Conferencia de clausura

EDUCACIÓN MATEMÁTICA HACIA EL AÑO 2000

Abraham Arcavi
Weizmann Institute of Science. Israel

Educación matemática es una disciplina, o quizá una interdisciplina, que se ocupa de todo aquello que tenga que ver con los procesos de aprendizaje y de enseñanza de la matemática, incluyendo a) el proceso de diseño de materiales curriculares (textos, juegos, material manipulativo, microentornos o micromundos de exploración, etc.), b) la formación y el perfeccionamiento en servicio de profesores, y c) la investigación pedagógica y cognoscitiva.

La educación matemática actualmente está en proceso de definir su propia identidad académica y por lo tanto está encontrando su lugar como tal en los claustros universitarios y en los institutos de investigación. Es probable que la influencia de esta disciplina y lo que ella ya ha producido no sea aún demasiado visible en la realidad cotidiana de la mayoría de las escuelas del mundo, sean éstas del primer o del tercer mundo y quizá por eso su peso y su influencia no sea tan notable aún. No obstante hay en el presente una acumulación de experiencias y de conocimientos que no van a tardar demasiado en dejar su huella en el aula.

Considero que hay dos factores centrales que están influyendo en esta disciplina y que han cobrado impulso en los últimos 10 o 15 años. El primero, los espectaculares avances de la tecnología —en especial la informática—y el segundo, los incipientes pero firmes resultados de la investigación cognoscitiva sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza. En esta presentación trataré de ilustrar con ejemplos la influencia de ambos factores, y concluir con una visión acerca de la educación matemática en el futuro.

TECNOLOGÍA

No es necesario abundar en descripciones acerca de los avances de la tecnología y la informática en nuestros días. En la mayoría, sino en todos nuestros quehaceres profesionales o laborales, la tecnología o sus rastros son omnipresentes: en la administración y en las telecomunicaciones, en la astronomía y en la agricultura, en la medicina y en la ingeniería, en el comercio, en la industria, y en los medios de transporte. No sólo los avances tecnológicos *per se* son asombrosos sino el ritmo en el que ellos transcurren. Aún así cabe preguntarse: ¿De qué manera puede influir la tecnología en la educación matemática? ¿No es acaso la educación una empresa eminentemente humana, donde la comunicación (verbal o no) entre seres humanos es el pivote primordial? ¿No es acaso la matemática la ciencia deductiva por excelencia considerada por la mayoría como el épitome del conocimiento lógico? ¿De qué manera entonces puede el advenimiento de la tecnología influir en estas dos actividades intelectuales, la educación y las matemáticas, y por lo tanto influir en la educación matemática? Pues bien, aunque parezca sorprendente, la tecnología está empezando a dejar sus huellas profundas también en esto.

Consideremos primero brevemente la influencia de la tecnología en la matemática como disciplina. Quizá lo más notable de destacar es, por un lado, el desarrollo de subdisciplinas ligadas a la computación: el análisis númerico, el estudio teórico de algoritmos, el desarrollo de temas como sistemas dinámicos, caos, etc. Algunos de estos temas eran en parte conocidos antes del advenimiento de las computadoras, pero eran imposibles de desarrollar debido a las enormes demandas de cálculo.

