BALITEKE MATEMATIKARIK GABEKO GIZARTE KULTOA?

2000-2001 ikasturteari hasiera emateko hitzaldia

Javier Duoandikoetxea Doktore (*)

2000. urtea, urte berezia da, mende amaiera guztiek duten mugarri itxura horrekin, milurte amaiera direnean areagotua. Baina ez dago berezia egiten duen arrazoi naturalik, geuk egin dugun jatorriaren aukerak eta kontatzeko erak -hau da, zenbakien sistemak- ematen diotenaz aparte. Zenbakiek egiten dutelako desberdin agian, *Matematikaren urtea munduan* ospatzeko aukeratu zuten.

Matematikaren Nazioarteko Elkarteak egin zuen ospakizunerako deia 1992an eta hiru helburu jarri zizkion:

- XXI. mendeko erronka nagusiak zehaztu,
- matematika garapenerako gakotzat aldarrikatu, eta
- matematikak informazioaren gizartean duen irudia hobetu.

1997an UNESCOren Biltzar Nagusiak izendapena lagundu eta babestu egin zuen eta, besteak beste, hezkuntza sistemaren maila guztietan trebakuntza matematikoak duen oinarrizko zeregina nabarmendu zuen.

Kongresu eta bilerak, hitzaldi zikloak, erakusketak, liburuak, artikuluak eta komunikabideetan ohikoa den baino agerpen handiagoa dira urteko ekitaldien erakusle, gure inguruan ere islatuta gelditu denez.

Eskerrak eman gura dizkiet Errektoreari eta bere taldeari Matematikaren urtearen ospakizuna kontuan hartu eta hasierako hitzaldia berari eskaintzeagatik. Ohorea eta ardura da niretzat hitzaldia emateko aukeratua izatea, aldi berean unibertsitateko matematika irakasleen ordezkari ere sentitzen naizelako nolabait, esango dudanaren erantzunkizuna neure gain bakarrik gelditzen den arren.

(*) Analisi Matematikoko Katedraduna

¿ES POSIBLE UNA SOCIEDAD CULTA SIN MATEMÁTICAS?

LECCIÓN INAUGURAL DEL CURSO ACADÉMICO 2000-2001

D. JAVIER DUOANDIKOETXEA (*)

(Agradecemos al Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco el habernos cedido este material, publicado en su servicio editorial).

El año 2000 es un año especial, con ese aspecto fronterizo que tienen los finales de siglo y más aún si lo son de milenio. Pero no hay ninguna razón natural para ello, es una característica que se debe solamente a nuestra elección de un origen y una manera de contar, es decir, a un sistema de numeración. Quizá porque son los números los que lo hacen diferente, fue elegido para celebrar el *Año Mundial de las matemáticas*.

La convocatoria fue hecha por la Unión Matemática Internacional en 1992 y se propusieron tres objetivos:

- fijar los retos principales del siglo XXI,
- proclamar la matemática como clave del desarrollo, y
- mejorar la imagen de las matemáticas en la sociedad de la información.

En 1997, la Conferencia General de la UNESCO dio su apoyo y patrocinio a esta celebración haciendo notar, entre otras cosas, el papel fundamental de la formación matemática en todos los niveles de la enseñanza.

Congresos y reuniones, ciclos de conferencias, exposiciones, libros, artículos y una presencia en los medios de comunicación más abundante de lo habitual están marcando la actividad de este año, como también se ha visto reflejado en nuestro entorno.

Quisiera agradecer al Rector y a su equipo que hayan tenido en cuenta la celebración del Año mundial de las matemáticas y decidido dedicarle esta lección inaugural. Es para mí un honor el haber sido elegido para impartirla, y a la vez una responsabilidad porque de algún modo me siento representante de mis compañeros profesores de matemáticas. En todo caso, soy el único responsable de las opiniones que pudiera expresar.

(*) Profesor de la UPV.
Departamento de Matemáticas

Zergatik uste dugu matematika garrantzizkoa dela?

