Historia

Sección a cargo de

Luis Español González

Llega a esta sección un artículo relacionado con una tesis doctoral defendida el año 2014 en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona, titulada Una revisión de la historia del descubrimiento de las geometrías no euclidianas *y dirigida por A. Reventós. Animamos a los doctores recientes y futuros cuyas tesis doctorales traten de historia de las matemáticas, y a sus directores, a que envíen a esta sección algún trabajo relacionado con el proyecto de investigación que les llevó a doctorarse.*

Una prueba maravillosa

por

Celia López y Carlos J. Rodríguez B.

Dedicado a la memoria de
Alberto Dou (1915–2009)

Resumen. La fórmula *«el área de un triángulo esférico es proporcional a su exceso»* es de Girard (1629). En este trabajo se traduce del latín al español la prueba de la fórmula encontrada por Bonaventura Cavalieri (1632). Pero lo más interesante es que se explica cómo Lambert (1766) pudo deducir de la lectura de esta prueba que la geometría de la esfera ordinaria es *absoluta* (independiente del axioma de las paralelas euclidiano).

1. Introducción

En 1632 ([4]) Cavalieri demostró con notable sencillez la fórmula de Girard, que desconoce, pues presenta su fórmula como nueva. Como veremos en la Sección 2, la prueba consiste en calcular las áreas de los tres husos que determinan los ángulos del triángulo esférico dado, haciéndolo de dos maneras: como partes proporcionales de la superficie de la esfera y como sumas de los triángulos en que se descomponen.

La suma de las tres proporciones que se obtienen se puede escribir en términos de $S = 4\pi R^2$ (el área de la esfera), T (el área del triángulo) y $\delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ (el exceso) mediante la proporción

$$\frac{S}{T} = \frac{4\,\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}\,\delta}\,, \tag{1}$$

que es el enunciado de Cavalieri en forma algebraica y usando radianes,[1] del que se deduce la fórmula, también en radianes,

$$T = R^2\,(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \tag{2}$$

La de Cavalieri no es la única ni la primera prueba existente de este resultado. En el libro de Rosenfeld [15, pp. 29–32] se puede leer: la prueba que Girard publicó en 1629 (una prueba euclidiana, difícil e incompleta); que Harriot en 1603 conocía la fórmula; que la fórmula de Harriot fue conocida por Briggs, quien la consideró como uno de los grandes descubrimientos de su tiempo; que Briggs, en una carta de 1625, se la comentó a Kepler sin incluir ninguna prueba; y la prueba que Euler publicó, de 1781. Rosenfeld explica la prueba de Euler, sin notar que es, en esencia, la misma prueba de Cavalieri publicada 149 años antes. Cuando se leyeron los manuscritos de Harriot [11] se encontraron con una prueba similar a la de Cavalieri. Hubo, pues, tres pruebas notablemente simples y similares: la de Harriot en 1603 (no publicada), la de Cavalieri en 1632 y la de Euler en 1781. Parece que Rosenfeld solo conocía, al escribir su libro, la de Euler. Cabe suponer que Cavalieri no conoció la prueba de Harriot y Euler solo mencionó a Girard. Hay que reconocer que Euler fue la primera persona que usó métodos infinitesimales para desarrollar de manera intrínseca la trigonometría esférica (sin considerarla, como es natural, un subespacio del espacio tridimensional) y, por lo tanto, independiente de la teoría de las paralelas. La trayectoria temporal de estas demostraciones se recoge en la Figura 1.

En este artículo solo se trata la prueba de Cavalieri, de la que se ofrece en la Sección 2 la traducción del latín al español, acompañada de algunos comentarios y de la prueba de Euler.

La prueba de Cavalieri se conecta con la obra de Lambert, más de un siglo posterior. Lambert afirma en 1766 que la geometría de la esfera es independiente del axioma de las paralelas, cuando toda la trigonometría esférica conocida en su época depende del Teorema de Pitágoras, equivalente al axioma de las paralelas. ¿Cómo pudo Lambert deducir esta afirmación? La respuesta la encontramos en la lectura que pudo hacer de una prueba como la de Cavalieri. A exponer esta hipotética lectura de Lambert se dedica la Sección 3, en la que se da cuenta de la introducción de la *esfera imaginaria* y de esta notable conclusión: la geometría de la esfera ordinaria de radio R es absoluta, es decir, independiente del axioma de las paralelas euclidiano. De esto se deduce que, en un espacio extraordinario (sus planos son esferas imaginarias), la geometría de una esfera con centro en infinito es euclidiana;[2] este resultado es crucial en el descubrimiento de la geometría hiperbólica.