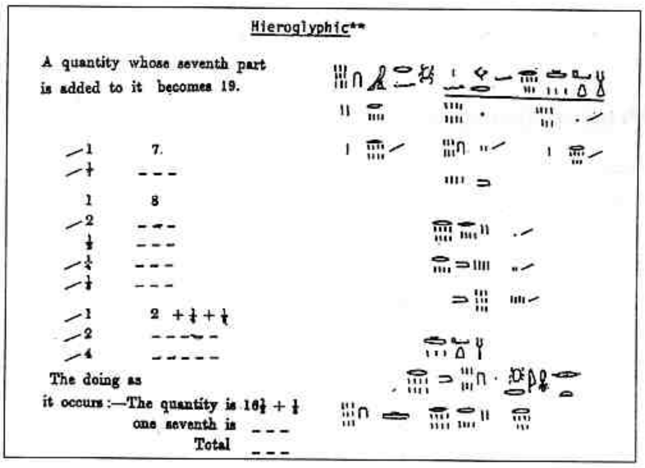
La informática está influyendo no sólo en los contenidos sino también en las formas de trabajo en matemáticas. La computadora se torna en un poderoso laboratorio de experimentación y por lo tanto permite otorgar un rol importante al empirismo en la investigación matemática, consistente con la filosofía de Lakatos y sus seguidores, por la cual no se desplaza, pero si se reduce el monopolio del raciocinio puramente deductivo en la actividad matemática. Como ejemplo ilustrativo cabe señalar que este tema llevó a la prestigiosa publicación de divulgación científica, el Scientific American, a publicar en el número de octubre 1993 un artículo polémico llamado "La muerte de la demostración" (en matemáticas). La mayoría de los matemáticos no piensan que la informática dé fin a la demostración deductiva y general, pero es indudable que está influyendo en la forma en que ellos descubren o inventan (de acuerdo a la postura filosófica que se adopte) nueva matemática. ¿De qué forma influye la tecnología en educación matemática? La primera observación es que la influencia es similar a lo descrito con respecto a la disciplina: permite abordar temas en forma muy diferente, y permite también abordar nuevos temas. Y es importante destacar no sólo las capacidades técnicas de los avances de la infórmatica, sino de qué manera ésta puede promover formas diferentes de pensamiento, y por la tanto influir en la manera en que aprendemos matemáticas. Esto requiere una elaboración en detalle.

Empezaré analizando el concepto de tecnología cognoscitiva desarrollado por investigadores americanos (Pea, 1987). La idea es la siguiente: la mente humana tiene capacidades intelectuales poderosas: memoria, atención, percepción, raciocinio, imaginación. Pero en general estas capacidades son limitadas, por ejemplo nos es imposible "procesar en paralelo", por usar una metáfora de la informática, es decir, nos es imposible atender a más de una cierta cantidad de información a un mismo tiempo.

Una tecnología cognitiva es cualquier medio que permite trascender las limitaciones de la mente humana. Mucho antes de que aparecieran los computadores, instrumentos muy simples ayudaron a expandir considerablemente la inteligencia humana. Entes e instrumentos de lo más diverso responden a esta definición: por ejemplo, un lápiz y un papel. Comparemos lo que implica hacer matemáticas mentalmente con lo que es hacerlo con lápiz y papel. Estos instrumentos aún siendo simples nos permiten tranformar en externos y tangibles los productos de nuestro pensamiento, que de ser privados, etéreos, invisibles, sujetos a la distorsión de la memoria, la atención o la percepción, pasan a ser externalizados, "capturados" en un trozo de papel y por lo tanto por el sólo hecho de estar registrados se transforman en objetos pasibles de observación, análisis, reflexión, extensión y de discusión con nuestros pares.

Pero no sólo lápiz y papel califican como ejemplos de tecnologías cognitivas, sino también los sistemas simbólicos. Consideremos por ejemplo la resolución del siguiente problema: "si a una cantidad le sumamos la séptima parte obteniendo 19, ¿cuál es la cantidad?" Este problema se puede resolver en forma casi inmediata operando con símbolos algebraicos, y es entonces un simple ejercicio. Sin embargo, los símbolos algebraicos son relativamente nuevos en matemáticas, datan de hace aproximadamente 400 años. Pero este problema y otros similares fueron planteados en uno de los textos matemáticos más antiguos de los cuales se tiene conocimiento: el Papiro Rhind que data de hace casi 4.000 años y que fue descifrado hace menos de 200 años y hoy está en el Museo Británico de Londres.