Duela laurehun urte baino gehiago Pedro Simón Abril humanistak idatziriko hitz batzuk erabiliko ditut erantzuteko. Berrogei urtez irakasle ari izan eta gero, 1589. urtean, txosten bat zuzendu zion errege Felipe II.ari, hezkuntzan nabaritu zituen kalteak zuzentzeko asmoz. Txostenaren izenburua Apuntamientos de cómo se deben reformar las doctrinas(1) da (ikasketa plangintzak esango genuke gaur) eta hona hemen matematikaz zer zioen*:

Matematiketako okerrei buruz

> Matematiketan ezin izan da ustelkeriarik gertatu, benetako frogapen etan oinarritzen diren doktrinak izanik, zentzuaren eta eskarmentuaren arabera eginak, eta iritzi eta usteen aniztasunerako ezgauza direnak. Baina honen tamainako beste zorigaizto bat etorri zaie gainera, handiagoa ez bada; ez izanik dirua irabazteko doktrinak eta bai adimena goratzeko, ikasten dutenak, interesari begiratzen diotelarik benetako doktrinari baino gehiago, eurak ukitu gabe pasatzen dira. Eta hortik kalte handia datorkio errepublikari eta, bereziki, Berorren Maiestatearen zerbitzuari, matematika ez ikastetik baitator eskas izatea gerraren gauzetarako ingeniariak, nabigazioetarako pilotuak, eta eraikuntza eta gotorlekuetarako arkitektoak, hau guztia errepublikaren kalte handirako eta erregearen maiestatearen dezerbitzurako eta nazio osoaren irainerako baita, ingenioen kontuetan beti nazio arrotzetara joan behar baitu bila, ogasun publikoari galera larria ekarriz.
>
> Matematikek ez balituzte ere beren baitan -eta badituzte- hainbeste onura eta probetxu eta hain handiak, ez balute beste onik egingo ez bada gizonen adimenak ohitu gauzetan egia sendo eta seguruak bilatzen, iritzien aldakortasunagatik kulunka ibiltzen utzi gabe, honek suntsitzen baititu gehien doktrinak, onura honegatik bakarrik ez litzaieke gizonei utzi behar ezein zientzia motatara pasatzen aurretik doktrina matematikoak ikasi gabe; horrela sentitu baitzuen Platonek bere akademiaren sarreran txartel bat ipini zuenean, matematikarik ez zekienari ez sartzeko esanaz. Eta horrela sentitu zuen Aristotelesek ere, beste zientzietan matematiken adibideak baitakartza, eta ez zuen hau egin ez bada aurretik onartuta mutikoek jakingai matematikoak ikasi behar dituztela beste gauza guztien aurretik.
>
> Kalte larri hau erraz konponduko du Berorren Maiestateak matematikak herri hizkuntzan irakats ditzatela aginduz, Gortean horretarako duen eskolan ezarrita duen bezala, eta dekretatuz unibertsitate eta eskola publikoetan ez dezaten inor onartu ezein gradu motatara ez badu lehenago erakusten ondo ikasi dituela jakingai matematikoak".

Gaur egun berbak aldatuko genituzke, estiloa ere bai, baina mamia ez. Argi dioenez Simón Abrilek arrazoi bi daude matematikaren garrantzia bermatzeko: formazio orokorrerako balioa, batetik, eta hainbat ofiziotan ezinbestekoa izatea, bestetik.

1. Matematika kultura da

Ez gara eztabaidatzen hasiko ea matematika, edo zientzia orokorrean , kultura den ala ez, ez baitu inork ukatuko, hala uste dut behintzat. Baina unibertsitate-errektore batek (ez gureak) "matematikaz ezer ere ez dakiela" esanez kongresu bat zabaltzen duenean, kulturatzat eta kultura beharrezkotzat zer hartzen den aldea dagoela onartuko didazue behintzat. Beste zein gaitaz aldarrika daiteke ezer ez jakitea eta hala ere 'kultoa" izaten jarraitu? Dirudienez, batzuentzat matematika albo batera geldi daitekeen kulturaren parte da. (Ez dut esan barik

¿Por qué creemos que la matemática es importante?

Responderé con las palabras que escribió hace más de cuatrocientos años el humanista Pedro Simón Abril. Tras cuarenta años de docencia, en 1589, dirigió al rey Felipe II un informe titulado *Apuntamientos de cómo se deben reformar las doctrinas*[1] (hoy diríamos planes de estudio) con la intención de corregir los defectos que había observado en la educación. Esto es lo que decía de las matemáticas:

> **De los errores en las matemáticas**
>
> " En las matemáticas no ha podido caber depravación por ser doctrinas que consisten en verdadera demostración, hecha al sentido y experiencia, y no capaces de diversidad de opiniones y de pareceres. Pero hales caído otra desventura tan grande como ésta, si ya no es mayor, que por ser doctrinas que no son para ganar dinero, sino para ennoblecer el entendimiento, como los que estudian tienen más ojo al interés que a la verdadera doctrina, pásanse sin tocar en ellas. De donde viene gran daño a la república y particularmente al servicio de V. M., pues de no aprenderse matemáticas viene a haber gran falta de ingenieros para las cosas de la guerra, de pilotos para las navegaciones y de arquitectos para los edificios y fortificaciones, lo cual es en gran perjuicio de la república y deservicio de la majestad real y afrenta de toda la nación, pues en materia de ingenios ha de ir siempre a buscarlos a las extrañas naciones, con daño grave del bien público.
>
> Aunque las Matemáticas no tuvieran en sí, como los tienen, tantos y tan grandes bienes y provechos, no hicieran otro bien sino habituar los entendimientos de los hombres en buscar en las cosas la verdad firme y segura y no dejarse bambolear de la inconstancia de las opiniones, que es lo que más destruye las doctrinas, sólo por este bien no se les había de permitir a los hombres pasar a ningún género de ciencia sin que aprendiesen primero las doctrinas matemáticas, que así lo sintió Platón cuando puso un rótulo en la puerta de su academia diciendo que no entrase allí el que no supiese matemáticas. Y así también lo sintió Aristóteles, pues en las demás ciencias trae ejemplos de las matemáticas, lo cual él no hiciera sino presuponiendo que los mancebos deben aprender ante todas las cosas las disciplinas matemáticas.
>
> Este daño tan grave remediará fácilmente Vuestra Majestad mandando que las matemáticas se enseñen en lengua vulgar, como ya lo tiene dispuesto en la escuela que en su corte tiene hecha para ello, y haciendo decreto que en las universidades y escuelas públicas ninguno sea admitido a ningún género de grado sin hacer primero demostración de cómo ha estudiado muy bien las disciplinas matemáticas".

Hoy cambiaríamos las palabras y el estilo, pero no lo esencial de su contenido. Como muy bien dice Simón Abril, hay dos razones que avalan la importancia de las matemáticas: su valor formativo, por un lado, y el ser imprescindible en algunos oficios, por otro.

1. La matemática es cultura

No vamos a discutir si la matemática, o la ciencia en general, es cultura o no, porque creo que nadie lo va a negar. Pero cuando un rector de Universidad (no de ésta) inaugura un congreso diciendo que "no sabe nada de matemáticas", estarán de acuerdo conmigo en que hay alguna diferencia entre lo que se considera cultura y lo que se considera cultura necesaria. ¿De qué otros temas puede uno proclamar su ignorancia y pretender seguir siendo "culto"? Parece que la matemática pertenece para algunos a esa parte de la cultura de la que se puede utziko ifrentzua ere baduela jarrera honek.) Kontua da urteak joan, urteak etorri, oraindik ere zientzien eta letren mundua, "kultura biak", behar baino urrunago daudela.

1862. urtean argitaratu zen Victor Hugoren *Les Misérables* izeneko eleberri ospetsua. Zortzi liburukik osatzen dute lehen zatia eta hirugarrena *1817. urtean* deitzen da. Urte horren deskribapena egiterakoan honela dio pasarte batek:

> "Zientzi Akademian Fourier ospetsu bat zegoen, etorkizunak ahaztu duena, eta auskalo zein ganbaratan Fourier ilun bat, geroak gogoratuko duena".

Lehena, Jean Baptiste Joseph Fourier, matematikari eta fisikaria, beroaren hedapenaren gainean egindako lanengatik da ezaguna; bigarrena, Charles Fourier, soziologo eta filosofoa, *Batasun unibertsalaren Teoria* baten egilea. Hugoren lanaren komentatzaile batek ehun urte geroago hauxe idatzi zuen: "ez dago zalantzarik geroak hobeto gogoratzen duela Charles Fourier, Joseph Fourier baino"[(2)]. Ez nago ados. Ez dago zalantzarik Charles Fourier pertsonaia ospetsua dela gizarte zientzietan, baina zientzilari eta teknikarien artean Fourier oso izen famatua da , Josephi esker.

Egoera horrek gogora ekartzen dit Umberto Eco idazleak *Foucaulten pendulua* eleberria argitaratu zuenean egunkari ezagun bateko kritika hasten zela azaltzen izenburuko Foucault hura ez zela Michel Foucault filosofo eta historialaria, irakurleak uste zezakeen moduan, baizik eta XVIII. mendeko fisikari frantziar bat, Léon Foucault, Lurraren errotazioa frogatzeko Pariseko Panteoian pendulu bat eskegi zuena. Formazio zientifikoko irakurlearentzat oso argi zegoen izen burua, baina onartzen dut jende askorentzat abisua egokia eta beharrezkoa izan zitekeela.

Euclides (siglo V a.C.)
Euklides (K.a. V mendea)

Izenkidetasuna oinarri duten adibide bitxi hauek ekarri ditut kultur arazoetan sarritan alde bakarrera begiratzen dugula erakusteko balio dutelakoan.