[1] Identificamos el ángulo recto de Cavalieri con $\pi/2$. Girard usa grados.

[2] Fue Wachter, un alumno de Gauss (véase la Figura 7), en un pasaje de una carta de diciembre de 1816, el primero en darse cuenta de que, en el espacio antieuclidiano, las esferas con centro en infinito serían planos euclidianos.

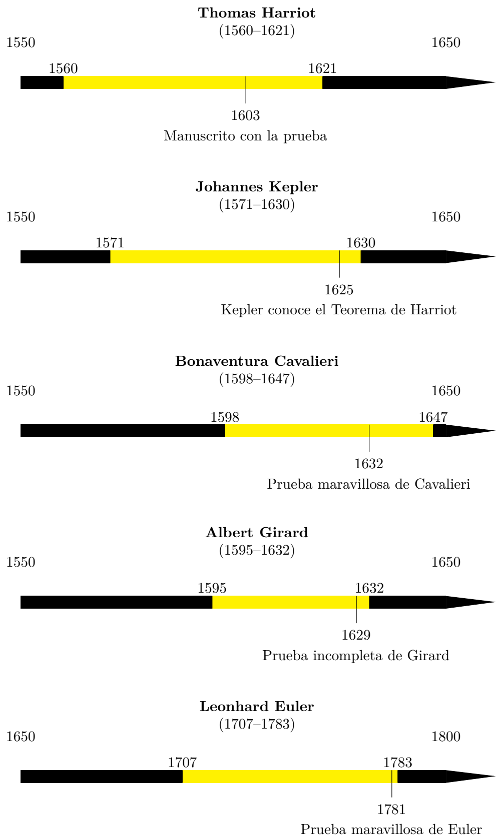


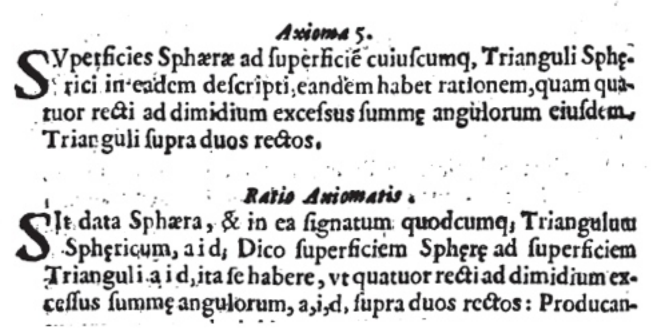
Figura 1: Línea del tiempo para la *prueba maravillosa*.

Quede así sustentada la importancia de la prueba de Cavalieri.

En la tesis [13] se muestra cómo la suposición de que la *analogía* de Lambert con una esfera imaginaria estuvo en la mente de los protagonistas explica mejor la historia del descubrimiento de las geometrías no euclidianas. El apéndice *La esfera imaginaria* de esa tesis es un ensayo[3] en el que se esboza todo un proyecto de revisión de la historia del descubrimiento de la geometría no euclidiana bajo la suposición de que la analogía de Lambert es el hilo conductor que guió a Gauss, a Bolyai y a Lobachevsky; este trabajo forma parte de este proyecto. Las lecturas recomendadas en la Sección 4 también están vinculadas con él.

Este proyecto es especulativo porque no hemos podido demostrar que Lambert leyó a Cavalieri, ni que Gauss leyó a Lambert (aunque resulta increíble que no lo leyera; pero, la verdad sea dicha, Gauss no citó a Lambert nunca).

[3]El autor de la tesis, que escribió el ensayo en 2002 para el curso *El quinto postulado de Euclides* en la Universidad Autónoma de Barcelona, agradece al profesor del curso, Albert Dou, por animarlo a desarrollar el proyecto allí esbozado y por haberle cedido su archivo sobre el quinto postulado.



Axioma 5.

SVperficies Sphæræ ad ſuperficiẽ cuiuſcumq, Trianguli Sphęrici in eadem deſcripti, eandem habet rationem, quam quatuor recti ad dimidium exceſsus ſummę angulorum eiuſdem Trianguli ſupra duos rectos.

Ratio Axiomatis.

SIt data Sphæra, & in ea ſignatum quodcumq; Triangulum Sphęricum, a i d; Dico ſuperficiem Sphęrę ad ſuperficiem Trianguli a i d, ita ſe habere, vt quatuor recti ad dimidium exceſſus ſummę angulorum, a, i, d, ſupra duos rectos: Producan-

Figura 2: Fragmento de Cavalieri, *Directorium generale*, p. 316.

