DISCURSO

Muy Honorable Señor,
Magnífico y Excelentísimo Señor,
Excelentísimos e Ilustrísimos Señores,
Señores Claustrales,
Señoras y Señores:

Voy a referirme a algunos aspectos de las matemáticas, alejados sin duda de la enseñanza convencional, pero muy importantes y extraordinaria- mente atractivos desde puntos de vista intelectuales y estéticos.

Siempre he sentido que la matemática es no sólo ciencia sino también arte y que encierra un tipo de belleza de la que participa también la poesía. Por esta razón voy a citar unas palabras que el poeta granadino Federico García Lorca escribió dirigiéndose a Gerardo Diego. Decía lo siguiente: "Pero ¿qué voy a decir de la poesía? ¿Qué voy a decir de esas nubes, de ese cielo? Mirar, mirarlas, mirarles, y nada más. Comprenderá que un poeta no puede decir nada de la poesía. Aquí está; mira. Yo tengo el fuego en mis manos. Yo lo entiendo y trabajo con él perfectamente, pero no puedo hablar de él sin literatura. Yo no puedo hablar de mi poesía. Y no porque sea inconsciente de lo que hago. Al contrario, si es verdad que soy poeta por la gracia de Dios - o del demonio- también es que lo soy por la gracia de la técnica y del esfuerzo, y de darme cuenta en absoluto de lo que es un poema".

Respecto a las matemáticas, algunos han sentido algo análogo a lo que expresa García Lorca en relación con la poesía por lo que han pretendido averiguar qué es lo que estaban manejando, de aquí que, a lo largo de muchos años, se hayan intentado aclarar bien los fundamentos de las matemáticas. Por otra parte, y al hilo de lo que dice García Lorca respecto a la necesidad de la técnica, debo añadir que el trabajo en matemáticas exige a veces un esfuerzo considerable. Incluso hay que adquirir previamente hábitos mentales específicos, y aún más, mi experiencia me dice que los conocimientos llegan a ser realmente claros cuando se incorporan a la propia vida. El mismo sentido del rigor parece que no es una cosa natural al hombre. Decía Poincaré que el rigor en matemáticas necesita aprendizaje. Uno puede plantearse la cuestión de si el esfuerzo para adquirir ciertos conocimientos o conseguir determinados resultados puede ser desproporcionado. Bertrand Russell, en su Autobiografía, llama al período en el que se dedicó más activamente a la lógica matemática, su luna de miel intelectual; pero, en contrapartida, manifiesta que abandonó las matemáticas porque no se sentía con ánimos para realizar un trabajo tan duro.

Cuando se hace referencia a los fundamentos de las matemáticas, hay que citar los llamados Elementos de Euclides que ocupan uno de los primeros lugares entre los libros que se han escrito a lo largo de todos los tiempos. Es el gran monumento del intelecto griego, más importante que las aportaciones con las que contribuyeron los griegos a la literatura o a la filosofía. La base de toda nuestra matemática puede decirse que se encuentra en los Elementos de Euclides.

Euclides fue director del famoso Museo de Alejandría cuando Egipto estaba gobernado por Ptolomeo I y publicó su obra, llamada posteriormente Elementos de Euclides, a los treinta años de edad, en el año 300 a. de C.

En los Elementos se inicia el método axiomático, que tanta importancia y repercusión ha tenido y tiene en la llamada matemática moderna. Puede decirse que Euclides fue el sistematizador de casi todos los resultados matemáticos conocidos en su tiempo, ordenándolos de una manera magistral en un sistema deductivo, demostrando a partir de pocas propiedades geométricas simples, evidentes por sí mismas y que no necesitan pruebas, según el espíritu de la época, todas las restantes como consecuencias lógicas de las primeras.