Quizá nos resulte muy díficil imaginar cómo puede resolverse un problema así, sin algebra. Este gráfico



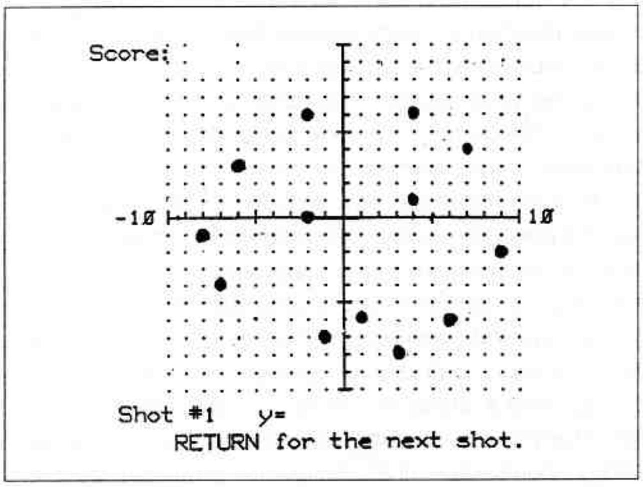
(Fig. 1)

muestra la resolución del problema en su versión original y en su traducción a nuestro sistema decimal. Si bien se trata de un problema elemental, descifrar el razonamiento matemático detrás de esta solución númerica no es un ejercicio trivial. El método nos sorprende por lo extenso y complejo, sobre todo porque tenemos en nuestro haber una tecnología cognitiva tan poderosa como son los símbolos algebraicos que nos permiten resolver este problema y similares en instantes, ampliando así nuestras capacidades intelectuales. En este caso, no sólo tenemos una tecnología cognitiva que nos permite registrar nuestro pensamiento como en el caso del lápiz y el papel, sino también agilizarlo, simplificarlo y también acceder a formas de pensar y crear antes desconocidas. Al respecto decía el matemático Alfred North Whitehead (1911), coautor de Bertrand Russell de la Principia Matematica, que por medio del simbolismo podemos hacer transiciones casi mecánicas en nuestro razonamiento, cosa que de otra manera requeriría el uso de las facultades más elevadas de nuestra mente. De esta manera liberamos nuestras energías de pensamiento. El simbolismo, dice Whitehead nos ayuda a ahorrar operaciones de pensamiento, que son como la carga de caballería en una batalla, muy restringidas en número, requieren caballos "frescos" y por lo tanto deben ser usadas sólo en momentos decisivos.

La informática en educación matemática es sin duda una tecnología cognitiva, pero su rol no es el de mero amplificador que potencia nuestras capacidades, sino que además permite el acceso a nuevas posibilidades de pensar, crear, entender, aprender y conectarnos con las matemáticas de formas que antes estaban excluídas o eran impensables. Este tema es complejo y requiere un análisis profundo del tipo que hacemos en nuestros cursos de post graduación para estudiantes de master y doctorado durante uno o dos semestres. Aquí ilustraré brevemente de qué manera, una tecnología cognitiva puede actuar de amplificador, puede servir para abrir posibilidades de pensamiento en direcciones nuevas, puede cambiar radicalmente los contenidos y el enfoque curricular, puede tranformar la motivación del alumno, puede transformar la sociología y la cultura del aula cambiando drásticamente el rol del docente.

Primer ejemplo

Green Globs (Dugadle, 1986) es un juego matemático basado en una idea simple pero muy ingeniosa. La pantalla del computador nos muestra un sistema de ejes cartesianos sobre la cual aparecen 13 "globos" localizados en posiciones que el programa elige al azar cada vez que uno comienza un nuevo juego. El objetivo del juego es "disparar" contra el mayor número de globos posible. El "disparo" consiste en producir una función cuyo gráfico toca, es decir, rompe, los globos, y para poder obtener ese gráfico hay que introducir la forma algebraica de la función. La siguiente ilustración muestra una réplica de una pantalla típica.