En la historia de las matemáticas, si el que concibe una idea o formula un teorema importante borra, como el zorro con su cola, el camino que lo condujo a su descubrimiento o invención, y solo nos presenta la lógica acabada de su presentación o demostración, nunca sabremos con certeza quién le influyó. El historiador de las matemáticas está, pues, condenado a especular sobre el camino del descubrimiento, uno de sus objetos primordiales de investigación. No le queda más remedio que establecer con claridad sus suposiciones, demostrar su plausibilidad y explicar el flujo continuo de las ideas desde la fuente que crea original, identificar los puntos de inflexión de la historia con sus protagonistas y sus contribuciones. Casi siempre todos los grandes matemáticos están sobre los hombros de otros y su genialidad reside muchas veces en la manera en como leyeron lo que otros han descubierto sin saberlo. Una obligación del historiador es reemplazar un testimonio histórico inexistente con una historia creíble. Esperamos que los lectores de LA GACETA DE LA RSME crean en la historia que contamos o le encuentren dislates y la mejoren. La historia del descubrimiento de las geometrías no euclidianas es una historia que merece ser contada, y una pregunta a la que hay que buscarle una respuesta es «¿cómo pudo Lambert en 1766 afirmar que la geometría de la esfera es absoluta?». En este artículo damos una respuesta plausible.

2. LA PRUEBA MARAVILLOSA DE CAVALIERI

Cavalieri dedica al área de los triángulos esféricos el capítulo VIII de la tercera parte de su *Directorium generale*, titulado «Sobre el axioma quinto de los triángulos esféricos y las reglas que de éste emanan» [4, pp. 316–317]. Denomina «axioma quinto» al enunciado de la razón del área de la esfera a la del triángulo, al que sigue una «explicación del axioma» (Figura 2) que es su demostración, que calificamos como «prueba maravillosa» por su notable simplicidad. En la proporción que formula Cavalieri menciona el ángulo recto evitando la referencia a unidades.

En el primer apartado de esta sección damos la traducción española del original latino del «axioma 5» y su demostración, dejando para el siguiente los comentarios sobre dicha prueba y la versión de la misma debida a Euler [7].

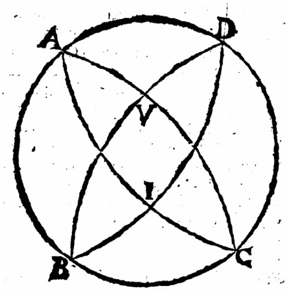


Figura 3: Dibujo de Cavalieri, *Directorium generale*, p. 316.

En el original de Cavalieri, la Figura 3 está intercalada en el texto y aquí se presenta exenta. En la demostración, hemos numerado los párrafos y respetado el uso de u en el texto por V en el dibujo, de minúsculas en el texto por mayúsculas en el dibujo.

2.1. La traducción

Axioma 5

La superficie de la esfera a la superficie de cualquier triángulo esférico en ésta contenido tiene la misma razón que cuatro rectos a la mitad de la diferencia de la suma de los ángulos del mismo triángulo y dos rectos.

Explicación del axioma

1. Sea dada una esfera y en ella marcado cualquier triángulo esférico aid, digo que la superficie de la esfera es a la superficie del triángulo adi como cuatro rectos a la mitad de la diferencia de la suma de los ángulos a, i, d y dos rectos:
2. Se producen tres arcos ad, ai, di, para que los círculos $adcb$, $aicu$, $dibu$ se completen, de los cuales por intersección se hace el triángulo esférico ubc, que será igual al triángulo aid.
3. Tiene, en efecto, sus lados iguales, ya que el semicírculo dab, como también abc, serán ambos iguales, ya que retirado el común ab, permanecerá el arco da igual al arco bc, y de este modo se prueba que ai y uc, y di y ub son iguales.
4. Por esto se probará fácilmente que el triángulo aid es igual al triángulo buc, como en las cosas planas por superposición, etc. Más adelante, que la superficie de la esfera es a la porción de la superficie esférica encerrada por dos semicírculos dab y dib como cuatro rectos al ángulo adi, se probará también fácilmente, según el modo del último sexto elemento.
5. De donde, de manera semejante, ésta es a la porción encerrada máximamente por los dos semicírculos adc, aic como cuatro rectos al

ángulo *adi*, y, de igual manera, a la porción encerrada por los dos semicírculos *ibu*, *icu* corresponderá que esta superficie esférica es como cuatro rectos al ángulo *aid*.