Matematika kultura da baina askok ikusten du emaitza eta teknika multzo bat bezala, pertsonen partehartze barik. Irakaskuntzak ere bere errua du; baldintzak, teoremak eta frogapenak kateatzen ditugu eta ematen du ez dagoela aukerarik, hain dela dena perfektua non ezin den gizakiaren obra izan. Baina ez da horrela. Beste edozein giza jardueraren moduan sortu, hazi, aldatu, berritu eta eztabaidatu egin da, ez da beti berdina izan. Mendez mende garatu da eta bere historia du, eta historian aro desberdinak, zein bere ezaugarriekin. Interesgarria izango delakoan, ibilbidearen laburpena egingo dut.

prescindir. (No dejaré sin señalar que también existe la otra cara de la moneda.) El caso es que los años pasan y el mundo de las ciencias y el de las letras, las "dos culturas', siguen más alejados de lo que deberían.

En 1862 se publicó la conocida novela de Victor Hugo *Les Miserables*. La primera parte consta de ocho libros de los que el tercero lleva por título *"En el año 1817"*. Dice uno de los párrafos en los que describe dicho año:

> "Había en la Academia de Ciencias un Fourier célebre a quien la posteridad ha olvidado y en no se qué desván un Fourier oscuro de quien el futuro se acordará".

El primero, Jean Baptiste Joseph Fourier, matemático y físico, es conocido por sus trabajos sobre la propagación del calor; el segundo, Charles Fourier, sociólogo y filósofo, fue el autor de una *Teoria de la unidad universal*. Un comentarista de la obra de Hugo escribía cien años después: "no hay duda de que la posteridad recuerda mejor a Charles Fourier que a Joseph Fourier"[(2)]. Pues no estoy de acuerdo. No hay duda de que Charles Fourier es un personaje famoso en las ciencias sociales, pero para los científicos y técnicos el nombre de Fourier es muy popular, gracias a Joseph.

Es una situación que me recuerda a cuando el escritor Umberto Eco publicó su novela *El péndulo de Foucault* y la crítica de un conocido periódico comenzaba aclarando que el Foucault del título no era el filósofo e historiador Michel Foucault, como posiblemente el lector había pensado, sino un físico francés del siglo XVIII, Léon Foucault, que colgó un péndulo en el Panteón de París para probar la rotación de la Tierra. Para un lector con formación científica el título estaba muy claro, aunque reconozco que para mucha gente el aviso podía ser útil y necesario.

Arquímedes (siglo III a.C.
Arkimedes (K.a. III mendea)

Traigo estos curiosos ejemplos basados en la homonimia de los personajes simplemente como muestra de que en cuestiones de cultura muchas veces miramos a un solo lado.

La matemática es cultura, pero mucha gente tiene la impresión de que es un conjunto de resultados y técnicas sin intervención de personas. La enseñanza también tiene su culpa; encadenamos condiciones, teoremas y demostraciones como si no hubiera elección y queda todo tan perfecto que no puede ser obra humana. Pero no es así. Como cualquier otra actividad humana ha nacido, crecido, cambiado, se ha renovado y discutido, no siempre ha sido igual. Se ha desarrollado a lo largo de los siglos, tiene una historia con sus distintas edades, cada una con sus propias características. Creo que puede ser interesante hacer un resumen de su recorrido.

Greziar kulturaren aurreko zibilizazioetan aurki daitezke matematikaren lehen zantzuak. Haien ezagutza heldu zaizkigun hondarrekin saiatu behar dugu zehazten, arkeologoen antzera. Historiaurrea da nahiz gizakiaren aro historikoan gertatu.

Matematikaren Antzin Aroa grekoekin hasi zen. Miletoko Tales, Greziako zazpi jakintsuetako bat, izen ezaguna duen lehen matematikaritzat hartzen da; Kristo aurreko VI. mendean bizi zen. Mende bat geroago Samosko Pitagoras aurkitzen dugu, batzuk "teorema" hitzari ezinbestean lotzen dioten izena. Badakigu Crotonen (Calabria) eskola izan zuela eta pitagorikoek emaitza sakonak lortzeko gauza izan zirela, zenbaki arrazionalak (zenbaki osoen zatikiak) luzera guztiak adierazteko nahikoa ez direla, esate baterako.

Los "Elementos" de Euclides en latín

Filosofiaren garapenak eraginda, greziar matematikak gaur egun harrigarri izaten jarraitzen duen heldutasun maila lortu zuen eta Alexandriako Euklidesek Kristo aurreko N. mendean idatzitako Elementuak dira horren erakusle. Garaiko ezaguera matematikoa sistematikoki bildu eta era logiko-deduktiboan aurkeztu zuen, gaur egun egiten dugun moduan. Sirakusan (Sizilia) mende bat geroago Arkimedes bizi izan zen, Antzinateko zientifikorik handientzat hartzen dena. Hurrengo mendeetan oraindik puntako matematikari batzuk aurki daitezke greziar kulturan, baina erromatarren nagusitasuna zabaldu ahala egoera aldatzen hasi zen.