Los Elementos de Euclides están formados por trece libros, tres de los cuales contienen la aritmética y el resto la geometría. Se recogen en ellos muchas investigaciones de los pitagóricos de los siglos IV y V a. de C., como las de Hipócrates de Quíos, Eudoxo y Taetetus. Por esta razón quisiera decir algunas palabras sobre Pitágoras y los pitagóricos. Realmente, Pitágoras fue una persona muy importante desde el punto de vista intelectual, de gran influencia tanto en los tiempos antiguos como en los modernos. Con él comienzan las demostraciones en matemáticas y los argumentos deductivos-demostrativos. Pitágoras nació en la isla jónica de Samos, frente a Mileto, y tuvo su época floreciente hacia el año 530 a. de C. Desde 535 a. de C. hasta 515 a. de C. gobernó Samos el tirano Polícrates, que carecía totalmente de escrúpulos morales: tenía incluso una flota que se dedicaba a la piratería; no obstante, patrocinó el arte y entre sus beneficiados estaba el famoso poeta Anacreonte. Pitágoras, que no estaba de acuerdo con la conducta de Polícrates, abandonó Samos, visitó Egipto y, finalmente, se estableció en Crotona, en lo que hoy es el sur de Italia, la Magna Grecia. En el año 515 a. de C., Polícrates, engañado por los persas fue capturado y, siguiendo una costumbre de la época, crucificado.

En Crotona, Pitágoras fundó una sociedad donde tanto él como sus discípulos se dedicaron a la filosofía y a la matemática; la propiedad era común y los descubrimientos científicos también. Solía mezclar Pitágoras el misticismo con la ciencia; él creía en la trasmigración e inmortalidad del alma, y afirmaba que la purificación más grande se obtiene dedicándose a la ciencia desinteresada, y el hombre que así lo hace puede, de una forma más eficaz, librarse de la rueda del nacimiento.

Un descubrimiento importante de Pitágoras, o de alguno de sus discípulos, fue la proposición matemática que afirma que, en un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos. Ya los egipcios conocían que el triángulo cuyos lados tienen longitudes 3, 4 y 5 posee un ángulo recto; pero fueron los griegos los primeros en observar la igualdad 32 + 42 = 52 y, probablemente, inspirados por ésta, alcanzaron la proposición general que hemos citado y que se conoce como el teorema de Pitágoras.

Como he dicho antes, los pitagóricos introdujeron en matemáticas los argumentos de carácter deductivo, que son esenciales en la exposición y desarrollo de esta ciencia: todo matemático es consciente de que donde se aprende verdaderamente matemáticas es en las demostraciones de teoremas.

Uno de los matemáticos más grandes de la antigüedad fue el pitagórico Arquitas de Tarento (440-360 a. de C.), digno predecesor de Arquímedes, que aplicó la geometría a la mecánica construyendo mecanismos análogos a los que más tarde sirvieron a Arquímedes para la defensa de Siracusa. Todos los griegos posteriores que tuvieron voz en matemáticas fueron, directa o indirectamente, discípulos suyos. Se debe a Arquitas una solución muy ingeniosa del famoso problema de la duplicación del cubo, que, según la tradición fue planteado de la siguiente forma: unos sacerdotes de un templo erigido a Apolo en la isla de Delos fueron informados por el oráculo que el dios quería que el altar, que tenía forma cúbica, se cambiara por otro cuyo volumen fuera el doble. En un principio, pensaron duplicar las longitudes de todas las aristas, pero vieron que el volumen resultaba ocho veces mayor, por lo que se dirigieron a los matemáticos. El problema se planteó entonces de dos manera diferentes. La primera consiste en lo siguiente: conocida la arista de un cubo, se trata de construir, utilizando como instrumentos de dibujo sólo la regla y el compás, un segmento que sea la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble del primero. En la segunda, que resolvió Arquitas, no era necesario restringirse a la regla y al compás.