6. Y si aceptáramos en vez del triángulo *buc* el igual a éste, *aid*, también se mostrará que la superficie esférica es a la suma de los triángulos *bic*, *aid* como cuatro rectos al ángulo *aid*.
7. Por tanto, recogidos todos los consecuentes en una sola suma, la superficie de la esfera será a las dos porciones cerradas, una del semicírculo *dab*, *dib*, la otra del semicírculo *adc*, *aic*; una con los triángulos *bic*, *aid* (que excede a la mitad de la superficie esférica en dos triángulos *aid*), esto es, la mitad de la superficie esférica más dos triángulos *aid*, como cuatro rectos a la suma de los ángulos *dai*, *adi*, *aid*.
8. Ciertamente, la superficie de la esfera es a su mitad como cuatro rectos a dos rectos. Por tanto, igual que la superficie de la esfera es a los dos triángulos *aid*, así serán cuatro rectos a la diferencia de la suma de los ángulos *dai*, *aid*, *ida* y dos rectos. De ahí que la misma superficie esférica será al triángulo *aid* como cuatro rectos a la mitad de la diferencia de la suma de estos tres ángulos y dos rectos, lo cual se trataba de mostrar.

2.2. Comentarios y la prueba de Euler

La idea de Cavalieri es que basta con «ver» la descomposición de la esfera en husos y triángulos que se produce cuando prolongamos los lados del triángulo. Para la prueba es necesario «ver en 3D» la figura 2D con la que Cavalieri ilustra su proposición (Figura 3). La estatua erigida como homenaje a Cavalieri en los jardines del Palacio de Brera en Milán, firmada y fechada en 1844 por Giovanni Antonio Labus, lo representa portando una esfera en la que se aprecian trazos de triángulos esféricos (ver Figura 4). Se sugiere así que Cavalieri pudo usar una esfera tridimensional como pizarra 3D, artificio que facilita la lectura de su demostración. Por otra parte, que éste sea el motivo elegido para exaltar al autor italiano da cuenta de la importancia que en su día se otorgó a la prueba dada por Cavalieri de la fórmula del área de un triángulo esférico.

Las tres demostraciones, la de Cavalieri, la de Euler y la de Harriot, consisten en una descripción cuidadosa, precisa y cuantitativa de las áreas de las regiones como las de la Figura 3 de Cavalieri, similar a la Figura 5 de Euler. No obstante, la prueba de Euler se puede seguir sin ninguna figura de referencia.

Euler denota con minúsculas a, b, c los puntos antipodales de los vértices A, B, C del triángulo esférico considerado. Su ilustración es más abstracta, está usando una especie de proyección estereográfica de la figura 3D de Cavalieri. Hacía muchos años que Euler estaba totalmente ciego, cuando dictó esta memoria. La prueba de Euler, casi moderna, se puede seguir sin usar ninguna figura, si uno acepta que la

Figura 4: Monumento a Bonaventura Cavalieri en Milán. Fotografía de Giovanni Dall'Orto, 19 de enero de 2007. Detalle de la fotografía.

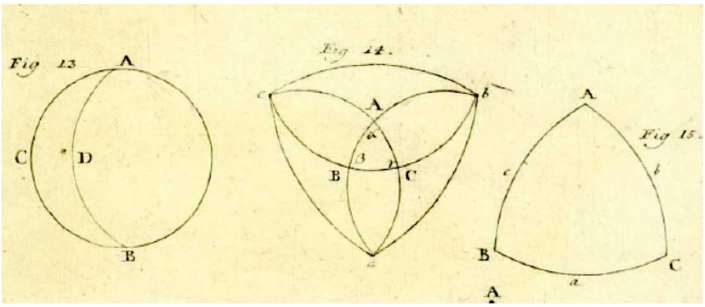


Figura 5: Dibujo original de la memoria de Euler [7].

reunión de las ocho partes es toda la esfera.[4] Euler ha dejado la retórica de Cavalieri y es casi moderno, la notación facilita contar los ocho triángulos.

Vamos a la prueba que Euler dio en 1781 [7]. Sea ABC un triángulo esférico de área T, con α, β y γ las medidas en radianes de sus ángulos en A, B y C, en el mismo orden. Considerando los puntos simétricos antipodales $a = -A$, $b = -B$ y

[4]Observación muy importante porque uno de los obstáculos que tuvieron los que intentaban entender la naturaleza de las rectas de un espacio antieuclidiano es que no tenían ni la menor idea de como se «verían» sus rectas. El propio Lambert señaló esta dificultad y esbozó un programa lógico para superarla.