(Fig. 2)

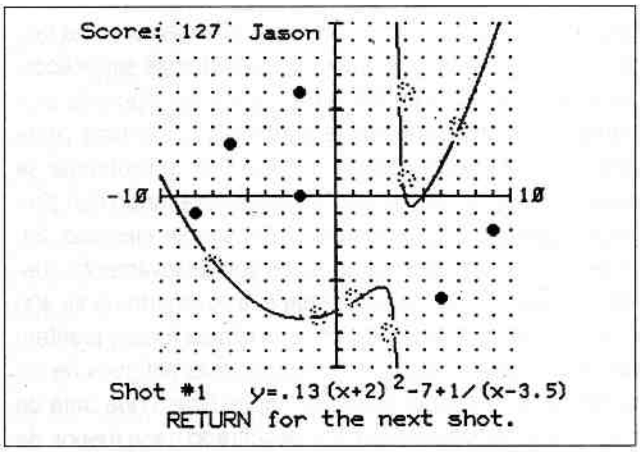
En esta disposición del gráfico podríamos intentar una función lineal, una cuadrática etc. El puntaje que obtiene el alumno crece en forma exponencial, de manera que por el primer globo que logre romper obtendrá 1 punto, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto y así sucesivamente. Así, el juego invita al alumno a considerar la posibilidad de "romper" el mayor número de globos posibles con la misma función.

¿Qué ilustra este juego?

Primero, ofrece una posibilidad de graficar funciones con mucha facilidad descargando el peso del cálculo y la graficación, ambos tediosos, en la computadora que lo hace instantáneamente librando nuestras energías para pensar, analizar y razonar, en lugar de gastarlas en operar técnicamente.

Segundo, contrastemos el tipo de pensamiento que requiere este juego con lo que en general se requiere durante el estudio de análisis matemático. Tradicionalmente el ejercicio más común consiste en, dada la forma algebraica, producir el gráfico de una función. Gran parte del estudio previo implica adquirir instrumentos para ese fin: sustituciones y resolución de ecuaciones para averiguar los puntos de intersección con los ejes, derivar e igualar la derivada a cero para estudiar posibles puntos extremos, paso al límite para investigar la existencia de asíntotas, etc. En el caso de Green Globs, se trata precisamente de lo inverso, la construcción de una forma algebraica correspondiente a un cierto gráfico dado o que uno quisiera construir. Uno podría pensar en establecer un sistema de ecuaciones para encontrar el valor de los parámetros pero en general no es es el tipo de actividad que este juego genera. En general los trabajos de observación de alumnos usando este juego muestran formas de pensar más informales, cualitativas e intuitivas en las cuales ellos investigan empiricamente el rol de los distintos parámetros y cómo influyen en la forma final del gráfico. Por ejemplo, en el caso de la ecuación de una recta, muchos alumnos comienzan tratando de visualizar la pendiente, desarrollando destrezas de estimación, y si la función que resulta no fuera la deseada, trabajan sobre las correciones que sería necesario hacer. Esta forma de pensar informal, desarrolla la intuición y enriquece el substarto fenomenológico de los conceptos, que muchas veces para el alumno son opacos, ocultos tras los procedimientos formales. La siguiente es una situación que fue registrada en la literatura como un ejemplo del tipo de actividad cognoscitiva que este juego puede promover.

Dugdale (1993) narra el caso de un alumno atrapado por este juego y se propuso lograr puntajes altos. Habiendo obtenido una distribución de globos como la indicada en la figura 2, él visualizó la parábola, cuya ecuación supo calcular, pero no se contentó con cuatro globos. Y su raciocinio fue el siguiente: quisiera obtener tres globos más que están en la posición vertical próximos a la recta $x=3.5$, para lo cual necesitaría que esta función sea parábola en casi todo su dominio, pero en las inmediaciones de 3.5 se comporte como una vertical. Después de mucho investigar diseñó la ecuación correspondiente al gráfico deseado:



(Fig. 3)

No quisiera pretender que todos los alumnos van a desarrollar formas sofisticadas de pensar como ésta, pero lo que sí quiero afirmar es que esta tecnología cognoscitiva posibilita y motiva al alumno para producir formas de pensamiento que no sólo no están en el curriculum tradicional, sino que sería muy difícil de surgir en otro contexto. El aprendizaje que resulta en este caso permitiría una conexión entre lo formal, lo gráfico y lo intuitivo.

