Historia

Sección a cargo de

Antonio Durán

El enfoque conjuntista en matemáticas

por

José Ferreirós

1. Los orígenes: 1854—1872.
2. El principio de comprehensión y las antinomias.
3. El enfoque conjuntista y la matemática abstracta.
4. Epílogo.

Es bien sabido que el enfoque conjuntista ha tenido una gran importancia en el siglo XX como elemento unificador y sistematizador de la matemática moderna. Que esto sería así resultaba ya previsible a fines del XIX, como consecuencia, entre otras cosas, de los esfuerzos de rigorización que se habían llevado a cabo bajo la consigna de la llamada *aritmetización* del análisis. En el II Congreso Internacional de Matemática (París, 1900), Poincaré afirmaba que se había logrado el rigor absoluto, y que a través de la aritmetización la matemática pura había sido reducida a números naturales y conjuntos infinitos[1]. La obra monumental de Bourbaki, con su efecto orientador y uniformizador del trabajo matemático en el período 1950—1980, fue una clara expresión de esa tendencia a un nivel más sofisticado. En el Congreso de la "Association for Symbolic Logic" de 1948 decía Bourbaki:

> como todos sabemos, todas las teorías matemáticas pueden ser consideradas como extensiones de la teoría general de conjuntos. [Bourbaki 1949, 7]

Este principio se concretaba en la presentación de un sistema formal de teoría de conjuntos como fundamento para la matemática del investigador en activo, y en la idea reguladora de las "estructuras madres" — algebraicas, topológicas y de orden— como elementos matrices de todo sistema matemático importante [Bourbaki 1950].

El desarrollo de la teoría de conjuntos ha sido bien estudiado, particularmente en conexión con la obra pionera y sumamente original de Cantor[2]. Pero esto no quiere decir que se conozca bien la historia del enfoque conjuntista de la matemática. Quien piense lo contrario estará identificando exclusivamente, como suele ser habitual, la noción de conjunto con la teoría de conjuntos cantoriana. Al menos desde el punto de vista histórico, esto supone una confusión: sin duda, la obra de Cantor está en el origen de la teoría de conjuntos *en cuanto rama autónoma e independiente de la matemática* (o de la lógica matemática); pero esto no quiere decir que haya originado *también* la orientación conjuntista de la matemática, la utilización del lenguaje conjuntista como elemento clave para una reformulación moderna y abstracta del álgebra, el análisis, etc. El hecho es que varias propuestas de reorientación conjuntista tuvieron lugar *antes* de que Cantor comenzara sus trabajos pioneros. Dado que el desarrollo

[1] El trabajo se recoge, abreviado, en [Poincaré 1903]

[2] Puede consultarse [Dauben 1979] y [Hallett 1984], o en alemán [Meschkowski 1967] y [Purkert y Ilgauds 1987]. En castellano, [Grattan-Guinness 1980] o [Ferreirós 1993]

del enfoque conjuntista afecta a toda la matemática moderna, esta cuestión tiene en principio mayor relevancia para el matemático en activo que la historia —sin duda interesantísima— de los trabajos de Cantor y sus seguidores. Valga esto como justificación de que dediquemos las siguientes páginas, no al gran matemático de Halle, sino al enfoque conjuntista.

Desde la perspectiva más al uso, la noción de conjunto habría surgido exactamente en la forma que muestran los trabajos de Cantor. Sus raíces estarían en el análisis real, en la teoría de series trigonométricas y concretamente en la cuestión de la representación de funciones discontinuas mediante series de Fourier, que llevó a Cantor a comenzar un estudio detallado de los conjuntos de puntos de discontinuidad. El genial descubrimiento, en diciembre de 1873, de que el conjunto de los reales no es numerable llevó a Cantor a formular la noción de cardinalidad de un conjunto infinito, y le orientó a la investigación de problemas de teoría de conjuntos pura. En su trabajo, desarrollado hasta 1897, se fueron acuñando otras importantes nociones como la de conjunto bien ordenado, número transfinito, varias ideas clave de la teoría de conjuntos de puntos, etc. Declaraciones como la que hizo Poincaré en 1900 parecerían ser simplemente una consecuencia de los trabajos pioneros de Cantor. La aplicación exitosa de la noción de conjunto en campos distintos del análisis habría sido un desarrollo ulterior, de principios del XX, un gran éxito *a posteriori* del cantorismo [Meschkowski 1967].

Como el lector habrá sospechado, voy a presentar aquíuna alternativa bastante radical a la perspectiva que acabo de esbozar[3]. Como ya he dicho, si queremos entender mejor el desarrollo real, conviene establecer una distinción entre la teoría de conjuntos cantoriana y el enfoque conjuntista, distinción que es muy útil a la hora de entender los acontecimientos que se sucedieron en la segunda mitad del XIX. Esta es la época en la que nos centraremos principalmente, ya que es entonces cuando surge y se difunde el enfoque conjuntista. Se podría haber hablado con más calma de su desarrollo en el siglo XX, pero se puede afirmar que, tras la década de 1900, se trataba ya de la perspectiva dominante. Hermann Weyl, quizá el más importante discípulo de Hilbert, escribió que en su época de estudiante (la década mencionada) había sido "confinado por tradición" en el modo de pensar conjuntista y abstracto, "que hoy ha alcanzado dominio ilimitado en matematicas"[4]. Por este motivo me ha parecido más interesante centrarme en analizar las razones de ese dominio, así como los obstáculos que encontró.

1.Los orígenes: 1854—1872.

Retrospectivamente, y desde el punto de vista de la emergencia del enfoque conjuntista de las diversas ramas de la matemática, el quinquenio 1868—1872 se antoja una etapa de hiperactividad. Las principales contribuciones que hay que reseñar son obra de matemáticos alemanes, lo que probablemente se debe al peculiar ambiente intelectual que se vivía en aquella zona, sobre todo a la orientación generalizada hacia una matemática pura[5]. Y entre esos matemáticos destacan, por la impronta que dejaron, tres: Riemann, Dedekind y Cantor.

Cronológicamente, la primera contribución es la de Riemann, a través de los trabajos que realizó para su habilitación como profesor (*Privatdozent*) en 1854, trabajos que fueron publicados por su amigo Dedekind en 1868. Estos inéditos de Riemann, publicados dos años después de su muerte, provocaron inmediatamente reacciones en el mundo matemático. En la famosa lección "Sobre las hipótesis en que se basa la

[3]Las ideas expuestas a continuación se discuten ya en [Ferreirós 1993], y sobre todo en [Ferreirós, en prensa]. Remito a estas obras para mayores detalles y justificación de lo expuesto

[4][Weyl 1918], 35-36. Weyl había reaccionado frente a esa tradición dominante y proponía en la obra un interesante envoque constructivo (en particular, predicativista) del análisis y la matemática.

[5]Quede para otra ocasión la cuestión de los orígenes de la matemática pura, y de por qué el purismo fue habitual ente los universitarios alemanes. Es un tema complejo, sobre el que puede leerse algo en [Ferreirós, en prensa, cap. 1]

geometría", que inspiró a Helmholtz y Klein, Riemann no se limita a hablar de geometría, sino que esboza también algo así como un marco general para la matemática y en particular para la naciente topología. En este contexto presenta la noción de *variedad* [Riemann 1868b]. En Riemann, esta palabra todavía no tiene el sentido muy técnico que adquirió a principios del siglo XX; la definición que dio es algo oscura (ver sección 2), pero el caso es que admitía tanto variedades discretas, que relacionaba con los números naturales, como variedades continuas. Las variedades continuas, según Riemann, pueden estudiarse desde un punto de vista métrico, introduciendo los números reales, pero también desde el punto de vista del *analysis situs* (esto es, topológico). Dando un paso más, Riemann presentaba en forma intuitiva la noción de dimensión de una variedad continua, y también admitía que las variedades continuas son "en general" diferenciables. Por supuesto, este último paso esconde una falta de rigor que no podía escaparse al propio Riemann, quien en sus lecciones dio ejemplos de funciones continuas no diferenciables. Pero esos razonamientos llamados "generales" eran habituales en su tiempo, y sin duda permitían avanzar rápidamente sin tropezar en graves dificultades técnicas. En este caso, Riemann pasaba a esbozar sofisticadas teorías de geometría diferencial, gracias a las cuales analizaba la noción de espacio geométrico y espacio físico con una sofisticación sin precedentes.