Otros problemas clásicos, históricamente importantes son la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo. La cuadratura del círculo consiste en dado un círculo en el plano, construir a partir de él, y utilizando sólo la regla y el compás, un cuadrado cuya área coincida con el área del círculo. En la trisección del ángulo, se trata de dividir un ángulo dado en tres ángulos iguales, usando solamente la regla y el compás.

La duplicación del cubo, cuadratura del círculo y trisección del ángulo no se pueden realizar usando sólo la regla y el compás, pero a esta conclusión negativa se llegó en el siglo XIX, después de más de dos mil años de trabajo y gracias a los progresos del álgebra y del análisis matemático.

Un discípulo de Arquitas, Eudoxo de Cnido (400-347 a. de C.), desarrolló una teoría geométrica para el estudio de los números irracionales, contenida en el libro V de los Elementos de Euclides. Esta teoría fue perfeccionada en el siglo XI por el poeta y matemático persa Omar Kayyam, autor de la colección de poemas las Rubbaiatas. La exposición de Eudoxo es de una perfección lógica extraordinaria, precursora de la matemática rigurosa del siglo XIX, y, en especial, de la teoría de cortaduras para la construcción de los números reales introducida por Dedekind.

Los entes matemáticos tienen carácter exacto, cosa que no sucede con los objetos sensibles, pues, por ejemplo, una recta que se dibuje, por muy perfecta que sea la regla utilizada, aparecerá con irregularidades, de aquí que los pitagóricos llegaran a la conclusión de que el razonamiento exacto se hace sobre objetos ideales cuya realidad es eterna, y que de todas las actividades humanas, la intelectual es la más noble. Un paso más para alcanzar el resultado de que los entes matemáticos son pensamientos de Dios, de aquí que la afirmación posterior de Platón de que Dios es un geómetra esté perfectamente justificada. Por otra parte, Platón va mucho más lejos inventando su conocida teoría de las ideas, cuyo carácter general tiene mayor amplitud que las matemáticas; además construye Platón su teoría de la reminiscencia con la que explica cómo ciertos conocimientos no son más que recuerdos de cosas sabidas en existencias anteriores. Esto está muy bien expuesto en el diálogo Menón, o de la virtud, en donde Sócrates se dirige a Menón afirmándole que no hay enseñanza sino reminiscencia, y para demostrárselo le dice que llame a uno de sus esclavos; se establece entonces entre Sócrates y el esclavo un diálogo en el que, a pesar de que el esclavo no sabe nada de matemáticas, obtiene la prueba del teorema de Pitágoras en un caso particular: cuando los catetos del triángulo rectángulo son iguales. En el transcurso de esta demostración hay un momento en que Sócrates se dirige a Menón y le dice: "Tú ves, Menón, que yo no le enseño nada: me limito a preguntarle sobre todo ello". En este diálogo socrático, aunque no se llegue a concluir lo que es la virtud, su lectura resulta deliciosa. Esto sucede con todos los escritos de Platón, salvo quizá con el diálogo más largo: La República.

Voy a decir ahora algo más sobre los Elementos de Euclides. Comienzan con veintitrés definiciones entre las que cito las siguientes:

1. Un punto no tiene ninguna parte.
2. La recta tiene longitud pero no tiene anchura.
15. Un círculo es una figura plana limitada por una línea cuyos puntos están a la misma distancia de un punto fijo: el centro.
23. Rectas paralelas son aquellas situadas en un plano que por más que se prolonguen no se cortan.

A continuación siguen cinco postulados:

1º) Por dos puntos pasa una recta.
2º) Una recta puede prolongarse indefinidamente.
3º) Se puede trazar una circunferencia de centro y radios dados.
4º) Todos los ángulos rectos son iguales.
Y finalmente, el famoso postulado quinto de Euclides, el de las paralelas, que pongo en la siguiente forma:

5º) En un plano, por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.
Después de los postulados hay cinco axiomas:

1º) Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
2º) Sumando cosas iguales a cosas iguales, las sumas resultan iguales.
3º) Restando cosas iguales a cosas iguales, resultan cosas iguales.
4º) Cosas que pueden ser intercambiadas son iguales.
5º) El todo es mayor que la parte.
A partir de aquí se expone la obra como una cadena deductiva de proposiciones.