La diseñadora de este juego cuenta que fueron precisamente formas sofisticadas de pensar de los alumnos lo que la llevó a diseñar una versión para expertos: ella cuenta que vio alumnos introducir funciones del tipo **y = 10sen(10x)**, con la cual practicamente "barrían" la pantalla y obviamente obtenían así el máximo puntaje posible. Para estos expertos ella diseñó la versión en la cual además de globos, aparecen en la pantalla "agujeros negros" que detienen el gráfico de la función cuando son alcanzados. De esta manera, el alumno tiene no sólo que romper el mayor número posible de globos, sino evitar al mismo tiempo esos "agujeros negros".

Tercero, en el transcurso de este juego, es el alumno el que decide cuál es el problema que va a resolver, es él quién elige el tipo de función que usará y cuántos globos serán su objetivo. Si es el alumno el que define el problema, el problema le pertenece, y por lo tanto es probable que la motivación, la inversión de tiempo, esfuerzo y recursos a su disposición tenderá a ser mayor que con un problema ajeno o definido por el docente. Por lo demás una clase entera puede trabajar con un mismo tipo de tarea en niveles bien diferentes, de acuerdo a las capacidades e intereses de los alumnos.

Cuarto, una actividad de este tipo puede cambiar la sociología del aula. En general, el docente prepara las actividades, elige los problemas y conoce sus soluciones, y hasta los posibles errores del alumno. El alumno recibe un problema sin haber participado plenamente de su definición, y sabe leer entre líneas en la expresión del docente si la solución está bién encaminada o no. En el caso de una actividad como ésta, donde el alumno es el que define el problema, el docente no siempre sabe de inmediato cuál es la solución, es decir, cuál es la forma smbólica correspondiente a un gráfico deseado, y a veces hay más de una solución posible. En ese caso la tecnología coloca al alumno y al docente del mismo lado, ambos pueden colaborar en la resolución, y el alumno puede aprender del docente, no necesariamente contenidos nuevos o soluciones pre-hechas, sino formas de trabajo en el trancurso de resolución de un problema para el cual el docente no tiene una solución preparada. La tecnología, mediante programas apropiados, puede crear este tipo de situaciones en el que el alumno tiene la oportunidad de tomar contacto directo con la pericia del docente viéndolo resolver situaciones nuevas y observando estrategias de pensamiento de un experto.

Segundo ejemplo

Hay programas, como el Cabri, el Sketchpad o el Inventor, en los cuales el alumno puede observar transformaciones dinámicas, y trabajar en una especie de laboratorio empírico para formar conjeturas, establecer hipótesis que luego hay que trabajar para probar o para encontrar contarejemplos. Lo importante es que el alumno participa en la formulación de hipótesis y no es un pasivo receptor de enunciados "caídos del cielo" para ser demostrados. El problema es que a veces los alumnos producen hipótesis que no siempre el docente sabe a primera vista si son correctas o no, y si lo son cómo probarlas.

Este tipo de software (y similares) abre el camino para estudiar la geometría de una manera muy diferente, en la cual el alumno genera conjeturas y tiene una sensación intuitiva, experimental, acerca de ella, y puede conectar contenidos.

INVESTIGACIÓN COGNOSCITIVA

Durante las decádas del '60 y '70, la mayoría de los trabajos de investigación en enseñanza y aprendizaje de las ciencias y matemática estaban guiados por un paradigma "conductista" (behaviorism). En general, este modelo de trabajo consiste en diseñar un tratamiento experimental, implementarlo en un grupo, establecer grupos de control, y mediante una batería de tests estadísticos, determinar el efecto del tratamiento experimental. Este modelo, importado de estudios como por ejemplo la agricultura o la medicina, contribuyó relativamente poco a la comprensión del proceso enseñanza-aprendizaje.

Los trabajos de Piaget por un lado, y los trabajos de la ciencia cognoscitiva por el otro (en especial los de inteligencia artificial), establecieron paradigmas de investigación nuevos centrados en la observación y el analísis meticulosos de lo que le ocurre al alumno durante el proceso de aprendizaje, tratando de caracterizar la naturaleza de ese proceso.