?'Cómo llegó Riemann a la idea de variedad, es decir, de conjunto? De acuerdo con algunos manuscritos que han sido publicados por Scholz, parece ser que fue antes de haber captado la posibilidad de imponer distintas métricas a una misma variedad continua (con sus consecuencias para la geometría diferencial). Riemann había esbozado una nueva aproximación a la teoría de funciones en su tesis doctoral de 1851, donde desarrollaba de forma muy original la idea del plano complejo, introduciendo la noción de *superficie de Riemann.* Esto resultaba muy útil para analizar de forma abstracta las propiedades de las funciones complejas multivaluadas: propiedades tales como los puntos de ramificación y el número de ramas quedaban recogidas al definir la superficie de Riemann correspondiente; un estudio topológico de la superficie llevaba al primer número de Betti, de nuevo relacionado con importantes resultados de teoría de funciones, en especial el teorema de Riemann—Roch. Todo esto resultaba muy satisfactorio para Riemann, que estaba radicalmente a favor de un enfoque conceptual de la matemática: mucho mejor, en su opinión, introducir el concepto de superficie de Riemann que estudiar las funciones complejas a través de representación mediante series, al estilo de Weierstrass (ver sección 3).

Sin embargo, ese modo de trabajar en teoría de funciones contradecía la tendencia a la aritmetización, defendida entre otros por el maestro de Riemann, Dirichlet. En cierto modo, parecería que la teoría de funciones pasaba a depender de nociones geométricas; pero además, las superficies de Riemann no son constructos del espacio tridimensional, sino en general n-dimensionales, idea revolucionaria para la época. En suma, la teoría de funciones riemanniana presentaba graves dificultades fundacionales. Reflexionando sobre este tema en los manuscritos publicados por Scholz, Riemann llegaba a la conclusión de que las superficies de Riemann no son más que variedades continuas. Y las variedades o conjuntos no son algo de carácter propiamente geométrico, sino muy generales e incluso esenciales para toda la matemática. Los conjuntos pueden ser discretos o continuos, en cuyo caso podrán analizarse sus propiedades topológicas, o sus propiedades métricas introduciendo una unidad de medida y empleando los reales. Más aún, somos libres de considerar variedades de cualquier número de dimensiones, incluso de infinitas dimensiones [Riemann 1868b]. De acuerdo con esto, una vez que concebimos la matemática desde un punto de vista conjuntista, la teoría riemanniana de funciones resulta aceptable, y la introducción de las superficies de Riemann no supone recurrir a la geometría, sino a la noción básica de conjunto.

Estas ideas de Riemann quedaron plasmadas a un nivel intuitivo, que no iba mucho más allá del simple esbozo que acabo de ofrecer. Pero, en el desarrollo histórico de un campo nuevo, una simple sugerencia puede ser tan eficaz como un teorema bien demostrado. El propio Cantor llegó a escribir que "en matemática, el arte de proponer cuestiones es más importante que el de resolverlas" [1932]. Tanto Dedekind como

Cantor hicieron contribuciones relacionadas con las ideas topológicas de Riemann, tratando de fundamentar y clarificar las nociones de continuidad y dimensión que éste había presupuesto. Y aún más, de 1878 a 1892 Cantor llamará al tema que le ocupaba "teoría de variedades"; el hecho de que emplee la misma terminología que Riemann no es casual (sección 2).

En cuanto al otro trabajo de Riemann publicado en 1868, es la conocida tesis sobre series trigonométricas donde se presenta su concepción de la integral, y estimuló un fuerte desarrollo de la teoría de funciones reales, en particular el estudio serio, por vez primera, de funciones discontinuas. Fue solo al ampliar Riemann la noción de integral que adquirió sentido la investigación de tales funciones, y fue dentro de este marco donde se encuadraron los primeros trabajos famosos de Cantor que le llevaron a la teoría de conjuntos de puntos (ver más abajo).

Un último punto que conviene resaltar aquíes la preferencia de Riemann por una matemática conceptual, lo que le hizo avanzar en la dirección de la matemática abstracta del siglo XX. En su obituario de Jacobi, Dirichlet resumió esa orientación en una fórmula al decir que la tendencia dominante en análisis era "reemplazar los cálculos por pensamientos"[6]. Riemann fue un partidario apasionado de ese enfoque, y lo llevó mucho más lejos que sus predecesores. Ya lo hemos visto al compararlo con Weierstrass: opinaba que siempre es preferible estudiar las funciones a través de nociones generales abstractas, y no a través de formas de representación. Dedekind, que compartió esa preferencia metodológica, puso siempre como modelo de enfoque conceptual la teoría de funciones de Riemann, y dijo que su teoría de ideales aspiraba a asemejarse a dicho modelo (ver más detalles sobre el tema en la sección 3). Así pues, diversos aspectos de la obra de Riemann tuvieron una influencia constatable tanto en Cantor como en Dedekind, de modo que aquel genial matemático parece haber sido un inspirador clave de la reorientación conjuntista y abstracta.

Pasemos a Dedekind. En 1871 publica, en un apéndice a las lecciones sobre teoría de números de su maestro Dirichlet, su teoría de los números algebraicos, también llamada teoría de ideales. Aquíse presenta de forma brusca una reorientación del trabajo en este campo que acabaría afectando al álgebra en general: en lugar de trabajar directamente sobre los números algebraicos y sus propiedades, Dedekind reformula toda la cuestión en términos de conjuntos de números. Así, comienza presentando la noción de *cuerpo*, habla también de anillos de enteros[7], de *módulos* y de *ideales*. Estas nociones, junto con la de grupo que ya había sido acuñada por Galois y Jordan, pasarán a formar la base del álgebra moderna[8]. De acuerdo con Dedekind, un ideal es un conjunto de enteros que es cerrado para las operaciones de suma y diferencia (es un módulo) y también para el producto de sus elementos por enteros del cuerpo correspondiente. El problema básico de la factorización de enteros algebraicos queda resuelto por Dedekind definiendo las nociones de producto de ideales e ideal primo, y demostrando que, dado un cuerpo cualquiera K de números algebraicos, todo ideal admite una única descomposición como producto de ideales primos.

Al plantear las cosas de ese modo, Dedekind prefirió un enfoque conjuntista, pese a que no era en absoluto habitual entre sus contemporáneos ni siquiera en álgebra. ?Cómo llegó a esta reformulación? Para responder a ello, debemos retrotraernos a los años 1850, cuando Dedekind asiste a las clases de Riemann y realiza sus primeros trabajos originales en álgebra, y sobre los fundamentos de la aritmética. En lecciones sobre álgebra que imparte en Göttingen, Dedekind presenta la teoría de Galois en una versión muy moderna, analizando las interacciones entre (lo que hoy llamamos) los subcuerpos del cuerpo de descomposición y los subgrupos del grupo de Galois de un polinomio. Aquíes original y moderna la idea de que la teoría tiene que ver

---

[6] [Dirichlet 1889/97], vol. 2, 245.

[7] A los que no llamó con esa palabra (que se debe a Hilbert), sino con el término *órdenes* desde 1876.

[8] Hay que decir que normalmente Dedekind las utiliza sólo en el contexto concreto de los números complejos. La gran excepción es el trabajo sobre funciones algebraicas [Dedekind y Weber 1882], del que hablamos más adelante.

esencialmente con extensiones de cuerpos. A consecuencia de ello, Dedekind llega a considerar la noción de cuerpo como básica para el álgebra, y así la presenta en [1871]. En los años 1850, este autor realiza también algunos estudios sobre teoría abstracta de grupos, manejando las nociones de isomorfismo y homomorfismo, e incluso trabaja con clases infinitas de polinomios. Así se familiariza con el lenguaje conjuntista en el contexto del álgebra, y también en el de los fundamentos de la aritmética: su conocida definición de los números reales mediante cortaduras (que no son sino clases infinitas de racionales, con una cierta estructura de orden) es de 1858, aunque sólo se publicó en [1872].

De todos modos, a estas alturas Dedekind todavía no había visto la conveniencia de utilizar ideas conjuntistas en la teoría de números algebraicos. Eso sí, la familiaridad con la noción de cuerpo le había permitido dar con la noción adecuada de entero algebraico, sin la cual no había forma de resolver satisfactoriamente el problema de la factorización. Pero un primer intento de hacerlo pasaba por el empleo de medios que Dedekind calificaría luego de "formales" (congruencias "superiores" relacionadas con ciertos polinomios). El caso es que no pudo encontrar una solución perfectamente general de este modo, y que tal enfoque contradecía su predilección por una aproximación conceptual a los problemas matemáticos. Hacia 1870 se dio cuenta de que introduciendo conjuntos de números —la noción de ideal— era posible dar una solución general, y además evitar el tener que considerar polinomios y congruencias. Todo podía hacerse en términos de números y conjuntos de números, es decir, como dirá Dedekind, de una forma "puramente aritmética". Así, por razones matemáticas y metodológicas, la teoría se reformula en términos conjuntistas.