Es obvio que los postulados tienen carácter matemático mientras que los axiomas poseen unos matices más generales, pudiendo ser utilizados en los fundamentos de otras ciencias. Modernamente, esta diferencia griega no subsiste y se usa la palabra axioma con el mismo significado que postulado.

En el libro I de los Elementos no se utiliza el postulado quinto hasta la proposición veintinueve. Las anteriores proposiciones pertenecen a lo que actualmente se llama geometría absoluta. Esta geometría está formada por las propiedades geométricas que se obtienen sin utilizar el postulado de las paralelas. Es comprensible que desde la antigüedad se tratara de probar la proposición veintinueve sin usar el postulado quinto, o lo que es equivalente, mejorar la geometría de Euclides no admitiendo la propiedad de las paralelas sin demostración, es decir, como postulado, sino tratar de probarla a partir de los restantes axiomas, aceptados implícita o explícitamente en los Elementos, o lo que es igual, ver que dicho postulado es una proposición dentro de la geometría absoluta.

Durante veinte siglos han sido numerosos los intentos para demostrar el postulado quinto, pero el matemático que por primera vez fue más lejos en este tema fue el jesuita italiano Saccheri (1667-1733), profesor de matemáticas en la Universidad de Pavía que, en 1733 publicó una investigación importante sobre dicho postulado. No parece que la publicación de Saccheri llamara mucho la atención en su época, y fue olvidada rápidamente; su trabajo no fue conocido tampoco por los fundadores de la geometría no euclídea: Gauss, Lobachewsky y Bolyai. Sin embargo hay que situar a Saccheri entre los grandes matemáticos que han contribuido de una manera clara al desarrollo de esta geometría.

Saccheri se pone a demostrar el postulado quinto de Euclides a partir de los restantes postulados construyendo un cierto cuadrilátero, llamado actualmente cuadrilátero de Saccheri, y razonando a partir de él llegar a la conclusión. En el fondo, Saccheri lo que hace es aplicar un método que en matemáticas se llama reducción al absurdo, partiendo de la hipótesis que equivale a que en el plano, por un punto exterior a una recta se puede trazar más de un recta paralela a la recta dada y, razonando a partir de aquí, tratar de llegar a una contradicción. Construye una larga cadena de proposiciones de las cuales algunas son muy curiosas como, por ejemplo, que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos, pero a pesar de todo el trabajo que realizó no logró alcanzar su objetivo. Actualmente, se sabe que Saccheri nunca habría podido llegar a una contradicción. Por otra parte, al obtener su cadena de proposiciones estaba desarrollando, sin darse cuenta, una nueva ciencia: la geometría no euclídea. Esta geometría se construye partiendo de los postulados que aparecen explícita o implícitamente en los Elementos de Euclides, suprimiendo el postulado de las paralelas y poniendo en su lugar el siguiente: "En un plano, por un punto exterior a una recta, se puede trazar más de una paralela a dicha recta". Muchas de las proposiciones de esta geometría se contradicen con otros resultados de la geometría euclídea. Podría creerse, a la vista de esto, que si la geometría euclídea es verdad entonces la geometría no euclídea es falsa, pero si se entiende el concepto de verdadero como exento de contradicción, entonces se prueba con modelos adecuados que si la geometría euclídea es verdad también es verdad la geometría no euclídea.

Podemos concluir de todo esto que los esfuerzos de dos mil años para tratar de probar el postulado de las paralelas no pudieron cumplir su objetivo, porque esto era imposible, pero sirvieron para alcanzar metas más importantes como fueron el estudio profundo de la naturaleza de la matemáticas y el descubrimiento de la geometría no euclídea.