Últimamente se ha sumado una nueva tradición, con raíces en la antropología y que está arrojando luz sobre la naturaleza social del aprendizaje, y sobre todo destacando aspectos de aprendizaje antes soslayados. Esta tradición sostiene que aprender es entrar a practicar una cierta cultura, con sus valores, sus puntos de vista, sus prácticas de hacer, hablar y observar el mundo.

Antes de resumir algunos resultados quisiera hacer dos observaciones.

Primero: una de las expectativas, fundada o no, tanto del público en general como de la comunidad científica, es que la investigación produzca resultados repentinos, o como se dice en inglés "breakthroughs": si ayer se desconocía el origen del SIDA, un buen día se aisló el virus, si ayer se deconocía tal o cuál párticula subatómica, hoy se pudo identificar, si ayer el teorema de Fermat era sólo una hipótesis, aparentemente se pudo probar; etc. En educación la expectativa de un avance espectacular es un tanto infundada. La investigación en educación producirá avances en nuestro entendimiento de los procesos de aprendizaje, en forma gradual y evolutiva. Por lo tanto debemos adoptar patrones de tiempo diferentes. Aún así sostengo que que hoy en día entendemos mejor los procesos de aprendizaje que hace 20 años atrás. Y a medida que los paradigmas de investigación se vayan refinando, se producirán nuevos avances. La segunda observación se refiere a la brevedad en que enumeraré algunos resultados, brevedad que puede distorsionarlos y tornarlos en superficiales. Pero correremos ese riesgo y éste es un posible resumen de lo que la investigación ha producido.

Sobre la naturaleza del proceso de aprendizaje

El aprendizaje de una disciplina compleja como las matemáticas, es un proceso lento, no lineal, donde hay avances y retrocesos y donde el contexto del estudio tiene una influencia crucial. Un concepto puede ser reconocido o ignorado de acuerdo a las características del problema, y sólo paulatinamente podrán apreciarse sus ramificaciones y múltiples conexiones con otros conceptos.

Sobre la naturaleza del "error"

Las concepciones del alumno son consistentes aunque al docente muchas veces le parezcan incoherentes. Estas concepciones son el producto de tratar de acomodar el nuevo conocimiento a una estructura cognitiva existente, y en ese proceso ocurre lo que los docentes llamamos "errores". Este proceso de búsqueda del sentido del nuevo conocimiento producirá inevitablemente concepciones que no son consistentes con las del maestro, y por lo tanto será fútil la tarea de diseñar secuencias didácticas "perfectas" que traten de evitar "errores". En lugar de esforzarnos por construir esas secuencias nuestras energías deben concentrarse en entender al alumno, des-cubrir las concepciones subyacentes y diseñar tareas que apoyen la construcción del concepto en su forma más rica.

Sobre procesos metacognitivos y creencias

La investigación ha identificado procesos de control, de planeamiento y uso de estrategias de trabajo, de distribución de recursos mentales, toma de conciencia de los propios mecanismos de aprendizaje, reconocimiento de los propios niveles de entendimiento y las creencias acerca de las matemáticas y en qué consiste la actividad matemática. Estos temas han adquirido un lugar central en el estudio del aprendizaje y han logrado explicar aspectos del éxito y/o fracaso de los alumnos.

Sobre la interacción social

El diálogo, la interacción social, la "cultura" del aula son elementos claves que establecen las pautas de actividad que el alumno internaliza. Numerosos estudios se concentran hoy en día en el aula, en la creación de atmósferas de trabajo consistentes con las formas de trabajo profesional en matemáticas, transmitiendo la responsabilidad del aprendizaje y del diálogo al alumno, y apoyando su autonomía.

Y bien, he ilustrado lo que a mi juicio son los dos factores centrales que influirán en la educación matemática en el siglo XXI: la tecnología y los resultados de investigación. ¿De qué manera éstos influirán en las características de la educación matemática del futuro?