A partir de entonces, Dedekind será un convencido defensor del empleo del lenguaje conjuntista en matemática pura: toda su vida trabajó en sistematizar y reformular las nociones clave de la aritmética, el álgebra y el análisis desde esa perspectiva. En 1872 publica su teoría de los números reales, que permite establecer los fundamentos del análisis sobre la base de una teoría de conjuntos y aplicaciones. Desde ese año trabaja en una definición similar de los números naturales, que saldrá a la luz en su libro de [1888], sin duda importante en la historia de la rigorización, la matemática abstracta, y la teoría de conjuntos. Dedekind elaboró las definiciones conjuntistas habituales de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, y conoció la de $\mathbb{C}$, que se debe a Hamilton. En álgebra empleó conjuntos de números o de polinomios, con ciertas estructuras bien definidas, como nociones básicas. Y escribió que también el análisis se basa en la teoría de conjuntos y aplicaciones; es fácil imaginar que concibió las funciones del análisis como aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ (adaptando así una idea favorita de sus maestros Dirichlet y Riemann, la noción abstracta de función). En años posteriores siguió perfeccionando su teoría de ideales, y en la última versión (1894) incluyó una discusión detallada de la teoría de Galois presentada en términos del grupo de automorfismos del cuerpo de descomposición. De esta forma, en cierto modo, cerró el círculo de sus reflexiones sobre las relaciones íntimas entre álgebra, teoría de números y conjuntos.

He mencionado que Dedekind publicó su teoría de los reales en 1872. Este fue, de hecho, el año en que se dieron a conocer todas las principales definiciones de los reales, incluyendo la de Weierstrass y la de Cantor[9]. Estas definiciones difieren entre sí: Weierstrass define los reales como series convergentes de racionales, Cantor los define como sucesiones de Cauchy sobre $\mathbb{Q}$, Dedekind como cortaduras en $\mathbb{Q}$. Pero en todos los casos se trata de constructos complejos e infinitarios que se introducen sobre la base del conjunto de los números racionales. La rigorización del análisis había llevado, con Cauchy, al empleo de límites y desigualdades como base, y a una definición abstracta de conceptos como el de función continua. Pero aún con esto no era posible demostrar todos los teoremas básicos, por ejemplo el teorema del valor intermedio para funciones continuas o la existencia de un límite para toda sucesión monótona creciente y acotada. Para ello hacía falta una definición rigurosa de los reales, que estableciera con solidez la propiedad fundamental de "continuidad", según se decía entonces, o *completitud* de $\mathbb{R}$. Este fue el mérito de los tres grandes matemáticos alemanes, cuyas

[9]La excepción es la teoría de Mèray, similar a la de Cantor, y publicada en francés en 1869.

teorías pueden verse, retrospectivamente al menos, como dependientes de la noción de conjunto, o de nociones más complejas que sólo pueden explicarse sobre la idea de conjunto infinito.

Cantor presentó su teoría de los reales al hilo de un artículo en el que generalizaba un resultado previo, suyo y de Heine, sobre la unicidad de representación de funciones reales mediante series trigonométricas. Pero lo más importante de este artículo, desde el punto de vista del desarrollo de la teoría de conjuntos, es que presentaba ideas sobre topología de conjuntos de puntos y en particular la noción de *conjunto derivado*. Como ya he dicho, el estudio de funciones discontinuas en análisis fue hecho posible por la nueva definición de integral propuesta por Riemann en 1854 y publicada en 1868. El propio Riemann mostró que existen funciones discontinuas que, según esta definición, son integrables, y fue así como algunos matemáticos (Hankel, du Bois-Reymond, Heine, Cantor) empezaron a estudiar en serio las funciones discontinuas. Cantor demostró en 1870 que si una serie trigonométrica converge a una función continua en un intervalo dado, entonces la serie es única. En 1871 probó que lo mismo sucede aún en el caso de que la función representada sea discontinua, o la serie no converja, en una cantidad finita de puntos dentro del intervalo. Siguiendo con esta línea de generalización, en 1872 demostró que el resultado de unicidad podía demostrarse aún en el caso de infinitos puntos excepcionales, siempre y cuando se cumplieran ciertas condiciones que describía recurriendo a los conjuntos derivados.

Sea P el conjunto de puntos del intervalo $[a, b]$ en los que la serie no converge, o la función es discontinua. Si P es infinito, existirán puntos de acumulación en $[a, b]$, de acuerdo con resultados que Weierstrass exponía en sus clases. Cantor [1872] llama *primer conjunto derivado de* P al conjunto de *todos* los puntos de acumulación de P, y lo denota P'. En general, P' será de nuevo un conjunto infinito, y análogamente podemos definir P^n como el conjunto de todos los puntos de acumulación de P^{n-1}. Llegados aquí, se pueden distinguir dos casos: que P^n exista para todo n, y entonces diremos que P es un conjunto de *segunda especie*; o que deje de existir para algún n, en cuyo caso decimos que P es de *primera especie*. Cantor demostraba, empleando un razonamiento inductivo, que si el conjunto de puntos excepcionales P es de primera especie, entonces la serie trigonométrica que representa a la función en cuestión es única. Estas nociones son las primeras que aparecen en la teoría de conjuntos de puntos, con la excepción de la simple idea de *densidad*, indicada por Dirichlet y definida con cuidado por Hankel. El nivel de sofisticación alcanzado por Cantor en su análisis de los conjuntos de puntos es muy notable, y tardó casi una década en ser superado. La noción de conjunto derivado continuaría desempeñando un papel de importancia en teoría de la integración y teoría de funciones, durante las siguientes décadas.

De esta manera, en los cinco años que siguieron a 1868 los lectores de libros y revistas matemáticas alemanes comenzaron a toparse con lenguaje conjuntista aplicado a campos tan diversos como la geometría, el análisis, la teoría de funciones reales, el álgebra y la teoría de números. En particular, a la vista de las definiciones de $\mathbb{R}$, la noción de conjunto parecía necesaria para sentar las bases de la aritmética, y hay que recordar que en Alemania era habitual la idea de que la matemática pura es aritmética desarrollada. Este era, ni más ni menos, el principio director de la tendencia aritmetizadora, y el propio Gauss había escrito que Dios aritmetiza siempre. No es de extrañar que un lector inteligente, como sin duda lo era Cantor, percibiera las grandes posibilidades inherentes a la noción de conjunto y comenzase a interesarse por una posible teoría de conjuntos.

Sin embargo, el pistoletazo que dio pie al desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana vino solo en 1873, cuando Cantor se plantea una pregunta genial y le da una respuesta sorprendente. La pregunta era: ?es posible correlacionar biunívocamente los números reales y los naturales?, o en otros términos ?hay la misma cantidad de números en $\mathbb{N}$ y en $\mathbb{R}$? La respuesta, establecida en 1873 sobre la base de la completitud de $\mathbb{R}$, resultó ser no, y con ella adquirió sentido la noción de cardinalidad de un conjunto infinito, ya que se había probado que existen conjuntos infinitos de diferentes "tamaños". Por otro lado, en conexión con la noción de conjunto derivado, Cantor comenzó en los años 1870 a pensar en la posibilidad de considerar derivados "de orden infinito", P^{∞}, $P^{\infty+1}$, etc., y con ellos empezó a jugar con símbolos que acabarían convirtiéndose en los números ordinales transfinitos. Tanto las cardinalidades infinitas como los ordinales transfinitos desempeñarían un papel importante en la matemática posterior[10]. Pero no vamos a seguir esta línea de desarrollo, que como ya he dicho está bien estudiada. Continuaremos preguntándonos por el surgimiento y la difusión del enfoque conjuntista; y antes de seguir adelante, conviene volver a Riemann y sus ideas seminales.

2. El principio de comprehensión y las antinomias

La mayoría de los matemáticos que emplearon la noción de conjunto, en las etapas iniciales de su desarrollo, la basaron de modo más o menos explícito en el *principio de comprehensión.* Este afirma que a todo concepto o propiedad le corresponde la clase o conjunto de los objetos que caen bajo el concepto: al concepto de número, la clase de todos los números; al concepto de función real, la clase de todas las funciones reales. La idea se encuentra por ejemplo en Bolzano[11], autor que presentó ideas muy importantes, pero al que no presto atención aquíya que su obra no tuvo repercusión directa (sólo fue conocida por autores como Cantor o Dedekind en los años 1880, cuando ya era demasiado tarde para que les aportara novedades). Se encuentra también en diversas contribuciones de Dedekind, e incluso parece implícita en los trabajos realizados por Cantor hasta 1882, por más que el más famoso formulador del principio de comprehensión fuera el lógico Frege [1893]. Asimismo, el principio de comprehensión nos da la clave para entender la definición de variedad que acuñó Riemann en 1854.

