**. La cuadrícula de rectángulos y la recta que cortaba a los distintos rectángulos son elementos auxiliares que nos ayudan a encontrar la solución.

En un problema de geometría plana son casi siempre rectas, segmentos y circunferencias, los elementos auxiliares que nos permiten acercarnos a la solución. Además no hay que olvidar que un teorema matemático que nos ayuda a resolver un problema, estableciendo lazos lógicos entre los datos y la incógnita, es también un elemento auxiliar.

Un ejemplo en el que son los resultados matemáticos los elementos auxiliares es el siguiente.

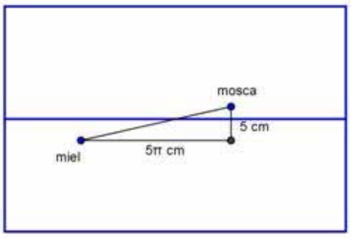
Problema: *La figura adjunta está formada por dos triángulos y dos cuadrados. Calcula el área del triángulo JCI sabiendo que el valor del área del triángulo ABC es $9cm^2$.*

Los triángulos ABC y JCI tienen dos lados iguales y los ángulos comprendidos son suplementarios por lo tanto tienen la mismo área.



Otro problema que se resuelve introduciendo elementos auxiliares y utilizando la simetría es el que presentamos a continuación.

Problema ¿Qué camino debe seguir la mosca?: *En el interior de un vaso cilíndrico de cristal de* $20\,cm$ *de alto y* $10\,cm$ *de diámetro hay una gota de miel situada a tres centímetros del borde superior. En la pared exterior, en la generatriz opuesta a dos cm del borde superior se ha parado una mosca. ¿Cuál es el camino más corto que debe seguir la mosca para llegar hasta la gota de miel?.*



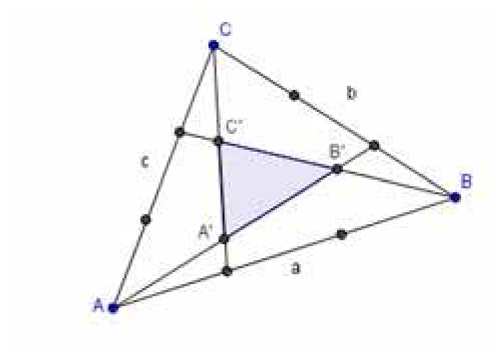
La solución surge al desarrollar el cilindro, la parte interior y la exterior y utilizar la simetría, con los datos del cilindro se puede calcular la distancia minima que recorre la mosca.

Subobjetivos. Dividir el problema en partes. Aunque no sepamos resolver un problema, puede ocurrir que podamos hallar la solución de partes aisladas, y que luego seamos capaces de engarzarlas para construir con ellas la solución. También podemos sustituirlo por otro análogo pero más fácil, con menos variables o con números más pequeños.

Un problema clásico que se puede utilizar como ejemplo es el siguiente[4].

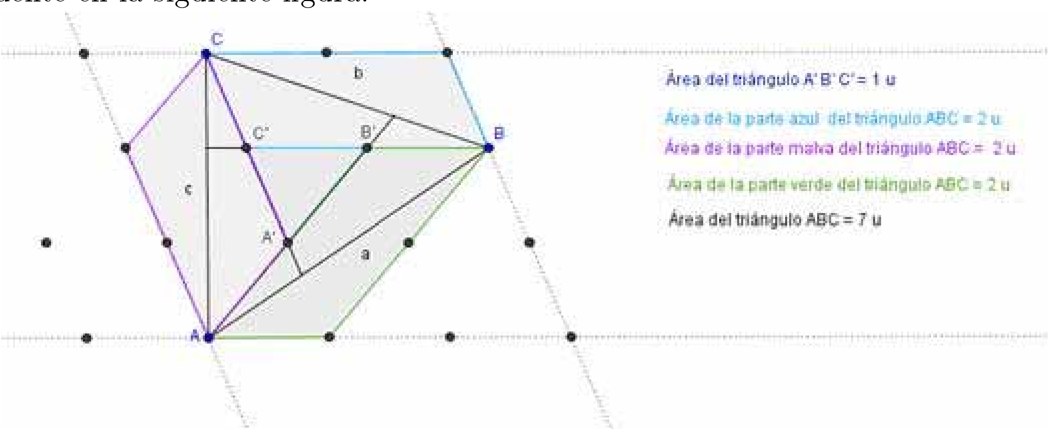
[4]Este problema es un caso particular del conocido como teorema de Routh que establece la razón entre el área de un triángulo ABC y el formado por las intersecciones de tres de sus cevianas conocidas las razones entre los segmentos en los que cada ceviana divide a cada uno de los lados a, b y c. Cuando estas razones son iguales a un valor λ la razón entre las áreas es $(\lambda - 1)^3/(\lambda^3 - 1)$. Como corolarios de este teorema se pueden obtener los teoremas de Menelao y Ceva.