Kultura erromatarrak ez zuen matematikarako interes handirik erakutsi. Areago, zuzenbide erromatarrak matematika kondenatu eta debekatu egiten zuen (*ars mathe-matica damnabilis et interdicta est*) . Inperio erromatarra erori aurretik ere, matematika bere Erdi Aro luze eta ilunean sartu zen. Bertan San Agustinen moduko iritzi negatiboak gainditu beharko zituen; honek matematikari eta profeten aurrean adi egoteko ohartzen zuen jendea "arriskua baitago deabruarekin lotuta egon daitezen eta horregatik izpirituak aztoratu eta gizakiak infernuan hondora ditzaten"[(3)].

Matematikaren historia liburuetan Indian, Pertsian eta Arabian egindako ekarpenek betetzen dute aldi honen zatirik handiena. Arabiarrekin hain zuzen heldu ziren Mendebaldeko Europara orain erabiltzen ditugun zenbakiak, greziarrenak eta erromatarrenak baino egokiagoak kalkulatzeko orduan. Baina horretaz gain, matematikari greziarren lanak ekarri zituzten itzulita eta, une batetik aurrera, liburutegietan Euklidesen Elementuak ere gordetzen ziren garaiko jakintzaren artean. Unibertsitateak sortu eta liburu hori ikasgai bihurtu ahala, grekoen matematik bikain hura berreskuratzea eta, denbora emanez, gainditzea pentsa zitekeen.

Konstantinoplaren erortzeak eta Amerikaren aurkikuntzak munduaren historiari aro aldaketa ekarri zioten matematika bere Erdi Arotik irten gabe. Laster hasi zen Errenazimendua behar zen aldaketa bultzatzen baina XVII. mendeko azken herenera arte itxaron behar dugu Aro Modernoa hasten dela baieztatzeko. Hau Isaac Newton eta Gottfried Leibnizek sorturiko kalkulu

Los primeros signos de la matemática aparecen en civilizaciones anteriores a la griega. Su conocimiento se reconstruye a partir de los restos que nos han llegado igual que en arqueología. Es el periodo prehistórico aunque se sitúa en la época histórica de la humanidad.

La Edad Antigua en matemáticas empieza con los griegos. Tales de Mileto, uno de los siete sabios de Grecia, que vivió en el siglo VI antes de Cristo, es considerado como el primer matemático de nombre conocido. Un siglo después encontramos a Pitágoras de Samos, cuyo nombre muchos asocian inevitablemente a la palabra "teorema". Sabemos que tuvo una escuela en Crotona (Calabria) y que los pitagóricos fueron capaces de obtener resultados profundos como la imposibilidad de expresar todas las longitudes con sólo números racionales (fracciones de números enteros).

Euklidesen “Elementuak” latinez

Influida por el desarrollo de la filosofía, la matemática griega alcanzó rápidamente un nivel de madurez que hoy nos sigue asombrando. Así lo muestran los *Elementos* de Euclides de Alejandría, compuestos en el siglo IV antes de Cristo. Recogen sistemáticamente el conocimiento matemático de la época y lo presentan al modo lógico-deductivo, similar al actual. En Siracusa (Sicilia) vivió un siglo más tarde Arquímedes, considerado el científico más grande de la Antiguedad. Todavía en los siglos posteriores podemos encontrar destacados matemáticos en la cultura griega pero el panorama fue cambiando a medida que los romanos imponían su dominio.

La cultura romana no mostró gran interés por la matemática. Más bien al contrario, el Derecho Romano la condenaba y prohibía *(ars mathematica damnabilis et interdicta est).* Antes de la caída del imperio romano la matemática ya había entrado en su oscura y larga Edad Media, en la que tuvo que enfrentarse a opiniones negativas como la de San Agustín que prevenía contra matemáticos y profetas "porque hay peligro de que estén relacionados con el diablo y, por esa razón, turben los espíritus y hundan a los hombres en el infierno"[(3)].