En la primera sección de su lección sobre geometría, Riemann [1868b, 273] escribe que sólo tiene sentido introducir nociones de magnitud en el caso de nos venga dado un concepto general antecedente, que admita diferentes determinaciones particulares. Estas determinaciones forman una variedad [Mannigfaltigkeit] que puede ser discreta o continua; en el primer caso, Riemann las llama elementos de la variedad, en el otro puntos de la variedad continua. Por ejemplo, tomemos el concepto de color: los diferentes tonos de azul o amarillo son puntos de una variedad continua; lo mismo sucede si realizamos mediciones sobre un sistema físico empleando dos variables continuas (digamos temperatura y peso). Por otro lado, la mayoría de los conceptos de la experiencia común dan lugar a variedades discretas.

A propósito de esa definición de Riemann, conviene recordar que hasta 1850 era habitual definir la matemática como ciencia de las magnitudes, y decir que las magnitudes pueden ser discretas o continuas. Esta concepción se encuentra ya en Aristóteles, e irónicamente perdura hoy en algunos diccionarios. Riemann propone que sólo se puede hablar de magnitudes, es decir, sólo se puede introducir nociones matemáticas, cuando está dada una variedad o conjunto, determinada (por comprehensión) a través de un concepto. Por lo demás, Riemann afirma que la teoría general de las variedades continuas no debe ocuparse sólo de consideraciones métricas, sino que debe incluir también una parte autónoma a la que cabe llamar *analysis situs* (topología) [1868b, 274]. Ya vemos que sus propuestas no se limitan a continuar las perspectivas tradicionales, sino que las alteran radicalmente en una dirección moderna. Para el lector actual, lo más conveniente es olvidarse de que Riemann emplea aún el término "magnitud", y recordar sólo que propone las variedades o conjuntos como base para la matemática pura.

El enfoque de la noción de conjunto a través del principio de comprehensión es, exactamente, lo que suele denominarse *teoría ingenua de conjuntos.* Esta teoría se

[10] Los ordinales, por ejemplo, en teoría de conjuntos de puntos, integración y teoría de funciones, así como en el álgebra de los años 1920, aunque luego serían evitados por recurso al lema de Zorn (1935).

[11] [Bolzano 1851], 2-4.

asocia a veces con Cantor, lo que no es del todo exacto[12]; debe asociarse sobre todo con Russell, que fue quien le dio una formulación madura y muy explícita en su *The Principles of Mathematics* [1903]. Quizá algún lector se sorprenda de que esa idea pueda encontrarse ya en Riemann y Bolzano, pero esto tiene una explicación sencilla. Tradicionalmente, los manuales de lógica incluían la distinción entre la *extensión* (o clase asociada) y la *comprehensión* (o intensión) de un concepto. Esta distinción aparece ya en los típicos tratados del siglo XVII, y de hecho era esencial en la Edad Media. En ella se basó Euler cuando, en sus *Cartas a una princesa alemana* (1770), introdujo el empleo de diagramas para representar las relaciones lógicas entre conceptos a través de sus extensiones o clases asociadas.

Cuando la noción de conjunto comenzó a resultar útil en matemática, muchos acudieron a esas conocidas ideas de la lógica para clarificarla. Después de todo, siempre se había considerado que la matemática tiene una relación especial con el pensamiento puro, y la lógica se concebía como ciencia de las leyes del pensamiento. El propio Leibniz había defendido que las verdades matemáticas no eran sino verdades de razón, que se pueden reducir a principios lógicos elementales a través de simples definiciones[13]. Esta perspectiva pareció quedar vindicada cuando la noción (lógica, se pensaba entonces) de conjunto pasó a ocupar un papel fundamental en matemática. Fue así como surgió el *logicismo*, acompañando de manera natural el ascenso del enfoque conjuntista en matemática. Pero esta manera de ver las cosas forzó, a la vez, que la vieja idea de los lógicos se transmutara en un ambicioso principio general que resultó ser demasiado potente: contradictorio.

Hemos llegado a la conclusión de que Riemann propuso la noción ingenua de conjunto, bajo el nombre de *variedad*, y sugirió que esa noción es el concepto clave en que se basa la matemática. Que usara la palabra “variedad”, y no “conjunto”, tampoco debe sorprendernos: mientras la palabra inglesa “ set” o la francesa “ensemble” parecen las más apropiadas para indicar la noción de conjunto, el alemán no sugería un término privilegiado. Algunos hablaban de “Inbegriff” [colección], otros de “Klasse”, otros de “System”, otros de “Umfang” [extensión], otros en fin de “Menge”, la palabra que triunfó finalmente. Tanto Dedekind (en 1876) como Cantor (en 1885) consideraron “ensemble” como la traducción francesa correcta de sus términos preferidos en alemán, “System” en el primer caso, “Mannigfaltigkeit” [variedad] en el segundo.

Y con esto llegamos a Cantor, quien designó la teoría de conjuntos, de 1878 a 1892, como “teoría de variedades” [Mannigfaltigkeitslehre]. Con lo que llevamos dicho, no parece casual que emplease el mismo término que Riemann. Esta idea se confirma al considerar el primer artículo en que Cantor lo usó: se trata del trabajo en el que demuestra que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son equipotentes, es decir, tienen la misma cardinalidad. Cantor presenta la cuestión como motivo para dudar de la definición de dimensión que había dado Riemann en su lección sobre geometría, y que Helmholtz había asumido también[14]. La teoría de Cantor trata de elaborar y refinar las ideas seminales de Riemann, considerando los distintos conjuntos que aparecen en matemática. Para ello introduce ideas muy novedosas, como la de conjunto derivado, la de cardinalidad de un conjunto infinito, o la de número transfinito. Pero entre sus objetivos básicos sigue estando, como en Riemann, analizar conceptualmente las nociones clave de continuo y dimensión. No es casualidad que el problema clave que acabaría centrando la atención de Cantor fuera el problema del continuo: ?cuál es la cardinalidad de $\mathbb{R}$? ?cómo

[12] Se suele citar la definición de conjunto que dio Cantor en [1895] como prototitpo de enfoque ingenuo, cuando la intención del autor era precisamente distanciarse de los partidarios de este enfoque; véase [Pukert y Ilgauds 1987]. Pero hay que reconocer que el modo en que intentó llevar a la práctica esa intención era poco satisfactorio, ya que se basaba en puras distinciones verbales.

[13] Por ejemplo en los *Nuevos ensayos* [Leibniz 1704], libro IV, cap. 7.

[14] Riemann [1868b, 276] había dicho que una variedad tiene n dimensiones cuando se necesitan n variables para determnar la posición de un punto, pero Cantor [1878, 121] demostraba que en todo caso basta con una variable. Surgía el problema de caracterizar apropiadamente la idea de dimensión, y Dedekind conjeturó enseguida el teorema de invariancia de la dimensión bajo aplicaciones bicontinuas [Cantor y Dedekind 1937, 38]; lo probaría Boruwer en 1911.

puede "medirse"? Vemos que la contribución de Riemann, cuyo carácter meramente seminal hay que enfatizar, ofrece con todo una clave para captar interrelaciones entre los principales brotes conjuntistas en torno a 1870. Todas estas primeras iniciativas conjuntistas se realizan, de un modo u otro, a la sombra de sus contribuciones o de sus sugerencias.

Dedekind, amigo íntimo de Riemann, se convirtió en partidario radical de la aproximación conjuntista a la matemática pura, lo que llevó, de modo natural, a ser una de las primeras voces que hablaron en pro del logicismo (aparentemente fue el logicista más influyente hasta 1903, cuando Russell comenzó a dar a conocer la obra de Frege). También él había confiado en el principio de comprehensión, que incluso le sirvió de guía heurística al formular la teoría de ideales. Sólo las antinomias o contradicciones a que ese principio da lugar le hicieron albergar dudas, como a todos sus contemporáneos. Pero esto sucedería al final de su vida, en 1897 o 1899, cuando Cantor le expuso en detalle dos de las antinomias (las del conjunto de todos los cardinales y el de todos los ordinales transfinitos), pero sobre todo en 1903, al conocer la antinomia de Russell. Basta considerar el concepto de conjunto que no pertenece a sí mismo (la propiedad $x \notin x$) para ver que el principio de comprehensión es insostenible. Pues, según él, existiría el conjunto $R = \{x : x \notin x\}$, y es fácil ver que desembocamos en la contradicción siguiente: $R \in R$ si y solo si $R \notin R$. Con las contradicciones, el logicismo recibió un golpe mortal y comenzó a desaparecer de la escena, pese a todos los esfuerzos en contra del propio Russell[15].