1. La tecnología será incorporada, quizá lentamente al principio, por medio de computadoras o calculadoras gráficas, o tal vez la multimedia. Esto es irreversible por dos motivos, primero las tecnologías se abaratan, y segundo los alumnos ya crecen con la tecnología, aprenden a interactuar con ellas desde niños, quizá mejor que nosotros. Por eso y porque además se está demostrando que hay formas diferentes de aprender con tecnologías, ellas pasarán a ser parte integral de la enseñaza de matemáticas y no sólo de matemáticas, sino de casi todas o todas las asignaturas.

2. Se constituirán grupos de educación matemática que irán desplazando a los escritores individuales de textos. Hoy en día producir material curricular incluye un análisis y una decisión de cuáles temas hay que enseñar, incluye basar los materiales en resultados de investigación cognoscitiva, y además incluye el continuo perfeccionamiento docente acorde con el espíritu con el que los materiales fueron creados. Estas tareas están entrelazadas y sólo pueden llevarse a cabo por un equipo que trabaja en un ámbito acádemico y con apoyo y recursos.

3. La continua preparación docente será una preocupación primordial. Sobre todo la preparación en servicio. Contrariamente a lo que se pensó en los primeros tiempos del microcomputador, el docente no sólo no es prescindible, sino que su rol es importantísimo, no como transmisor de conocimientos, sino como el experto facilitador, como el experto del cual el alumno puede aprender cómo piensa, opera y funciona un experto cuando está por resolver un problema cuya solución no es inmediata. Esto requiere una preparación ininterrumpida consistente en cursos, cursillos, seminarios, etc. Los grupos

de educación matemática antes mencionados deberán tomar esa responsabilidad.

4. Muchos temas cambiarán, y los enfoques serán distintos. Se pondrá mucho más énfasis en el cómo y no tanto en el qué, se trabajará más en aspectos intuitivos, gráficos realzando el sentido común y se restará importancia a la enseñanza de algoritmos y recetas. Un ejemplo casi caricaturesco podría ser el tiempo que se invertía en aprender a operar con la tabla de logaritmos, sin saber demasiado lo que ello significaba. Yo recuerdo que recién en la universidad entendí que lo que hacíamos en la secundaria era interpolación lineal entre dos valores de la tabla para obtener un tercero intermedio que la tabla no mostraba.

Esto, en lugar de representar un corte con el pasado, puede implicar por lo contrario, un retorno a las fuentes de la historia de las matemáticas, en busca de las intuiciones primeras, de las dificultades iniciales, de las fuentes de insight.

5. El aula funcionará distinto, los roles del docente y del alumno cambiarán. El alumno tenderá a ser un pequeño investigador entre pares, el docente será un experto facilitador y a veces un colega.

6. Se prestará mucha atención a los resultados de la investigación que indique cómo los alumnos aprenden en estos nuevos medios.

Reviendo la lista anterior, quizá los descreídos entre nosotros diremos que más que una lista de cambios inexorables lentos o no, es una lista de deseos. Pienso que aunque sólo una parte de lo anterior empiece a ocurrir, y creo que sin duda ocurrirá, y aún cuando el ritmo de cambio no sea el deseado, creo que nos podemos permitir ser optimistas. Si organismos gubernamentales en el mundo continúan con la tendencia de comprar menos armas de guerra y se preocupan sinceramente (es decir asignando recursos financieros) por la ecología, la salud y la educación, la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias ganarán mucho terreno ■

BIBLIOGRAFÍA

— **Dugdale, S. and Kibbey, D.**, 1986, *Green Globs and Graphing Equations* [A computer based instructional package]. Sunburst Communications, Pleasantville, NY.

— **Dugdale, S.**, 1993. "Functions and Graphs - Perspectives on Student Thinking". In Romberg, T.A., E. Fennema and T. P. Carpenter (Eds.) *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions.* L. Erlbaum Associates, Inc. Hillsdale, NJ. pp. 101-130.

— **Pea, R.**, 1987. "Cognitive Technologies for Mathematics Education". In Schoenfeld, A.H. (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education.* L. Erlbaum Associates, Inc. Hillsdale, NJ. pp. 89-122.

— **Whitehead, A. N.**, 1911. *An Introduction to Mathematics.* Williams & Norgate, London, p. 59, 61.