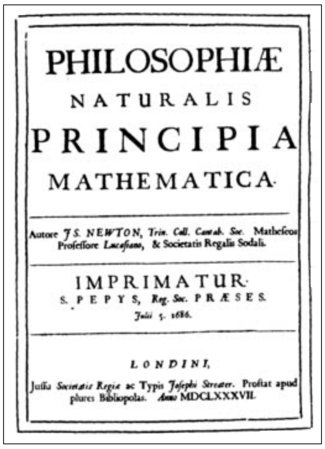
En los libros de historia de la matemática la mayor parte de este periodo se cubre con aportaciones de India, Persia y Arabia. Fueron precisamente los árabes quienes trajeron a Europa Occidental los números que ahora utilizamos, más adecuados para el cálculo que los de griegos y romanos. Pero además trajeron las obras de los matemáticos griegos en sus traducciones y los Elementos de Euclides acabaron por ocupar un lugar en las bibliotecas entre el saber de la época. A medida que se creaban universidades y este libro se convertía en materia de estudio, se podía por fin pensar en recuperar la excelente matemática griega y, con el tiempo, superarla.

La caída de Constantinopla y el descubrimiento de América marcaron un cambio de época en la historia del mundo sin que las matemáticas saliesen de su Edad Media. Pronto el Renacimiento empezó a dar impulso al cambio, aunque habrá que esperar hasta el último infinitesimalarekin gertatu zen. Shakespeare eta Cervantes berrogeita hamar urte lehenagotik hilda zeuden eta Axularren Gero, euskal literatura berantiarraren erreferentziako liburua, hogei urte baino gehiagokoa zen.

XVII. mendean izen nabarmenak aurkitzen ditugu: Keplerek planeten higiduraren legeak utzi zizkigun (aurreko mendearen erdialdera Kopernikok Eguzkiaren inguruan biraka "ipini" baitzituen), Descartesek ekuazio algebraikoak kurbei lotu zizkien eta Fermatek zenbakien teoria modernoa sortu zuen, kalkuluaren aitzindari izateaz gain. Baina denen artean Newtonek merezi du aipamen berezia.

Pierre de Fermat (1601-1665)

Zientzilari aparta izan behar da higiduraren oinarrizko legea formulatzeko, *indarra = masa x azelerazioa*, grabitate-indarraren adierazpena emateko eta lortzen den ekuazio diferentziala ebaztea posible egiten duen kalkulu infinitesimala sortzeko. Hori guztia egin zuen Newtonek 1666ko *annus mirabilis* hartan eta 1687an argitaratu zuen *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* liburuan, inoiz literatura zientifikoan egon den lanik gorenetakoa[4]. Kepleren legeak behaketen ondorio izatetik ekuazioetatik ateratzera pasatu ziren. Kalkulu infinitesimalaren arrakasta itzela izan zen eta fisikaren beste arlo batzuetara zabaldu zen; honenbestez, matematika fisikaren hizkera bihurtu zen betiko eta arrazoi eman zien hainbat bider entzun ditugun Galileoren hitzei "unibertsoaren liburua hizkera matematikoz idatzita dago"[5].



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

"Philosophiae naturalis. Principia mathematica" Isaac Newton

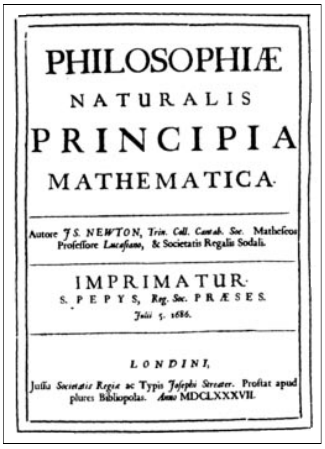
Hemen jartzen dute batzuk "kultura bien" arteko betiko banantzea, filosofia naturalak -hau da, fisikak- aurrerantzean hartu zuen itxura teknikoak filosofoak gainditu zituelakoan. Gainera aldatu egin zuen matematikaren eginkizuna aplikazioetan, orain prozesu baten bilakaera aztertzeko ere balio baitzuen, hau da, igartzeko eta ez bakarrik deskribatzeko, ordura arte izan zen moduan. Baliteke San Agustin zuzen egotea matematikariak eta igarleak nahastuz.

tercio del siglo XVII para poder afirmar que comienza la Edad Moderna con el descubrimiento del cálculo infinitesimal por Isaac Newton y Gottfried Leibniz. Shakespeare y Cervantes habían muerto cincuenta años antes y hasta el *Gero* de Axular, obra de referencia de la tardía literatura vasca, tenía ya más de veinte años.

En el siglo XVII hay ya nombres destacables como Kepler con sus leyes del movimiento de los planetas (que Copérnico había "puesto" girando alrededor del Sol a mediados del siglo anterior), Descartes ligando ecuaciones algebraicas a las curvas y Fermat, creador de la moderna teoría de números y pionero del cálculo, pero entre todos ellos es Newton quien merece una mención especial.