Curiosamente, la práctica matemática podía sugerir otro modo de enfocar la noción de conjunto. Dado un conjunto infinito cualquiera, es posible definir un subconjunto isomorfo a $\mathbb{N}$ al modo de Dedekind; y dado $\mathbb{N}$, formando conjuntos (y conjuntos de conjuntos) de naturales, se llega a $\mathbb{R}$, a las funciones, a diversos conjuntos con estructuras. Subyacente a la práctica matemática de Cantor, Dedekind y alguno de sus contemporáneos, uno puede percibir la noción iterativa de conjunto, la idea de "conjunto de" elementos preexistentes. Pero esto, que es fácil ver retrospectivamente, sólo emergería como resultado de un largo y complicado proceso conceptual puesto en marcha por las antinomias, que duró unos 30 años[16]. Hay que señalar, además, que la noción iterativa en símisma es insuficiente para justificar los axiomas de la teoría de conjuntos. La noción de conjunto no es nada elemental ni simple; basta reflexionar sobre el hecho de que es equivalente a la noción de función (ya que ambas son interdefinibles) para comenzar a advertirlo[17].

3. El enfoque conjuntista y la matemática abstracta

Común a los esfuerzos de Riemann, Dedekind y Cantor es no sólo el empleo de la noción de conjunto y la noción abstracta de función, sino también una cierta orientación metodológica: la preferencia por un tratamiento abstracto de las teorías matemáticas. Se ha dicho que esa tendencia surgió con Gauss, Jacobi y Dirichlet (a los que deberíamos sumar a Cauchy), ya que iniciaron un estilo nuevo de argumentación en matemática. Evitando emplear largos y complicados cálculos, pusieron en práctica una brillante idea: la de abarcar toda un área de verdades matemáticas mediante una sola noción principal, y presentar los resultados clave directamente a partir de esa noción, de manera que uno puede captar la verdadera naturaleza de la teoría, la maquinaría esencial que pone todo en marcha[18]. De todas formas, el modo en que Riemann puso en práctica ese principio fue mucho más radical, dando un ejemplo que continuaron Dedekind y Cantor. Así, el enfoque conjuntista es solidario de

[15] El lector interesado en este tema puede consultar mi artículo [1997].

[16] La concepción iterativa fue propuesta por Gödel [1944] y [1964], aunque ya Zermelo [1930] había propuesto una visión similar del universo de la teoría de conjuntos.

[17] Sobre estos temas, más filosóficos, se puede leer con provecho [Hallett 1984] o [Lavine 1994]. Ambos libros revisan con bastante acierto la historia de la noción de conjunto.

[18] He parafraseado un pasaje de la autobiografía de Eisenstein, en [Wussing 1984], 270.

la tendencia abstracta que marca el camino hacia la matemática moderna, una tendencia a propósito de la cual se podría hablar de la tradición de Göttingen[19]. Esa interdependencia con el planteamiento abstracto permite entender mejor los éxitos del conjuntismo, pero también las críticas que encontró en su camino.

Antes que nada, trataré de aclarar un poco más en qué consiste la tendencia abstracta. Desde Euclides, la matemática había tenido que ver con construcciones realizables explícitamente, ya fueran construcciones geométricas o analíticas. Con la nueva tendencia se trata, como ya vimos, de la preferencia por los conceptos en lugar de las notaciones, las formas de representación o las construcciones. Lo que esto significa queda bastante claro comparando la teoría de números de Kronecker con la de Dedekind, o la teoría de funciones de Weierstrass con la de Riemann. Tomo el segundo ejemplo. El objetivo de Weierstrass en teoría de funciones era caracterizar clases de funciones a través de la posibilidad de representarlas analíticamente por medios bien establecidos. En este sentido, es característico su teorema sobre la representabilidad de las funciones continuas mediante series de polinomios (1885). Weierstrass indicó explícitamente que la idea de función arbitraria no le interesaba, ya que es totalmente vaga. No era un constructivista puro, al modo de Kronecker o Brouwer, ya que aceptaba la noción de número real, pero puede decirse que su tendencia era semi-constructiva.

La tendencia de Riemann es exactamente la contraria. No le interesa partir de medios de representación analítica, por útiles que sean en la práctica; tales medios deben encontrarse al final, como resultado de la elaboración de la teoría. En el principio debe estar un concepto abstracto bien definido. Weierstrass define las funciones analíticas como aquellas que son representables localmente mediante series de potencias; Riemann prefiere partir de una propiedad característica abstracta, en términos de diferenciabilidad: las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann. Weierstrass criticó este modo de proceder dando como razón que no era posible delimitar con precisión la clase de las funciones diferenciables. Y por supuesto, nociones abstractas como la de superficie de Riemann quedan mucho más allá de los límites concretos que Weierstrass se impone. Conviene decir, de paso, que el proceder de Riemann sólo quedaría bien explicitado y justificado al cabo de décadas, mientras que el otro enfoque era plenamente riguroso. Esto explica que, en su tiempo, las ideas de Riemann se consideraran misteriosas y visionarias, mientras que las de Weierstrass se ganaron las preferencias de la comunidad matemática.

El planteamiento de Riemann tuvo una influencia decisiva en Dedekind. Ejemplo claro de ello es que, en teoría de números algebraicos, prefiere introducir la noción abstracta de ideal en lugar de basarse en la consideración explícita de polinomios, como hacía Kronecker; y ello a pesar de que el enfoque de Kronecker permitía determinar explícitamente los factores ideales en cada caso concreto. Para Dedekind, las estructuras de cuerpo, ideal, etc. son perfectas a la hora de establecer conceptos básicos para sus teorías, dotados de suficiente generalidad y penetración. Una consecuencia inevitable de este modo de proceder abstracto es que surgían puros *teoremas de existencia*, que establecen la mera posibilidad de determinar cierto tipo de objetos matemáticos, sin dar ningún medio concreto para ello. Hilbert, que en este punto seguía a Dedekind, explotó este tipo de enfoque en sus primeros trabajos, dedicados a la teoría de invariantes algebraicos.

En conexión con esta cuestión de la tensión entre enfoques abstractos y constructivos, el caso de Cantor es particularmente instructivo, porque fue alumno de la escuela de Berlín pero poco a poco abandonó sus postulados. No hay espacio aquípara desarrollar el tema en detalle, pero quizá baste con dar un ejemplo. Cuando Cantor estableció que no es posible una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$, inmediatamente sacó la conclusión de que ambos conjuntos diferían en una cierta característica abstracta, lo que más tarde llamó potencia o cardinalidad. Pero se trataba de una conclusión atrevida, por suponer un enfoque totalmente abstracto y además aceptar el infinito actual. Era el tipo de conclusión que hubieran admitido Riemann o Dede-

[19]Establecida por Gauss, Dirichlet, Riemann y Dedekind, sería proseguida por Klein, por Hilbert, Emmy NOether y por los muchos alumnos de estos matemáticos, todos ellos profesores de Göttingen.

kind, pero no los maestros de Berlín (de hecho, Weierstrass recomendó a Cantor que evitara comentarios al respecto). Con el ánimo de presentar su resultado de un modo aceptable para los berlineses, Cantor lo reformuló de una manera muy inteligente. Demostraba primero que el conjunto de los números reales algebraicos es numerable, siguiendo un método de Dedekind; luego establecía que, dada una sucesión cualquiera de números reales, en todo intervalo de la recta real existen puntos que no pertenecen a la sucesión. Asíllegaba al resultado de que en todo intervalo de $\mathbb{R}$ existen números trascendentes, una nueva demostración del teorema de Liouville. De hecho, tal como Cantor presentó las cosas en su artículo, el teorema de no-numerabilidad era sólo un añadido para obtener el corolario a partir del teorema principal de numerabilidad de los reales algebraicos[20]. Asífue como el artículo se publicó con el sorprendente título "Sobre una propiedad de la colección de todos los números reales algebraicos" [1874], !donde el teorema de no-numerabilidad, que hoy tanto admiramos, ni siquiera se menciona!

Andando los años, Cantor se fue liberando de sus ataduras a las concepciones berlinesas, y fue presentando sus ideas de un modo cada vez más abstracto. En [1883] llegó a escribir un inspirado alegato en favor de la libre introducción de nociones abstractas en matemática, diciendo que un nuevo concepto es admisible siempre que (1) armonice bien con las nociones y teorías previamente admitidas, (2) no dé lugar a contradicción, y (3) resulte ser fructífero. A propósito de esta cuestión, criticaba e incluso ridiculizaba un tanto las ideas constructivistas de su antiguo maestro Kronecker. Fue a partir de esta época cuando surgió la famosa confrontación entre ambos, que de todos modos se ha contado de una manera algo sesgada, y exagerando las consecuencias que tuvo para Cantor[21]. Ya en los años 1870 Kronecker había afirmado que el teorema de Bolzano—Weierstrass es un obvio sofisma (lo que es coherente con una posición constructivista) y se había opuesto al modo en que Dedekind trabajaba en teoría de números algebraicos.