Problema Triángulo dentro de un triángulo: *En un triángulo cualquiera ABC, determina los seis puntos que dividen cada lado en tres partes iguales y dibuja los tres segmentos que unen cada vértice con el punto del lado opuesto, determinado anteriormente, más próximo al vértice contiguo. ¿Cuál es el área del triángulo $A'B'C'$ cuyos vértices son los puntos de intersección de estos tres segmentos?.*



Aparentemente los segmentos $A'C'$ y $C'C$ son iguales, lo mismo que los segmentos AA' y $A'B'$ y los segmentos $C'B'$ y $B'B$, hecho que podemos confirmar con un programa de geometría dinámica.

El problema se puede dividir en dos partes, la primera es demostrar esta conjetura que parece que se verifica y la segunda consiste en resolver el problema suponiendo que la primera es cierta, la solución de esta segunda parte resulta evidente en la siguiente figura:



La primera parte es fácil de demostrar con métodos de geometría elemental pero dividir el problema en partes nos ha permitido avanzar en la resolución del problema.

Dividir un problema en partes es una de las posibles estrategias para resolver un problema, no es un método en sí mismo porque necesita de otros para llegar a la solución y es especialmente eficaz para resolver problemas con relaciones recurrentes.

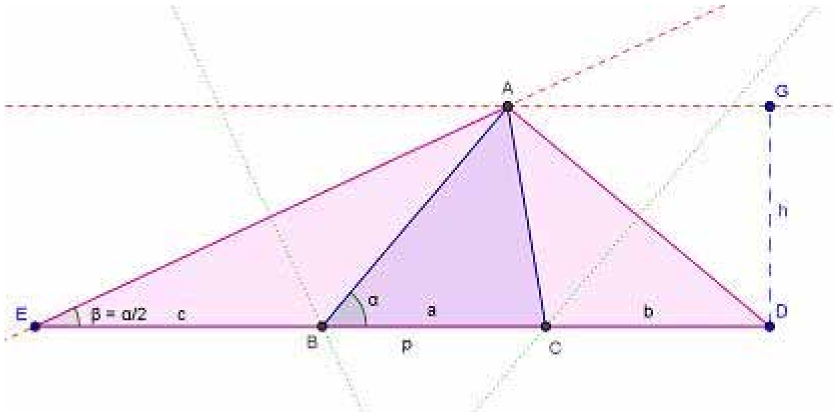
Suponer el problema resuelto o trabajar marcha atrás. Es muy útil para resolver problemas en los que conocemos la incógnita, pero no conocemos las operaciones o condiciones que producen el objetivo o a veces el estado inicial.

Un ejemplo muy llamativo de lo útil que puede ser esta estrategia es el que propone Polya en su libro *Cómo plantear y resolver problemas*:

Problema: *Construir un triángulo, dados un ángulo, la altura correspondiente al ángulo dado y el perímetro del triángulo.*

Sea α al ángulo conocido y a, b, c los lados del triángulo con $a + b + c = p$, siendo p el perímetro.