Isaac Newton (1613-1727)

Hay que ser un cientifico excepcional para formular la ley fundamental de la dinámica, *fuerza = masa x aceleración*, dar la expresión de la fuerza gravitatoria, y producir el instrumento matemático capaz de resolver la ecuación diferencial resultante. Todo esto lo hizo Newton en su *annus mirabilis* de 1666 y lo publicó en 1687 en su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, una de las obras cumbre de la literatura científica de todos los tiempos[4]. Las leyes de Kepler pasaron de ser consecuencia de la observación a deducirse de las ecuaciones. El éxito del cálculo infinitesimal fue enorme y se extendió a nuevas áreas de la física con lo que la matemática se convertía en el lenguaje de ésta para siempre dando la razón a las tan a menudo repetidas palabras de Galileo "el libro del universo está escrito en lenguaje matemático"[5].



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

"Filosofía Natural. Principios matemáticos"
Isaac Newton

Algunos señalan este punto como la separación definitiva de las "dos culturas" al sentirse los filósofos desbordados por el aspecto técnico que la filosofía natural, o sea, la física, adquirió en adelante. Además cambió el papel de la matemática en sus aplicaciones, ya que ahora también servía para estudiar la evolución de un proceso, es decir, para predecir, y no sólo para describir como hasta entonces. Quizá San Agustín tenía razón juntando a matemáticos y profetas.

Historiak eman dituen matematikari garrantzi eta eragin handienetako bi elkarren atzetik datoz. Leonhard Euler eta Carl Friedrich Gauss. Lehena, Basileako suitzarra, San Petersburgo eta Berlingo Akademietan ari izan zen lanean bizitza osoan eta Argien Mendeko matematikaririk nabarmenena izan zen. Eulerek, matematika hutsari eskaini zion lan ikaragarriaz gain, mekanika newtondarra kalkulu infinitesimalaren hizkeran idatzi zuen, eta solidoen eta fluidoen higidura deskribatzen duten ekuazioak formulatu zituen. Gaussen jarduerak XIX. mendeko lehen erdia bete zuen eta haren lanek matematikaren arlo askotan gailurra jo zuten, horregatik jarri zioten "matematikarien printzea" goitizena. Gainera haren errigorea matematikak laster hartuko zituen bide berriekin ondo bateratu zen.

Bitartean klasiko bihurtu diren liburuak argitaratu ziren Frantzian: Lagrangeren *Mécanique analytique* (1788), lehenengoz mekanika baliabide geometriko barik aurkezten duen lana, Laplaceren *Mécanique céleste* (1799-1819) eta *Théorie analytique des probabilités* (1812), eta Fourieren *Théorie analytique de la chaleur* (1822).

Leonhard Euler (1707-1783)

1789an Iraultza Frantsesa gertatu zen eta historiaren bilakaera berriro aldatu zen. Laster sortu ziren Parisen *École Polytechnique* (1794) "gerrako gauzetarako ingeniariak" prestatzeko, Simón Abrilek zioen moduan, eta *École Normale* (1795), irakasleen formaziorako. Matematikaren irakaskuntza antolaturako eredu izan ziren eta bertako ikastaroetan oinarrituriko testuliburuak idatzi ziren. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821) delakoan, Augustin Cauchyk analisi matematikoari artean ez zeukan errigorea emateko lana hartu zuen bere gain. XIX. mendean zehar matematikariek errigorearen itzulera hau onartu egin zuten eta behinbetikoa gertatu da. Aro Garaikidea da.

Matematikaren garapena XIX. mendean izugarria izan zen, kantitatez eta kalitatez. Hogei mende baino gehiago pasatu ondoren Euklidesen bosgarren postulatuaren independentzia frogatu zen Nikolai Lobatxevski eta János Bolyairen lanekin (Gaussek ez baitzuen gai honetaz egin zuen lana argitaratu); fisika modernorako hain garrantzizkoak diren geometria ez euklidearrak sortzeko bidea zabaldu zuten, honenbestez. Teoria orokor baten bultzatzaileetako bat Bernhard Riemann bikaina izan zen; honek, gazterik hil arren, gaur arte matematikaren zenbait arlotan garapen iturri izan diren lanak utzi zizkigun.

Erregela eta konpasa bakarrik erabiliz eraiketa bana eskatzen zuten hiru problema klasiko, zirkulua koadratzea, kuboa bikoiztea eta angelua hirutan zatitzea, ebatzi barik heldu ziren grekoen matematikatik XIX. mendera arte eta hirurak ezezko erantzuna hartu zuten mende horretan (zirkuluaren koadratura ezinezkoa da, beraz, “zale” batzuk oraindik lortzeko ahaleginean ari badira ere). Ekuazio algebraikoen erradikalen bidezko ebazpenarekin erlazionaturik daude; teoria hau burutu zutenen artean, oso gazterik hil ziren Niels Henrik Abel eta Evariste Galois aipatu behar ditugu. Azken honen lanetan aurkitzen dira, hain zuzen ere, taldeen teoria modernoaren hastapenak.