La tensión entre un planteamiento de definición o construcción explícita y uno de análisis abstracto explica las dificultades que encontró el enfoque conjuntista en su implantación progresiva. Ya la noción de función propuesta por Dirichlet y Riemann avanzaba claramente en la dirección abstracta, pero puede decirse que la teoría de conjuntos se convirtió en epítome del planteamiento abstracto. El ejemplo más característico de ello es el axioma de elección introducido por Zermelo [1904], que, dada una familia infinita cualquiera de conjuntos, postula la mera existencia de cierto tipo de conjunto. El axioma se usa de modo esencial precisamente cuando no hay ningún medio de especificar o definir explícitamente este tipo de conjuntos de elección. Así, el teorema de buen orden [Zermelo 1904], o el que establece que hay una extensión algebraicamente cerrada para todo cuerpo conmutativo (Steinitz, 1910), son teoremas de pura existencia. Sabemos que el axioma de elección implica que $\mathbb{R}$ puede ser bien ordenado, pero no tenemos ni idea de cómo definir un tal buen orden (si lo supiéramos, seguramente habríamos resuelto el problema del continuo[22]).

Polémicas y dificultades aparte, el enfoque conjuntista continuó dando muy buenos frutos en las distintas ramas de la matemática. Ya la noción cantoriana de conjunto derivado había sido utilizada por varios analistas desde la publicación de un libro del italiano Dini en 1878. Las nuevas nociones sobre topología de conjuntos de puntos fueron empleadas por Poincaré a mediados de los años 1880, en sus famosos trabajos sobre funciones automorfas, y sirvieron para la elaboración gradual de la teoría de la medida. Más aún, en 1884 Mittag-Leffler empleó nociones cantorianas, incluyendo los números transfinitos, para demostrar su teorema sobre representación de funciones

[20] Weierstrass había demostrado muhco interés en este teorema "principas", ya que le permitía dar ejemplos sofisiticados de funciones reales no diferenciables.

[21] Una famosa leyenda dice que Cantor sufrió una enfermedad maníaco—depresiva a raíz de la oposición de Kronecker y la imposibilidad de demostrar la hipótesis del continuo. Historiadores que han estudiado bien el tema, como Grattan—Guiness, Purkert e Ilgauds, llegan a la concluisión de que la leyenda nose sostiene frente a la evidencia.

[22] Sobre este tema, ver la exhaustiva obra de Moore [1982].

analíticas, que generalizaba resultados de Weierstrass. Entretanto, en [1882] Dedekind y Weber generalizaban la teoría de ideales al caso de las funciones algebraicas, lo que constituyó un precedente crucial para la geometría algebraica[23]. Pero las ideas de Dedekind sólo se consolidaron definitivamente en los años 90, gracias a trabajos como el manual de álgebra de Weber y el famoso informe sobre teoría de números algebraicos (*Zahlbericht*) de Hilbert. En esta obra, Hilbert aludía explícitamente a Riemann al decir que había seguido el principio de sustituir los meros cálculos por pensamientos.

Para entonces, la teoría de conjuntos de puntos recibía el espaldarazo definitivo: Peano, Jordan y Borel la empleaban en sus textos de análisis, mientras dos matemáticos de primera fila, Hadamard y Hurwitz, la ensalzaban en sus conferencias estelares del I Congreso Internacional (1898). Y también en el campo de la geometría se hacían sentir los nuevos tiempos: las ideas del *Erlanger Programm* de Klein, publicado de nuevo en 1893, y las axiomatizaciones propuestas por miembros de la escuela de Peano y por Hilbert, se basaban todas ellas en una aproximación conjuntista. Los dos primeros problemas de Hilbert en su famosa conferencia "Mathematische Probleme" [1900] guardaban relación con la teoría de conjuntos: el primero era el problema del continuo, a propósito del cual Hilbert recordaba la necesidad de demostrar el teorema de buen orden; y el segundo era la consistencia de los axiomas de los números reales, es decir, demostrar que uno puede postular sin contradicción la existencia del conjunto $\mathbb{R}$ (y a propósito de ello, Hilbert indicaba que se debían dar demostraciones similares para los distintos cardinales transfinitos).

El gran avance del enfoque conjuntista fue acompañado por nuevas concepciones de los fundamentos de la matemática, como el logicismo, y estimuló la aparición de grandiosas sistematizaciones. Dedekind [1888] sugirió que toda la matemática pura (álgebra, análisis) puede reducirse a una teoría de conjuntos y aplicaciones, y demostró en detalle cómo hacerlo para el caso crucial de $\mathbb{N}$. El gran lógico Frege [1893] trabajaba independientemente en un proyecto equivalente, en el curso del cual forjó la noción de demostración formalizada e introdujo nociones básicas de la lógica moderna. El lenguaje de la lógica, incluyendo por supuesto la noción de conjunto, fue empleado por Peano y su escuela para la elaboración del célebre *Formulaire de mathématiques* (1895—1908) en el que pretendían traducir en fórmulas lógicas los principales resultados de la matemática. Y en la década de 1910 aparece la inmensa obra de Russell y Whitehead, *Principia mathematica* (1910—13), que pese a ciertos defectos despertó la admiración de Hilbert.

4. Epílogo

Por supuesto, todos sabemos que esa especie de luna de miel o situación paradisíaca que vivía la matemática hacia 1900 se vio enturbiada con la publicación de las contradicciones, paradojas o antinomias que Russell anunció a bombo y platillo[24]. Además y sobre todo, los 25 años que siguieron a 1903 (por fijar unas cifras) vieron una gran discusión en torno a la validez del enfoque abstracto, y por tanto del conjuntismo. El axioma de elección y sus consecuencias, la consistencia de una matemática abstracta y existencial al estilo "clásico" de Riemann, Dedekind y Cantor, así como las alternativas radicales propuestas por matemáticos constructivistas de primer orden como Brouwer y Weyl, fueron los temas principales de discusión.

Las principales posiciones se elaboraron en los años 1900 y 1910, aunque los medios técnicos para analizarlas y medir sus consecuencias se refinaron sobre todo en los 20. En el proceso se adquirió una comprensión mucho más profunda del alcance y los presupuestos de la matemática clásica: la admisión del infinito actual y el platonismo,

[23] Dedekind y Weber desarrollaban de modo riguroso y puramente algebraico una importante parte de la teoría de funciones de Riemann, proporcionando una nueva definición de superficie de Riemann y probando el teorema de Rienann-Roch.

[24] Las antinomias sólo afectan a la teoría "lógica" o "ingenua" de conjuntos, basada en el axioma de comprehensión. La historria de las antinomias, por cierto, se ha contado a menudo de una forma incorrecta; ver [Moore y Garciadiego 1982] [Garciadiego 1992].

el empleo del principio de tercio excluso aplicado a conjuntos infinitos, la asunción de axiomas como los de conjunto potencia, subconjuntos y elección. Asimismo se profundizó en las posibilidades de distintas versiones del constructivismo, y se adquirió una mejor comprensión de la teoría lógica y de la propia noción de demostración matemática. Pero al final, sin que la polémica quedara resuelta de manera completamente satisfactoria, se llegó por decisión mayoritaria al triunfo del conjuntismo. El enfoque abstracto, al estilo clásico, ofrece al matemático unas posibilidades teóricas, y por así decirlo una libertad de movimientos, a las que la mayoría no estaban dispuestos a renunciar por escrúpulos más o menos filosóficos.

La crisis fundacional no supuso en modo alguno una crisis de la matemática. Más bien al contrario, sucedió durante un período de expansión sin precedentes de teorías, métodos y resultados. Durante todo ese tiempo, Hilbert desempeñó un papel central como adalid del enfoque conjuntista abstracto, llegando a comprometer en la empresa toda su autoridad como investigador y líder de la comunidad matemática. Afortunadamente para él, ese enfoque siguió apuntándose triunfos como los del álgebra estructural (que tuvo una de sus focos clave en el Göttingen de Hilbert) y los de la topología en desarrollo (cultivada por las escuelas norteamericana, polaca y rusa). La noción de estructura surgió a lomos de todos esos avances en lógica y matemática pura, acabando por ser formulada por autores como Birkhoff, Tarski y los Bourbaki en los años 30[25]. Con Bourbaki, la nueva sistematización de la matemática recibió una forma muy acabada[26].