Gauss, alemán de Gotinga, quizá el matemático más importante de todos los tiempos, fue el primero que tuvo una idea clara sobre una geometría distinta de la de Euclides.

Cuando tenía alrededor de veinte años empezó a estudiar la teoría de las paralelas y durante casi treinta años prosiguió dichos estudios. Después de muchas reflexiones fundamentó la nueva geometría, que llamó no euclídea, y que desarrolló en parte.

En 1824, escribió una carta a su amigo F.A. Taurinus, en la que dice lo siguiente: "La hipótesis de que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos conduce a una geometría muy curiosa, muy diferente de la nuestra, pero totalmente consistente, y que he desarrollado a mi entera satisfacción. Los teoremas de esta geometría parecen paradójicos y, para los no iniciados, absurdos, aunque un poco de serena reflexión muestra que no tienen nada de imposibles". Y añade en su carta: "ésta es una comunicación privada a la que no se puede dar publicidad ni hacer nada que contribuya a dársela". La razón por la que Gauss no se atrevió a publicar su descubrimiento está en la gran autoridad de Enmanuel Kant, muerto en 1804.

Kant escribió un libro de ciencia sobre los terremotos a raíz del famoso terremoto de Lisboa, ocurrido en 1755; pero Kant no era un científico, sino un filósofo. No obstante, sus ideas ejercieron una gran influencia en todos los campos. Kant fue el fundador del idealismo alemán. En su obra La crítica de la razón pura, la más importante que escribió, publicada en 1781, pretende probar que nuestro conocimiento no sólo procede de la experiencia sino que hay también una parte de él a priori, que no se obtiene a partir del mundo exterior. La lógica y todas las proposiciones de las matemáticas puras son para él a priori. Para Kant, el espacio y el tiempo son subjetivos y forman parte de nuestro aparato de percepción. Platón decía que Dios es un geómetra; pero Kant va mucho más lejos afirmando que el espacio es euclídeo. Dada la inmensa autoridad de Kant, Gauss no se atrevió a publicar sus descubrimientos que le ocuparían un tiempo que no estaba dispuesto a perder. Hasta 1831, no redactó un breve resumen de la nueva geometría; este resumen se encontró entre sus papeles a su muerte.

Un amigo de Gauss, Wolgang Bolyai, matemático húngaro, que estudió en Gotinga, publicó en 1832 un tratado de geometría en dos volúmenes. Su hijo Johann contribuyó a esta obra añadiendo un apéndice de veintiséis páginas que recogía sus investigaciones sobre geometría, que había iniciado diez años antes, cuando tenía veintiún años de edad. Este apéndice contiene los resultados fundamentales de la geometría no euclídea. Un ejemplar de él fue enviado por Wolgang Bolyai a su amigo Gauss en 1832, y tuvo como resultado que Gauss abandonara su proyecto de escribir sus propias investigaciones en una forma detallada.

Johann Bolyai estudió las consecuencias que se derivan de los Elementos de Euclides al suprimir el postulado quinto y sustituirlo por el siguiente:

"Existe en el plano una recta y un punto exterior a ella por el que se pude trazar más de una paralela a dicha recta". Así obtuvo muchas proposiciones entre las que se encuentran otras obtenidas anteriormente por el jesuita Saccheri, con la diferencia de que Saccheri pretendía llegar a una contradicción mientras que Bolyai sabía que estaba desarrollando una nueva geometría.

Gauss escribió una carta a Wolgang Bolyai en la que, entre otras cosas, le decía: "El contenido entero del trabajo, el camino trazado por tu hijo, los resultados a los que llegó coinciden casi enteramente con mis meditaciones, que han ocupado en parte mi mente durante treinta o treinta y cinco años. Así, me quedé completamente estupefacto. En cuanto a mi trabajo personal, del cual, hasta aquí he confiado bien poco al papel, era mi intención no dejar que se publicara nada durante mi vida. En efecto, la mayor parte de los hombres no tienen ideas claras sobre las cuestiones a las que nos estamos refiriendo y yo he encontrado muy pocas personas que prestasen un especial interés a lo que les comuniqué sobre tal asunto. Era mi idea escribir, con el tiempo, todo esto, para que al menos no pereciese conmigo. Y así es para mí una agradable sorpresa ver que esta fatiga puede serme evitada ahora, y estoy sumamente contento de que sea precisamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de un modo tan notable".