§. 5. Quare cum tota ſphaerae ſuperficies hic diſſecta ſit in octo triangula, quorum ſingulorum areas hic exhibuimus, earum ſumma aequalis eſſe debet toti ſuperficiei ſphaerae $= 4\pi$; ex qua aequalitate area quaeſita S definiri poterit. Singula igitur haec triangula cum ſuis areis conſpectui exponamus:

I. $ABC = S$	III. $aBC = 2\alpha - S$	VI. $Abc = 2\alpha - S$
II. $abc = S$	IV. $bAC = 2\beta - S$	VII. $Bac = 2\beta - S$
	V. $cAB = 2\gamma - S$	VIII. $Cab = 2\gamma - S$

Summa $= 2S + 2(\alpha+\beta+\gamma) - 3S + 2(\alpha+\beta+\gamma) - 3S$

Figura 6: Fragmento de la memoria original de Euler [7].

$c = -C$, obtenemos los ocho triángulos esféricos que aparecen, numerados I a VIII, en la Figura 6, original del propio Euler.[5]

Como la transformación antipodal $P \mapsto p = -P$ conserva las longitudes de los segmentos esféricos, conserva también el área de los triángulos; por lo tanto, los ocho de la Figura 6 tienen la misma área dos a dos, según las parejas I-II, III-VI, IV-VII, V-VIII.

La unión de triángulos $aBC \cup ABC$ es el huso de ángulo A, cuya área es $2R^2\alpha$, así que los triángulos III y VI tienen como área común $2R^2\alpha - T$. Análogamente, los triángulos IV y VII tienen como área común $2R^2\beta - T$, y los triángulos V y VIII tienen como área común $2R^2\gamma - T$. De modo que, siendo el área de la esfera la suma de las áreas de los ocho triángulos, queda la igualdad

$$4R^2\pi = 2T + 4R^2(\alpha+\beta+\gamma) - 6T,$$

de la que sigue la fórmula (2) dada en la introducción.

Hasta aquí la prueba de Euler. Sólo le faltó demostrar, sin apelar a la figura, que los ocho triángulos cubren la esfera. Probemos que efectivamente es así, para lo que sólo se necesita saber que una circunferencia máxima separa la esfera en dos hemisferios (congruentes), la mismísima observación de Lambert que comentaremos más adelante.

Volvemos al triángulo esférico ABC y su antipodal abc. Sea H_A (respectivamente H_a) el hemisferio determinado por el círculo máximo BC (el que pasa por los puntos B, C) y contiene a A (respectivamente a); la reunión de H_A y H_a es toda la esfera: $S = H_A \cup H_a$. Análogamente se obtiene $S = H_B \cup H_b$ respecto al círculo máximo CA y $S = H_C \cup H_c$ respecto al AB. Por la idempotencia de la intersección se tiene

$$S = (H_A \cup H_a) \cap (H_B \cup H_b) \cap (H_C \cup H_c). \tag{3}$$

[5]Euler toma radio 1 y nosotros R, y llama S al área del triángulo que denotamos T.

Por otra parte, es por definición $ABC = H_A \cap H_B \cap H_C$, con las fórmulas análogas para los otros siete triángulos esféricos. La unión de estas ocho intersecciones es lo que resulta de aplicar la propiedad distributiva en (3).

3. Una lectura que explica las afirmaciones de Lambert

El problema de la teoría euclidiana de las paralelas consiste en deducir el axioma de las paralelas del resto de axiomas. Con Saccheri (1733) se comenzó a tratar de resolver el problema de forma indirecta: se niega el axioma de las paralelas con la esperanza de encontrar una contradicción. Las negación de la hipótesis euclídea da lugar a dos alternativas. En la geometría absoluta (la deducida de los cuatro primeros axiomas de Euclides) se construye un cuadrilátero con tres ángulos rectos sin poder conocer la medida del cuarto, lo que da lugar a tres hipótesis. La llamada *hipótesis del ángulo recto* corresponde al axioma de las paralelas euclidiano y es equivalente a «*la suma de los ángulos de un triángulo es* 180°». Lambert, que estudia este problema en *Theorie der Parellellinien* [9, 5], considera también las otras dos hipótesis: la *hipótesis del ángulo obtuso*, equivalente a «*la suma de los ángulos de un triángulo es mayor de* 180°», y la *hipótesis del ángulo agudo*, equivalente a «*la suma de los ángulos de un triángulo es menor de* 180°».

Lambert escribe:[6]

> Agregaré apenas la observación siguiente. Teoremas enteramente análogos se cumplen bajo la segunda hipótesis excepto que bajo ella la suma de los ángulos de un triángulo es mayor de 180 grados. El exceso es siempre proporcional al área del triángulo.
>
> [. . .]
>
> Pienso que es notable que la segunda hipótesis se cumple si en vez de un triángulo plano tomamos uno esférico, porque la suma de los ángulos es mayor de 180 grados y el exceso es también proporcional al área del triángulo.
>
> Lo que me impresiona como aún más notable es que lo dicho aquí sobre triángulos esféricos se puede probar *independientemente del problema de las paralelas*[7] y basta con asumir que cada plano a través del centro de una esfera la divide en dos porciones iguales.