En su lucha contra los críticos del enfoque conjuntista abstracto, Hilbert no recurrió sólo al desarrollo de nuevos enfoque y teorías (como la célebre *Beweistheorie*), sino también al empleo de armas retóricas. En 1922 comparaba la supuesta revolución brouweriana con un intento de golpe de estado *la* Kronecker, que no podía sino fracasar. En 1925 pronunció sus célebres palabras:

> Queremos investigar cuidadosamente, siempre que exista la menor perspectiva de éxito, las
> .9.9 construcciones conceptuales y formas de inferencia fructíferas, y cultivarlas, afianzarlas y hacerlas susceptibles de aplicación. Del paraíso que Cantor nos creó, nadie podrá expulsarnos. [Hilbert 1926]

Aquí, como en otros textos, Cantor se convierte en representante simbólico de la matemática abstracta. Esto explica, en parte, cómo surgió la costumbre de asociar la noción de conjunto exclusivamente con Cantor. Estando en juego una nueva orientación científica, que se enfrentaba a poderosas críticas en una etapa de conflicto, no era el momento de entrar en disquisiciones sobre las complejidades de la historia. Mucho más útil era recurrir a un símbolo poderoso, un mito si queremos. Hilbert tenía a mano la peculiar y original figura de Cantor, que estaba siendo presentado como víctima del poderoso y doctrinario Kronecker[27], y podía pues ser empleada como una potente arma retórica contra los disidentes. Cantor y Kronecker en paralelismo con Hilbert y Brouwer: la libertad frente a la reacción, casi diríamos el bien frente al mal.

No es infrecuente que las comunidades científicas den lugar a mitos fundacionales, que a veces guardan incluso parecido con los mitos clásicos. El mito de Cantor y la teoría de conjuntos se modeló según el patrón del de Zeus y Atenea (la Minerva romana). La diosa de la sabiduría y la guerra nació ya adulta de la cabeza de Zeus, cubierta con toda su armadura, y fue su hija favorita; la teoría de conjuntos se presentó como la obra de un solo autor, quien amó tanto a su criatura que llegó a sufrir una enfermedad mental por ella. Mitos como este cumplen múltiples funciones: permiten resumir un desarrollo real complejo en una simple fórmula, particularmente útil para ser transmitida mediante libros de texto y clases; de ese modo, facilitan la identificación entre los miembros dedicados a un tema común, les otorgan algo así como una

---

[25] Sobre este tema puede verse el libro de Corry [1996].

[26] Pero las virtudes de una aproximación abstracta a los problemas matemáticos no implican que sea conveniente apostar por una matemática "arbitraria". De ahí provienen quizá las polémicas, más recientes, sobre el bourbakismo, y el renacimiento constante del interés por o definible.

[27] [Schoenflies 1927].

genealogía compartida reconocible; y, sobre todo, ayudan en etapas de conflicto, en momentos difíciles en los que una nueva rama de la ciencia o una nueva orientación encuentran duras críticas. Este fue de hecho el papel que Hilbert hizo desempeñar al mito de Cantor durante la famosa "crisis de fundamentos" de los años 20[28].

Para bien o para mal, como hemos visto, la historia real suele ser poco complaciente con los mitos hermosos; parece preferir caminos complejos llenos de vericuetos, para delicia de historiadores. Habrá quien piense que los que nos dedicamos a la historia tenemos tendencia a entretenernos demasiado en esas complejidades, pero espero que la narración anterior no haya resultado carente de interés, sino iluminadora.

Tabla cronológica

1854 Riemann escribe sobre geometría, presentando la noción de variedad, y sobre series trigonométricas (noción de integral).

1858 Dedekind da clases sobre teoría de Galois en términos de grupos abstractos y cuerpos de números, y establece su definición de los reales mediante cortaduras.

1868 Se publican los dos trabajos de Riemann, inéditos antes, que inmediatamente generan actividad en ambos campos.

1871 Dedekind publica su teoría de ideales, en la que aparece la teoría de números algebraicos moderna, y las nociones de cuerpo, anillo, módulo, ideal, homomorfismo, isomorfismo.

1872 Se publican las definiciones de los reales propuestas por Weierstrass (desde 1863), Dedekind (desde 1858) y Cantor (desde 1870). En un artículo sobre representación de funciones discontinuas mediante series trigonométricas, Cantor establece condiciones muy amplias gracias a la noción de conjunto derivado, clave para su trabajo sobre conjuntos de puntos.

1874 Cantor publica su demostración de la no numerabilidad de R, abriendo camino a la noción de cardinalidad que presentará en 1878.

1882 Dedekind y Weber extienden la teoría de ideales a cuerpos de funciones algebraicas.

1883 Cantor introduce la noción de conjunto bien ordenado y los ordinales transfinitos; nace así la teoría de conjuntos cantoriana. En esta época establece también resultados sobre conjuntos de puntos, incluyendo las nociones de conjunto perfecto, cerrado, aislado, denso en sí.

1884 Mittag—Leffler demuestra su teorema empleando ideas de Cantor. Poincaré las utiliza en su monumental obra sobre funciones automorfas. Varios matemáticos formulan la noción de contenido exterior de un conjunto, abordando sobre su base la teoría de integración.

1888 Dedekind presenta una teoría rigurosa de los naturales sobre la base de las nociones de conjunto y aplicación. Esta teoría guarda relación con la de Frege (1884) y con los conocidos axiomas de Peano (1889). A partir de ahora, se hace posible ver toda la matemática pura como el estudio de conjuntos con diversas estructuras.

1893 Se publica en forma accesible el Erlanger Programm de Klein, donde se presentan las geometrías como estudio de invariantes bajo grupos de transformaciones. Weber escribe sobre las nociones abstractas de grupo y cuerpo y su interrelación. En 1895, Weber difunde el enfoque conjuntista del álgebra en su célebre manual.

[28] Sobre la crisis y sus aspectos simbólicos, políticos y sociales, ver [Mehrtens 1990].

1897 Primer Congreso Internacional de Matemática: Hadamard y Hurwitz defienden la teoría de conjuntos en conexión con el análisis. Hilbert publica su célebre Zahlbericht sobre teoría de números algebraicos, donde emplea las nociones de cuerpo, anillo e ideal.

1898 Hilbert axiomatiza la geometría sobre una base conjuntista, siguiendo el ejemplo de la escuela de Peano; es el primer gran ejemplo para la corriente axiomatizadora moderna. Borel publica su manual de teoría de funciones, donde avanza hacia la moderna teoría de la medida, de carácter conjuntista.

1900 Segundo Congreso Internacional de Matemática: los dos primeros problemas de Hilbert tienen relación con la teoría de conjuntos. Se publica también su axiomatización de los reales (ver [Hilbert 1991]).

1903 Russell y Frege dan a conocer las antinomias o contradicciones de la teoría ingenua o lógica de conjuntos, con lo que el tema adquiere notoriedad pública por primera vez. Por esta época, Lebesgue elabora su teoría de la integración, refinando la definición de medida de Borel.

1904 Zermelo publica su demostración del teorema de buen orden, basada en el axioma de elección. Se abre una fuerte polémica sobre la matemática abstracta y los postulados puramente existenciales, en la que intervienen autores de todas las naciones.

1908 Zermelo publica su axiomatización de la teoría de conjuntos, y Russell presenta también su teoría de tipos, más débil pero con similar intención (seguirán los célebres Principia Mathematica en 1910-13). Brouwer comienza su dura crítica a la matemática moderna y su elaboración del intuicionismo.

1910 Steinitz publica sus cruciales investigaciones sobre teoría abstracta de cuerpos, en las que utiliza el axioma de elección. En los años 1900 se ha trabajado también sobre espacios funcionales, etc.

1914 Hausdorff publica su manual de teoría de conjuntos y da la definición moderna, basada en la teoría de conjuntos, de espacio topológico (relacionada con trabajos previos de Brouwer y Weyl).

Años 1920 Se desarrollan la axiomatización de la teoría de conjuntos, la topología abstracta y el álgebra estructural. La mayoría de los matemáticos consideran la noción de conjunto como fundamento de la matemática, pero surgen también fuertes críticas (Brouwer, Weyl, Skolem); es la polémica sobre fundamentos.

Años 1930 La polémica se diluye, en parte gracias a los sorprendentes resultados de Gödel (incompletud e indemostrabilidad de la consistencia para la aritmética de Peano, consistencia relativa de la aritmética clásica respecto a la aritmética intuicionista formalizada). Se consolida la alternativa entre matemática constructiva y abstracta, pero la inmensa mayoría de los matemáticos se decantan por la segunda. Se consolida también la axiomatización moderna de la teoría de conjuntos, basada en la lógica de primer orden, y surge la concepción iterativa. Gödel demuestra la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis del continuo. Diversos autores avanzan hacia la formulación de la noción abstracta de estructura, que se convierte en la base de la sistematización ofrecida por Bourbaki a partir de 1938.