Por otra parte, un matemático ruso, profesor de la Universidad de Kazán, Nicolai Ivanovich Lobachewsky, que fue rector de dicha Universidad durante veinte años, había descubierto también la geometría no euclídea y publicó sus resultados en 1829, antes que Johann Bolyai.

He de decir ahora que las geometrías se aplican al mundo, pero que las propiedades espaciales del mundo no son exactamente las propiedades estudiadas por el hombre en sus geometrías, y así resulta que el espacio euclídeo se aproxima localmente al espacio ordinario y, por tanto, la geometría de Euclides puede utilizarse en muchas construcciones de la ingeniería, pero cuando se trata de aplicarla al Universo, las cosas ya no son tan claras. Por otra parte, he de decir que las matemáticas han sido aplicadas mucho en otras ciencias, como, por ejemplo, en física, con modelos matemáticos a veces de gran éxito y también, otras veces, con rotundos fracasos. Quisiera referirme aquí a uno de los científicos más famosos de nuestro siglo: Albert Einstein. Parecer ser que Einstein concebía la investigación física como una especie de juego entre Dios y el investigador, de manera que Dios había creado unas leyes del Universo, que mantenía más o menos ocultas, y el investigador trataba de ponerlas al descubierto. Por esta razón, una vez que le presentaron un modelo matemático de ciertos fenómenos físicos, modelo extremadamente difícil, de una complicación casi sobrehumana, Einstein, con cierto sentido del humor, dijo lo siguiente: Dios es astuto, pero no perverso.

Volviendo a la geometría, es natural que Gauss se planteara el problema de si el espacio real sería euclídeo o no. Para encontrar la respuesta, hizo la medición, cerca de Gotinga, de un triángulo cuyos vértices eran cúspides de montañas y cuyos lados tenían longitudes de aproximadamente cincuenta kilómetros: si lograba probar que la suma de los ángulos de este triángulo era menor que dos rectos, entonces el espacio ordinario no sería euclídeo. Hizo las mediciones y los cálculos y concluyó que la diferencia entre dos rectos y la suma de los ángulos de dicho triángulo podría deberse a los errores de los instrumentos de medida. Por tanto, su pregunta de entonces quedó sin respuesta.

Ninguno de los fundadores de la nueva geometría resolvió el problema de su compatibilidad lógica. Parece que Bolyai temía que al extender sus estudios al espacio tridimensional encontraría incompatibilidades; Lobachewsky pensaba algo análogo. Fue Beltrami, matemático italiano, el que, en 1868, publicó un artículo interpretando el plano no euclídeo, localmente, como una superficie, la seudoesfera: las rectas son las geodésicas de dicha superficie. De esta forma obtenía un modelo euclídeo de la geometría no euclídea. Por tanto, si la geometría de Euclides era cierta también lo era la no euclídea, de aquí que la nueva geometría fuera tan compatible como la antigua.

Tanto en la geometría euclídea como en la no euclídea a cada recta se la considera infinita. Sin embargo si no se mira a la recta como infinita, se puede obtener una geometría, la de Riemann, en la que no existen paralelas y la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos. Parece que la geometría de Riemann está más próxima al espacio real que la de Euclides; Albert Einstein la utiliza en su teoría de la relatividad general.

Felix Klein dio a la geometría que hemos considerado los nombres que tienen actualmente, o sea, la geometría de Saccheri, Gauss, Bolyai y Lobachewsky recibe el nombre de geometría hiperbólica, la de Riemann, geometría elíptica, y la Euclides, geometría parabólica.