[6] La obra *Teoría de las paralelas* [9] fue escrita por Lambert en 1766 y publicada póstumamente por J. Bernoulli y C. F. Hindenburg. Con frecuencia es citada a través de su reproducción por los editores Engels y Stäckel [5], como hace Rosenfeld [15], en cuya página 100 se encuentran en inglés los fragmentos citados, que hemos traducido de allí.

[7] Itálicas de los autores del ensayo. Aquí Lambert hace la afirmación sorprendente de la independencia de la geometría de la esfera del axioma de las paralelas. Tanto Bolyai como Lobachevsky en la construcción deductiva de un espacio antieuclidiano deben probar primero que las fórmulas de la trigonometría de una esfera absoluta son las mismas que las de la esfera euclidiana. Y en las pocas páginas que Gauss escribió sobre el tema iba por el mismo camino. Es tan curioso este hecho que Liebmann encontró un camino que evitara toda argumentación estereométrica (ver [3, p. 89]) en la construcción de un plano antieuclidiano.

> De esto debo casi concluir que *la tercera hipótesis se cumple en alguna esfera imaginaria.* Por lo menos debe haber algo que explique el hecho de que, a diferencia de la segunda hipótesis, ella ha resistido por tan largo tiempo la refutación.

En los párrafos anteriores, Lambert formula su *analogía con la esfera imaginaria.* Para nosotros, la *analogía* de Lambert es la sustitución formal de R por iR en las fórmulas de la trigonometría esférica de radio R. Se demuestra que las fórmulas obtenidas son las fórmulas de la trigonometría de una superficie con curvatura constante $-R^{-2}$. Como las nuevas fórmulas pueden expresarse en términos de las funciones hiperbólicas (eliminando así la unidad imaginaria de las fórmulas), la esfera imaginaria es el *plano hiperbólico*; de este modo, el plano ordinario es el *plano parabólico* y la esfera ordinaria, el *plano circular.* Las funciones hiperbólicas las estudió Lambert en [8] pero, curiosamente, no las relacionó con su *Theorie der Parellellinien* escrita cuatro años antes.

Lambert es el primer estudioso del problema de las paralelas en reconocer en la geometría de la esfera una realización de la geometría de la segunda hipótesis (a pesar de que en ella falla el axioma I, pues por dos puntos antipodales pasan infinitas rectas) y, por lo tanto, su independencia del axioma de las paralelas.[8] ¿Cómo es que Lambert llegó en 1766 a estas conclusiones? Es muy posible que Lambert hubiese leído a Cavalieri, un autor muy reconocido por su teoría de los indivisibles y por ser alumno de Galileo, que lo llegó a comparar con Arquímedes. La fórmula «*el área de un triángulo esférico es proporcional a su exceso*» es tan sencilla y la prueba de Cavalieri tan elemental, que seguramente debió sorprender a sus contemporáneos. Recordemos que Briggs la consideró como uno de los grandes descubrimientos de su época. Si Lambert hubiese descubierto una prueba similar sin haberla leído en Cavalieri, la habría publicado. Y la otra prueba publicada antes de 1766, la de Girard, no es independiente de la teoría de las paralelas.

Pasemos a leer la prueba de Cavalieri como una prueba absoluta.[9]

Consideremos el espacio absoluto (el espacio ordinario sin ninguna suposición sobre la naturaleza de sus líneas paralelas). La esfera Σ se define como el lugar geométrico de los puntos del espacio absoluto equidistantes de un punto fijo O, el centro de la esfera. Si A es un punto de Σ, la longitud $|OA| = R$ es su radio. Si Π es un plano por O, el punto A' simétrico de A respecto del plano Π está en Σ; es decir, la esfera absoluta es bilateralmente simétrica respecto de cualquier plano por su centro.[10] De esto se deduce que la esfera absoluta es rotacionalmente simétrica respecto de cualquier eje que pase por su centro, pues la composición de dos reflexiones en dos planos que se cortan en un ángulo θ es una rotación de ángulo 2θ alrededor de la recta de intersección de los planos. De esto se deduce que el área

[8] Que toda la geometría esférica se deduce de la fórmula de Girard podrá demostrarse más de cien años después a partir de Euler [6], que deriva la geometría de la esfera intrínsecamente usando el cálculo de variaciones. Gauss hace una lectura muy original de las ideas de Lambert y Euler, y desarrolla su teoría de la geometría intrínseca de superficies (véase [12]).