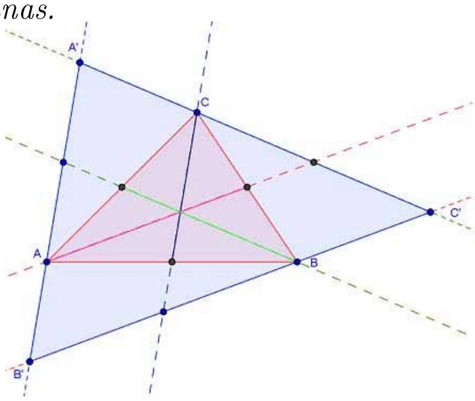
Supongamos el problema resuelto. Añadimos a la base a, dos segmentos de longitudes b y c en la misma dirección del lado a, uno a la derecha y otro a la izquierda. Con esta base $a+b+c$, que es conocida, construimos un triángulo de la misma altura que el de la solución, de esta forma el triángulo inicial se encuentra orlado por dos triángulos isósceles, cuyos lados iguales son respectivamente b y c y los tres forman el triángulo de base p, altura h, y el ángulo correspondiente $\alpha/2$. La construcción de este triángulo es mucho más fácil y a partir de él está determinado el problema inicial.



Muchas veces, al suponer el problema resuelto aparecen los datos más cercanos y es más fácil establecer las relaciones entre los datos y la solución.

Otro problema que utiliza esta estrategia es el siguiente.

Problema: *Construir un triángulo conociendo las longitudes de sus tres medianas.*



Supuesto construido el triángulo ABC dibujamos sus medianas y las rectas paralelas a estas que pasan por un punto diferente por el que pasa la mediana hasta obtener el triángulo ABC, cada uno de sus lados mide el doble que el de su mediana paralela. A partir de este triángulo la construcción de ABC es evidente.

5.3. Las emociones y los bloqueos en la resolución de problemas

Las emociones. La primera recomendación para resolver un problema es comprenderlo lo mejor posible. Pero esto no es suficiente, hay que concentrarse por completo en el problema y desear intensamente resolverlo. Si no se consigue, más vale abandonarlo.

No se puede considerar un problema como algo meramente intelectual, ya que las emociones juegan un papel muy importante y cuando surgen desilusiones y fracasos sólo un intenso deseo de llegar a la solución permite superarlos. Por otra parte, alcanzar el resultado de un problema favorece la autoestima y con la práctica se van acumulando una serie de éxitos que actuarán como refuerzo en momentos de desaliento, cuando no se tenga ninguna idea para resolver el problema.

Entre los estados emocionales más ligados a la resolución de problemas está el producido por una idea feliz, que nos permite hacer una conjetura y aunque posteriormente comprobemos que no es válida, momentáneamente, es un estado difícil de describir ligado a la ilusión. La excitación que produce este estado, se convierte en una confianza ciega en la solución, por lo que es necesario mostrar escepticismo, comprobarlo todo y ser muy crítico, ya que si posteriormente observamos que la idea ha sido total o parcialmente falsa, la desilusión será mayor y es más fácil abandonar por no tener suficientes fuerzas para superar el fracaso.

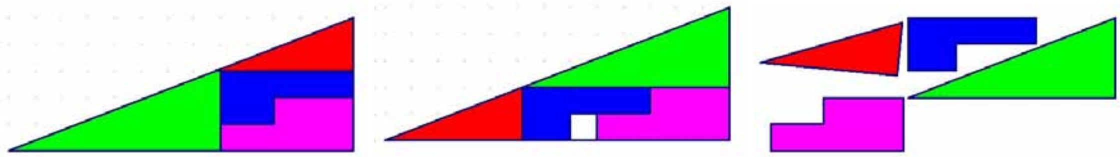
Otro estado muy característico es el de estar bloqueado/a, o atascado/a, que va acompañado de desilusión, ganas de abandonar, tensión, frustración, etc. Sin embargo puede llegar a ser un estado positivo, del que se puede aprender mucho, por lo que la mejor recomendación es reconocerlo y reflexionar sobre todo aquello que estimule hacer algo dirigido a encontrar la solución, es decir, actuar, y en este momento es cuando influyen el cúmulo de éxitos adquiridos en la experiencia pasada, recordando que este estado lo hemos tenido muchas veces y lo hemos superado, y eso nos anima a continuar.

Tipos de bloqueos. Para conseguir superar los bloqueos que surgen al resolver problemas es importante conocer los distintos tipos y los diferentes métodos que nos ayudan a superarlos.

Bloqueos emocionales o afectivos. Pueden ser debidos a cierta apatía o pereza para comenzar la tarea, en definitiva falta de motivación. También pueden producirse por miedo al fracaso a equivocarse o al ridículo. La ansiedad por obtener la solución y la hiperactividad son también elementos que bloquean el camino hacia la solución.