El estudio detallado de la geometría llevó a algunos matemáticos del siglo XIX a un análisis profundo y exhaustivo de los fundamentos. El principal artífice fue David Hilbert, matemático alemán, que en 1899 publicó su famosa obra Fundamentos de Geometría. Por supuesto que antes de la obra de Hilbert se publicaron importantes trabajos sobre las bases de la geometría, como los de Meray, Pasch, Peano, Veronese y Enriques, pero fue Hilbert quien acertó con un sistema axiomático que ha quedado definitivo, demostrando además la independencia y consistencia de los axiomas reduciendo la geometría a la aritmética. Puso de manifiesto Hilbert que si en aritmética no se alcanza contradicción tampoco se llega a contradicción en geometría.

En matemáticas, un sistema axiomático se dice que es incompleto cuando existe algún enunciado que tiene sentido en la teoría deducida de dicho sistema y que es indecidible, es decir, que su verdad o falsedad no se puede demostrar a partir de los axiomas, así por ejemplo, el sistema de axiomas de la geometría absoluta es incompleto, ya que no se puede demostrar a partir de dichos axiomas si el enunciado de las paralelas es verdadero o falso, o sea, no se puede probar a partir de dichos axiomas si es verdadero o falso lo siguiente: "En un plano, por un punto exterior a una recta, se puede trazar una sola recta paralela a ella".

Es natural preguntarse, pues, si el sistema de axiomas de Hilbert, los cuales dan lugar a la geometría euclídea, es incompleto o no. Como Hilbert reduce la geometría a la aritmética, la pregunta la podemos hacer sobre la aritmética. La respuesta a esto la dio el austríaco Kurt Gödel, el lógico más importante de este siglo y uno de los pensadores más grandes de todos los tiempos. Nació en Brün (Moravia) en 1906. Estudió matemáticas en la Universidad de Viena y se doctoró también en dicha universidad. En su tesis doctoral demuestra la suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden. Probablemente, es la tesis doctoral más breve que se ha escrito nunca: sólo tiene once páginas. Gödel participó en las actividades del famoso Círculo de Viena. En 1939, huyendo de los nazis marchó a los Estados Unidos en donde permaneció hasta su muerte acaecida en 1978. Fue miembro del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton desde 1940. No sólo investigó en lógica y en filosofía de las matemáticas sino también en teoría general de la relatividad influenciado por su compañero Einstein, que también era miembro del Instituto. Pues bien, Gödel, en 1930, publica su famoso teorema de la incompletitud de la aritmética, en donde demuestra que todo sistema de axiomas que contenga a la aritmética elemental es incompleto.

Un aspecto de las matemáticas muy discutido a lo largo del tiempo es el de las aplicaciones. Es difícil conocer para resultados de la matemática pura si algún día llegarán a aplicarse, pues la historia nos dice lo difícil que es responder a esto, como pueden servir de ejemplo las propiedades de las cónicas. Un matemático pitagórico del siglo IV a. de C., Menechmo, discípulo de Eudoxo, encontró el método de las coordenadas redescubierto en el siglo XVII por Descartes, y estudiando el problema de la duplicación del cubo, inició la teoría de las cónicas. Más tarde, Apolonio, matemático griego, escribió en el siglo III a. de C. su magistral obra sobre las cónicas. Apolonio pensaba que sus investigaciones eran puras elucubraciones que no se aplicarían nunca, pero en el siglo XVII, Kepler, utilizando los numerosos datos de las observaciones del astrónomo Tycho Brahe, descubrió sus famosas leyes, la primera de las cuales afirma que cada planeta describe una elipse tal que en uno de sus focos se encuentra el sol, la segunda dice que el segmento rectilíneo que une el sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, y la tercera expresa, para dos planetas diferentes, la proporcionalidad entre los cuadrados de los períodos al girar alrededor del sol y los cubos de las distancias medias al sol. Posteriormente, Newton introduce la ley de la gravitación universal y adoptando la hipótesis simplificada de dos cuerpos, el sol y un solo planeta, fue capaz a partir de aquí de obtener matemáticamente las tres leyes de Kepler. Es natural pensar que si Kepler no hubiera conocido las cónicas, y, en particular, no hubiera sabido lo que es una elipse, difícilmente hubiera alcanzado a enunciar dichas leyes.