[9] Que es en esencia la misma argumentación de Lobachevsky [10, pp. 24–25].

[10] Ésta es la afirmación de Lambert «*cada plano a través del centro de una esfera la divide en dos porciones iguales*».

de un huso esférico es al área de la esfera como la medida del ángulo definido por el huso es a cuatro rectos. Ésta es una de las fórmulas claves de la prueba de Cavalieri, las otras fórmulas son consecuencias de las congruencias de las simetrías bilaterales y rotacionales de la esfera absoluta. La prueba de Cavalieri es pues absoluta, es decir, independiente del axioma de las paralelas, así que la fórmula (2) es también válida en el espacio extraordinario. Ésta es precisamente la lectura de Lambert.

Como de la fórmula (2) se deduce toda la geometría de la esfera, la esfera ordinaria y la extraordinaria tienen la misma geometría, la geometría de la *segunda hipótesis* de Lambert, quien debió cambiar R por iR en (2); de este modo la fórmula quedaría

$$T = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma), \tag{4}$$

lo que explica la observación de Lambert del final de la larga cita anterior:

> De esto debo casi concluir que *la tercera hipótesis se cumple en alguna esfera imaginaria.*

En efecto, ahora de (4) se lee que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo de esta *hipotética esfera de radio imaginario* es inferior a dos rectos; es la *tercera hipótesis* de Lambert.

4. Para continuar leyendo

Terminaremos indicando algunos desarrollos que se detallan en la tesis doctoral [13] y están recogidos en la trayectoria temporal de la Figura 7, en la que mostramos la presencia de la esfera imaginaria en el inicio de las geometrías no euclidianas.

En [12] se hace una lectura de la obra de Gauss *Disquisitiones generales circa superficies curvas*[11] bajo la hipótesis de que intentó encontrar entre las superficies del espacio ordinario la hipotética esfera imaginaria de Lambert. Gauss, usando la fórmula (2) como un elemento diferencial, introduce el concepto fundamental de *curvatura*. La esfera ordinaria de radio R es una superficie de curvatura constante R^{-2} y el plano ordinario, una de curvatura 0. El plano ordinario es así una esfera de radio infinito. Así como toda la trigonometría hiperbólica se deduce de la esférica sustituyendo R por iR en cada fórmula trigonométrica esférica, toda la trigonometría plana se deduce de la esférica sustituyendo R por ∞ en cada fórmula trigonométrica esférica. La esfera es la madre de todas las geometrías.

En [1] se analiza la lectura que pudo hacer Gauss del *Apéndice* de Bolyai en 1832, cinco años después de la publicación de *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Esta lectura explica por qué Gauss tomó la decisión de abandonar su proyecto de poner por escrito sus descubrimientos, pues en buena parte coincidían en método y contenido con lo publicado en el *Apéndice*.

En el apéndice de [1] titulado *Una oportunidad perdida*, se demuestra cómo descubrir con la *analogía* un modelo euclidiano de la esfera imaginaria, un modelo que no apela a los métodos infinitesimales de la geometría diferencial de la teoría de

[11] Además, se traduce al catalán esta obra que dio origen a la geometría diferencial intrínseca.

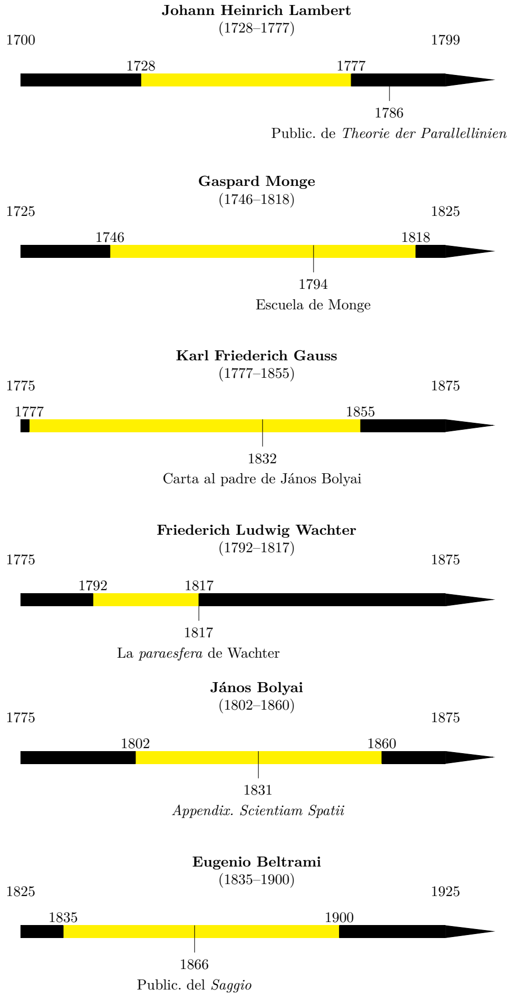


Figura 7: Línea del tiempo de la *esfera imaginaria*.