Bloqueos culturales y ambientales. Los bloqueos de tipo ambiental se deben a la falta de cooperación, las prisas y los agobios que son tan comunes en la sociedad actual y los de tipo cultural se derivan, por ejemplo, de pensar que hay que ser muy prácticos, que resolver problemas matemáticos es un juego de niños o que ser creativo es tan raro que no vale perder el tiempo con los procesos que lo facilitan. Un ejemplo en el que se manifiesta un bloqueo de este tipo es el siguiente.

Problema El triángulo mágico: *¿Por qué en la segunda figura adjunta sobra un cuadrado blanco?*



En este problema el bloqueo está en la percepción del enunciado hay dos triángulos que parecen iguales y son distintos o son iguales y parecen diferentes.

Un consejo para superar el bloqueo es realizar las construcciones con un programa informático de geometría dinámica o bien utilizar el teorema de Tales o la trigonometría para descubrir el gazapo.

Bloqueos cognoscitivos. Se pueden producir por carecer de las herramientas matemáticas necesarias para resolverlo, o bien por falta de práctica en resolver problemas debido a desconocer o no saber utilizar las estrategias heurísticas. Resolver muchos problemas y conocer las estrategias heurísticas son los consejos más efectivos que nos permiten controlarlos.

Se van a analizar algunos bloqueos que se plantean en la percepción y en el ataque al problema.

Bloqueos en la percepción del problema. Son los que se plantean en la comprensión del problema. Pueden ser debidos a cierta incapacidad para considerar el problema desde distintos puntos de vista o a una visión estereotipada del problema, de modo que sólo vemos lo que esperamos ver. Entre los bloqueos de este tipo más comunes están los que se denominan suposiciones ocultas.

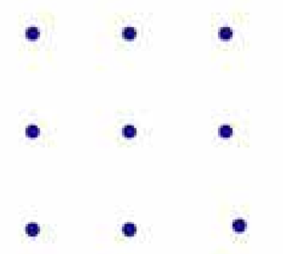
Suposiciones ocultas. Es muy fácil quedar atascado en un problema por lo que llamamos suposiciones ocultas que son limitaciones innecesarias que nos inventamos y nos impiden considerar otras posibilidades entre las que se encuentra el camino que hay que seguir para avanzar hacia la solución de nuestro problema.

Las suposiciones ocultas son la base de muchos acertijos, pero lo cierto es que no se limitan a estos, sino que están en la base de nuestra percepción y pueden llegar a modificar el rumbo de una investigación matemática. Citaremos unos ejemplos conocidos.

Problema Palillos: *¿Cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?*

La suposición oculta de este problema es que nos limitamos a soluciones planas y no consideramos el paso al espacio. El problema se resuelve al construir un tetraedro.

Problema Nueve puntos: *¿Cómo unir nueve puntos, distribuidos en los vértices de una cuadrícula 2x2, por medio de cuatro segmentos rectilíneos, sin levantar el lápiz del papel ni recorrer dos veces parte del mismo camino.*



La suposición oculta consiste en dar por hecho que no se puede salir del cuadrado determinado por los puntos, cuando se observa que en ningún momento se impone esta condición, la solución es evidente.

Bloqueos en el ataque al problema. Se pueden producir por carecer de las herramientas matemáticas necesarias para resolverlo, o bien por falta de práctica en resolver problemas debido a desconocer o no saber utilizar las estrategias heurísticas. Resolver muchos problemas y conocer las estrategias heurísticas son los consejos más efectivos que nos permiten controlarlos.

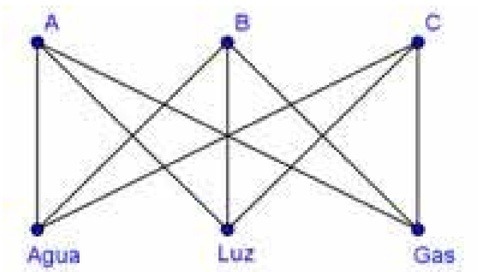
Un ejemplo de este tipo de bloqueo es el llamado **efecto túnel**.