Otro ejemplo es el de un matemático húngaro, nacionalizado americano, John von Neumann, que se ocupó de los fundamentos de las matemáticas introduciendo en 1925 una famosa axiomática de la teoría de los conjuntos, en donde utiliza el concepto primitivo de clase. También trabajó en problemas de hidrodinámica, teniendo que manejar ciertas ecuaciones en derivadas parciales cuyas soluciones eran difíciles de estudiar. Entonces sintió que había necesidad de conseguir datos numéricos para estas soluciones, cuya observación iluminara un camino que condujera a la creación de una teoría. Esto le obligó a examinar el problema del cálculo con máquinas electrónicas. Durante los años 1944 y 1945, von Neumann aportó importantes descubrimientos sobre computación.

El matemático polaco Stanislaw Ulam, nacionalizado americano, amigo de von Neumann y que trabajó con éste en Los Alamos, en un proyecto de investigación atómica, dice que las aportaciones de von Neumann a la teoría de la computación están inspiradas en los artículos que escribió sobre fundamentos de las matemáticas. Esto pone de manifiesto que incluso la parte más abstracta de la matemática puede ser aplicada.

De todas formas, hay que tener en cuenta en las matemáticas mucho más que los aspectos meramente utilitarios. Así, la teoría de conjuntos infinitos, creada por el matemático alemán Cantor, a finales del siglo pasado y principios de éste, ha sido la base del gran desarrollo de la Lógica Matemática, uno de los mayores logros intelectuales de nuestro siglo. Por otra parte, la belleza de la teoría de conjuntos es extraordinaria. Cuando el alemán Frege publicó su obra en la que construye las matemáticas a partir de ciertos principios de lógica, Bertrand Russell comunicó a Frege una contradicción que se deducía de los principios utilizados por éste. Dicha contradicción es la famosa paradoja de Russell. Antes de Russell, se habían detectado paradojas en la teoría de conjuntos por Cantor mismo y por Burali-Forti, pero la paradoja de Russell, que además la había encontrado independientemente el matemático alemán Zermelo, es tan directa y clara que no es extraño que causara una gran conmoción en las matemáticas. Parecía que el edificio construido por Cantor se tambaleaba. Cuenta Fraenckel que alguien comunicó a David Helbert su preocupación por la existencia de las paradojas; la contestación de Hilbert fue la siguiente:

"Cantor construyó con su teoría de conjuntos un paraíso para los matemáticos, y no habrá nadie capaz de expulsarnos de él".

Quisiera citar aquí al matemático polaco Sierpinski, que dedicó su vida a la investigación de los conjuntos infinitos. Su tumba, en Varsovia, conforme a su deseo expresado muchos años antes de su muerte, tiene la siguiente inscripción:

Waclaw Sierpinski, 1882-1969, explorador del infinito.

Ahora voy a decir unas palabras sobre mi postura personal. No me he conformado con aprender matemáticas, sino que me he preocupado también por adquirir fuertes hábitos mentales en este campo, e incluso más, he incorporado las matemáticas a mi vida. He amado profundamente a mi profesión, con un calor casi religioso. Podría dirigirme a las matemáticas que conozco como Antonio Machado a los álamos de las márgenes del Duero, y les diría, conmigo vais, mi corazón os lleva.

Termino ya dando las gracias por el gran honor que me ha sido concedido y también por la atención que me han prestado.