superficies; se trata del modelo del disco de Poincaré. Este descubrimiento lo pudo haber hecho a finales del siglo XVIII cualquiera de los brillantes alumnos de G. Monge en París que hubiese leído la *analogía* de Lambert. Pero el hecho de estar en alemán la obra de Lambert y la influencia de Legendre (que con cada edición de sus *Elementos* publicaba una nueva prueba del *postulado V*) ocultaron en Francia tan fecunda analogía.

En [14], suponiendo que la *analogía* de Lambert es también su hilo conductor, se estudia cómo Lobachevsky pudo concebir las ideas que lo llevaron a su *geometría imaginaria*. Precisamente se analiza la obra [10], que en 1840 publicó en alemán, y que Gauss leyó y ponderó tan bien. Es importante anotar que Lobachevsky usa en un contexto absoluto la misma idea de Cavalieri para probar la fórmula de Girard; explícitamente afirma la independencia de la geometría de la esfera de la teoría de las paralelas y usa el resultado como la base de la construcción deductiva de un espacio extraordinario en donde los planos son esferas imaginarias de Lambert.

En [2], Beltrami hace uso explícito de la *analogía* de Lambert y encuentra una parametrización de una superficie de curvatura constante $-R^{-2}$, demostrando que su geometría es la de la esfera imaginaria. Es el «modelo de Beltrami», la primera prueba definitiva de la independencia del postulado de las paralelas; se había resuelto negativamente, así, un problema con más de dos mil años de historia: *el postulado quinto no se puede demostrar a partir del resto de axiomas.* Una observación de Bonola (1900) demuestra que en la parametrización de Beltrami se puede «ver» directamente la esfera imaginaria de Lambert (véase la nota n.º 8 en [1, p. 294]).

Agradecimientos

Los autores agradecen al editor de la sección y a los expertos anónimos que leyeron el trabajo original las recomendaciones que lo transformaron completamente, mejorando sustancialmente la presentación.

Referencias

[1] J. Abardia, A. Reventós y C. J. Rodríguez, What did Gauss read in the *Appendix*?, *Historia Math.* **39** (2012), 292–323.

[2] E. Beltrami, Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, *Giornale di Matematiche* **6** (1868), 285–315. Reproducido en *Opere Matematiche*, vol. 1, 374–405, Ulrico Hoepli, Milán, 1902.

[3] R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1955.

[4] B. Cavalieri, *Directorium generale uranometricum, in quo trigonometriae logarithmicae fundamenta ac regulae demonstrantur, astronomicaeque supputationes ad solam fere vulgarem additionem reducumtur*, N. Tebaldi, Bolonia, 1632.

[5] F. Engel y P. Stäckel (eds.), *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, B. G. Teuner, Leipzig, 1895. Reimpreso por Johnson Reprint Co., New York, 1968.

[6] L. Euler, Principes de la trigonométrie sphérique tirées de la méthode des plus grands et des plus petits, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* **9** (1755), 233–257.

[7] L. Euler, De mensura angulorum solidorum, *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae* **2** (1781), 31–54.

[8] J. H. Lambert, Observations trigonométriques, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* **24** (1770), 327–354.

[9] J. H. Lambert, Theorie der Parallellinien, *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik* (1786), 137–164 y 325–358. Reproducido en [5, pp. 152–207].

[10] N. Lobachevsky, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlín, 1840. La traducción al inglés por G. B. Halsted, *Geometrical researches on the theory of parallels*, aparece como apéndice en [3].

[11] J. A. Lohne, Essays on Thomas Harriot. II: Ballistic Parabolas, *Arch. Hist. Exact Sci.* **20** (1979), 230–264.

[12] A. Reventós y C. Rodríguez, *Una lectura del Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas de C. F. Gauss*, Publicaciones electrónicas, vol. 4, Societat Catalana de Matemàtiques, Barcelona, 2006.

[13] C. Rodríguez, *Una revisión de la historia del descubrimiento de las geometrías no euclidianas*, Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, 2014.

[14] C. Rodríguez, Una lectura magistral (en preparación).

[15] B. A. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Springer-Verlag, New York, 1988.

Celia López, Facultade de Letras, Universidade do Porto
Correo electrónico: uranias.celia@gmail.com

Carlos J. Rodríguez B., Dpto. de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona
Correo electrónico: rdrgzcarlos@gmail.com