Aparece cuando nos encontramos tan absorbidos por la ejecución de una acción que nos impide considerar otras alternativas del problema entre las que está el camino hacia la solución. Como ejemplo de una situación de este tipo, citaremos la que se produce muchas veces cuando intentamos resolver un problema que no tiene solución. Normalmente pasa mucho tiempo hasta que consideramos esta posibilidad. La forma de evitar estos bloqueos es considerar todas las alternativas, probarlas sistemáticamente y evaluarlas críticamente para determinar si el contexto del problema nos ofrece otras posibilidades.

Cuando al resolver un problema se formula una conjetura hay que ser muy escépticos, analizando críticamente sus posibles fallos. Frente a un bloqueo es recomendable saber por qué, lo que supone detectar los distintos tipos de bloqueo y plantear las acciones necesarias para superarlos.

Como ejemplo de una situación de este tipo, está la que se produce, cuando se intenta resolver un problema que no tiene solución, normalmente pasa mucho tiempo hasta considerar esta posibilidad, como en el siguiente acertijo.

Problema Agua, luz y gas: *En un vecindario hay tres casas y tres fuentes una de agua, una de luz y una de gas. Se trata de conectar cada casa con cada fuente de suministro mediante líneas que no se crucen entre sí.*



Este acertijo, que no tiene solución, es un resultado conocido de teoría de grafos. Se puede demostrar con el teorema de Euler.

6. Conclusiones

La importancia de la resolución de problemas geométricos en el desarrollo del pensamiento matemático, en general, y del razonamiento matemático en cada persona.

La resolución de problemas es una actividad mental que incluye diversos procesos que rigen el razonamiento matemático, modulada por estados emocionales.

El éxito en la resolución de problemas mejora con la práctica, mediante la reflexión sobre el estudio del proceso en sí mismo, conociendo los modelos teóricos de resolución de problemas, las estrategias heurísticas que proporcionan herramientas para afrontarlo con confianza y las pautas heurísticas que sirven para fijar la atención en aspectos concretos del problema.

Aprender a resolver problemas geométricos es aprender a hacer matemáticas.

Bibliografía

[1] J. D. Bransford, B. S. Stein, *Solución ideal de problemas*, Labor, 1986.

[2] J. Brihuega, M. Molero, A. Salvador, *Didáctica de las Matemáticas*, UCM, 1995.

[3] L. Burton, *Thinking Things Through*, Basil Blackwell, 1984.

[4] Y. S. Dubnov, *Errores en las demostraciones geométricas*, Rubiños, 1994.

[5] L. Figueiras, M. Molero, A. Salvador, N. Zausti, *Género y matemáticas. Cap. 6: Creatividad emociones mujeres y resolución de problemas*, Sintesis, 1998.

[6] L. Figueiras, M. Molero, A. Salvador, N. Zausti, *Matemáticas en las Matemáticas*, Proyecto Sur, 1998.

[7] M. de Guzmán, *Enfoque heurístico de la enseñanza de la matemática*, ICE-Univ.Zaragoza, 1985.

[8] M. de Guzmán, *Para pensar mejor*, Labor, 1991.

[9] M. de Guzmán, *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas*, Anaya, 2003.

[10] Y. Lakatos, *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Alianza, 1978. [Proofs and Refutations. The Logics of Mathematical Discovery, 1976]

[11] A. Maslow, *La personalidad creadora*, Kairos, 1982.

[12] J. Mason, L. Burton, K. Stacey, *Pensar matemáticamente*, Labor, 1998. [Thinking Mathematically, Addison Wesley, 1982]

[13] G. Polya, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, 1965. [How to Solve It, Princeton University Press, 1945]

[14] G. Polya, *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, 1966. [Mathematics and Plausible Reasoning, Princeton University Press, 1954]

[15] G. Polya, *Mathematical Discovery* (2 volúmenes), Johjn Wiley and Sons, 1962-65.
[16] Shell Centre For Mathematical Education, *Problemas con pautas y números*, Universidad del País Vasco, 1993.
[17] A. H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, 1985.
[18] G. Wallas, *The art of thought*, Harcourt Brace, 1926.
[19] R. W. Weisberg, *Creatividad. El genio y otros mitos*, Labor, 1987.
[20] L. E. Wood, *Estrategias de pensamiento*, Labor, 1987.

María Molero Aparicio
IES Juan de la Cierva
C/ Caoba nº 1, 28005 (Madrid)
e-mail: ***maria.molero@free.fr***