Selección Bibliográfica

Bibliografía

[1] Bourbaki, N.: *Foundations of Mathematics for the Working Mathematician*, Jour. Symb. Logic 14, 1949, p. 1-8.

[2] Bourbaki, N.: *The Architecture of Mathematics*, AMM 67, 1959, 221-32. Reimpreso en [Ewald 1996], vol.2. Versión española en F. Le Lionnais, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (Buenos Aires, Eudeba).

[3] Cantor, G.: *Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Chicago, Open Court, 1915. Reimpresión: New York, Dover, 1955.

[4] sc Cantor, G., Dedekind, R.: *Cantor-Dedekind Briefwechsel*, ed. E. Noether y J. Cavaills, Paris, 1937, Hermann. Traducción francesa (incluyendo cartas de 1899) en J. Cavaills, Philosophie mathématique (Paris, Hermann, 1962), e inglesa en [Ewald 1996], vol.2.

[5] Corry, L.: *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Basel, Birkhäuser, 1996.

[6] Dauben, J.: *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge, Harvard Univ. Press, 1979.

[7] Dedekind, R.: *?Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*, Madrid, Alianza/UAM, 1998.

[8] Ewald, W. B.: *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics*, 2 vols., Oxford University Press, 1996.

[9] Ferreirós, J.: *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908*, Madrid, Publicaciones de la Universidad Autónoma, 1993. (Se recomienda a los lectores interesados en esta obra que se pongan en contacto directamente con el autor.)

[10] Ferreirós, J.: *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Basel, Birkhäuser, *en prensa*.

[11] Grattan-Guinness, I.: *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910*, Londres, Duckworth, 1980. Versión española en Madrid, Alianza, 1984.

[12] Hallett, M.: *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford, Clarendon, 1984.

[13] Hilbert, D.: *Fundamentos de la geometría*, Madrid, CSIC, 1991. (Por desgracia, la traducción es deficiente.)

[14] Lavine, S.: *Understanding the Infinite*, Harvard University Press, 1994.

[15] Mehrtens, H.: *Moderne—Sprache—Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*, Frankfurt, Suhrkamp, 1990.

[16] Moore, G. H.: *Zermelos Axiom of Choice. Its Origins, Development and Influence*, Berlin, Springer, 1982.

[17] Moore, G. H., Garciadiego, A.: *Burali-Fortis Paradox: A reappraisal of its origins*, Hist. Math. 8, 1981, 319-50.

[18] Purkert, W., Ilgauds, H. J.: *Georg Cantor 1845-1918*, Basel, Birkhäuser, 1987.

[19] Russell, B.: *The principles of mathematics*, Cambridge, University Press, 1903. Reimpresión de la 2ª edn. (1937): London, Allen y Unwin, 1948. Traducción española en Madrid, Espasa-Calpe, 1967.

Otras obras citadas

Bolzano, Bernard. 1851. Paradoxien des Unendlichen, Leipzig, Reclam,. Traducción inglesa en London, Routledge, 1950.

Cantor, Georg. 1872. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen 5, 123-32. En [Cantor 1932], 92-101.

Cantor, Georg. 1874. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, Jour. reine u. ang. Math. 77, 258-62. En [Cantor 1932], 115-118. Traducción inglesa en [Ewald 1996], vol.2.

Cantor, Georg. 1878. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Jour. reine u. and. Math. 84, 242-58. En [Cantor 1932], 119-133.

Cantor, Georg. 1883. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig, 1883. En [Cantor 1932], 165-208. Traducción inglesa en [Ewald 1996], vol.2.

Cantor, Georg. 1895. Beiträge zur Begrndung der transfiniten Mengenlehre, I, Math. Annalen 46, 481-512. En [Cantor 1932], 282- 351. Traducción inglesa en [Cantor 1915].

Cantor, Georg. 1932. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, ed. E. Zermelo, Berlin, Springer. Reimpresión: Hildesheim, G. Olms, 1966, y recientemente en Springer.

Dedekind, Richard. 1871. Über die Komposition der binären quadratischen Formen, suplemento X a G. L. Dirichlet, Vorlesungen ber Zahlentheorie (Braunschweig, Vieweg), 2ª edn. Reimpresión parcial en [Dedekind 1930/32], vol.3, 223-261.

Dedekind, Richard. 1872. Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, Vieweg. En [Dedekind 1930/32], vol. 3. Traducción inglesa en [Ewald 1996], vol.2, española en [Dedekind 1998].

Dedekind, Richard. 1888. Was sind und was sollen die Zahlen?, Braunschweig, Vieweg. En [Dedekind 1930/32], vol. 3. Traducción inglesa en [Ewald 1996], vol.2, española en [Dedekind 1998].

Dedekind, Richard. 1930/32. Gesammelte mathematische Werke, ed. R. Fricke, E. Noether y . Ore, Braunschweig, 3 vols. Reimpreso en 2 vols. New York, Chelsea, 1969.

Dirichlet, Gustav Lejeune. 1889/97. Werke, New York, Chelsea, 1969.

Ferreirós, José. 1992. Sobre los orígenes de la matemática abstracta: Richard Dedekind y Bernhard Riemann, Theoria 16- 17-18, tomo A, 473-498. (Versión abreviada en S. Garma, D. Flament y V. Navarro, eds., Contre les titanes de la routine, Madrid, CSIC, 1994, 301-18.)

Frege, Gottlob. 1893. Grundgesetze der Arithmetik, vol. 1, Jena, Pohle. Reimpresión: Hildesheim, Olms, 1966.

Garciadiego, Alejandro 1992. Bertrand Russell y los orígenes de las paradojas de la teoría de conjuntos, Madrid, Alianza.

Gödel, Kurt. 1944. Russells Mathematical Logic, en P.A. Schilpp, ed., The philosophy of Bertrand Russell (La Salle, Ill., Open Court). En Gödel, Collected Works, vol. 2 (1990), 119-41. Traducción española en Obras completas (Madrid, Alianza).

Gödel, Kurt. 1964. What is Cantors continuum problem?, versión revisada y expandida de un artículo del Amer. Math. Monthly 54 (1947), en P. Benacerraf y H. Putnam, Philosophy of Mathematics (Harvard Univ. Press, 1983). También en Gödel, Collected Works, vol. 2 (1990). Traducción española en Obras completas, op. cit.

Hilbert, David. 1900. Mathematische Probleme. Nachrichten Göttingen, 253-97. En Hilbert, Gesammelte Abhandlungen (Berlin, Springer, 1932/35), vol. 3, 290-339.

Traducción inglesa en Bulletin of AMS 8 (1902), 437-79, y parcial en [Ewald 1996], vol. 2.

Leibniz, Gottfried W. 1704. Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano, Madrid, Editora Nacional, 1977. Reedición en Alianza, 1992.

Meschkowski, Herbert. 1967. Georg Cantor. Leben, Werk und Wirkung, Mannheim, Bibliographisches Institut, 1983 (edn. original: Braunschweig, Vieweg).

Poincaré, Henri. 1903. El papel de la intuición y la lógica en matemáticas, en La ciencia y la hipótesis, Madrid, Espasa.

Riemann, Bernhard. 1868a. Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Abhandlungen Königl. Ges. Wiss. Göttingen 13 (1868). En [Riemann 1892], 227-265.

Riemann, Bernhard. 1868b. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abhandlungen Königl. Ges. Wiss. Göttingen 13 (1868). En [Riemann 1892], 272-287. Traducción inglesa en [Ewald 1996], vol. 2.

Riemann, Bernhard. 1892. Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, Leipzig, Teubner. Ed. H. Weber en colab. con R. Dedekind (1 edn. 1876). Reimpreso con Nachträge en New York, Dover, 1953. Nueva edición con añadidos en Berlin, Springer/Teubner, 1990.

Schoenflies, Arthur M. 1927. Die Krisis in Cantors mathematischem Schaffen, Acta Math. 50, 1-23.

Weyl, Hermann. 1918. Das Kontinuum, Leipzig, Veit, 1918.

Wussing, Hans. 1984. The Genesis of the Abstract Group Concept, Cambridge, MIT Press (orig. 1969).

Zermelo, Ernst. 1904. Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe), Math. Annalen 59, 514-516. Traducción inglesa en J. van Heijenoort, From Frege to Gödel (Harvard Univ. Press, 1967).

Zermelo, Ernst. 1908 Untersuchungen ber die Grundlagen der Mengenlehre, I, Math. Annalen 65, 261-281. Traducción inglesa en van Heijenoort, op. cit. [1967].

Zermelo, Ernst. 1930. Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen ber die Grundlagen der Mengenlehre, Fundamenta Math. 16, 29-47. Traducción inglesa en [Ewald 1996], vol.2.

José Ferreirós. Dpto. de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla.
e-mail: `jmferrecica.es`