Dos de los más grandes e influyentes matemáticos de la historia se sucedieron en el tiempo: Leonhard Euler y Carl Friedrich Gauss. El primero, suizo de Basilea, pasó su vida en las Academias de San Petersburgo y Berlín y fue la figura matemática del Siglo de las Luces. Además de una inmensa labor puramente matemática, Euler puso la mecánica newtoniana en el lenguaje del cálculo infinitesimal y formuló las ecuaciones del movimiento de un sólido y de un fluido. Gauss, cuya actividad matemática llena toda la primera mitad del siglo XIX, fue reconocido en su tiempo como "príncipe de los matemáticos" por sus trabajos en los que se situó en la cumbre de muchas áreas de las matemáticas. Además su rigor se adaptó a los nuevos rumbos por los que pronto se desenvolvió la matemática.

Entretanto en Francia se publicaron libros que se convertirían en grandes clásicos: la *Mécanique analytique* de Lagrange (1788), que presentó por primera vez la mecánica sin recursos geométricos; la *Mécanique céleste* (1799-1819) y la *Théorie analytique des probabilités* (1812) de Laplace; y la *Théorie analytique de la chaleur de Fourier* (1822).

Carl Friederich Gauss (1777-1855)

En 1789 tiene lugar la Revolución Francesa, que cambió de nuevo el curso de la historia. Poco después se crearon en París la *École Polytechnique* (1794) para preparar ingenieros "para las cosas de la guerra" que decía Simón Abril, y la *École Normale* (1795) para la formación de maestros. Fueron un modelo para la enseñanza organizada de las matemáticas y se escribieron libros de texto basados en sus cursos. En el *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* (1821) Augustin Cauchy se impuso la tarea de dar al análisis matemático el rigor que aún no había conseguido. Los matemáticos asumieron a lo largo del siglo XIX esta vuelta al rigor, que ha resultado definitiva. Es la Edad Contemporánea.

El desarrollo de la matemática en el siglo XIX fue enorme, tanto en cantidad como en calidad. Después de más de veinte siglos, se puso de manifiesto la independencia del quinto postulado de Euclides por Nikolai Lobatchevsky y János Bolyai (Gauss nunca publicó sus trabajos sobre este tema), que así abrieron el camino a la creación de las geometrías no euclídeas, tan importantes para la física moderna. Uno de los impulsores de una teoría general fue el genial Bernhard Riemann quien, a pesar de su temprana muerte, dejó publicados varios trabajos que han sido fuente de inspiración desde entonces en diversas áreas de la matemática.

Cuadratura del círculo, duplicación del cubo y trisección del ángulo eran los tres problemas clásicos de construcción con regla y compás que procedentes de la matemática griega llegaron al siglo XIX sin solución; los tres encontraron respuesta negativa en ese siglo (en particular, la cuadratura del círculo es imposible, aunque algunos "aficionados" sigan empeñados en conseguirla). Están relacionados con la resolución de ecuaciones algebraicas por radicales en cuya teoría intervinieron dos matemáticos que murieron muy jóvenes, Niels Henrik Abel y Évariste Galois. En los trabajos de éste aparecen los inicios de la moderna teoría de grupos.

Agustin-Louis Cauchy
(1789-1857)

Bernhard Riemann
(1826-1866)

Karl Weierstrassek eragin handia izan zuen Berlingo katedratik eta orain aurkezten dugun moduko itxura zehatza eman zion analisi matematikoari; gainera, XIX. mendean funtzio konplexuen analisia eratu zuten hiru ikuspuntu osagarrietako bat zor diogu (beste biak Cauchy eta Riemannen eskutik heldu ziren). Aipagarria da, halaber, Georg Cantor, sakon aztertu baitzituen puntuen multzoak eta infinitua objektu matematiko bezala ulertzeko aurrerapenak utzi baitzizkigun.

Sortze lanarekin batera ahalegin handia egin zen matematika argitu eta euskarri sendoetan finkatzeko eta, honen ondorioz, matematikaren oinarrien azterketa sakona bideratu zen. Gaurko matematikaren edukiak eta ibilbidea ulertzeko, XIX. mendea funtsezkoa gertatu zen.

Izen bi ditugu XX. mendeko sarreran beste izen handi askoren ordezkari: Henri Poincaré frantziarra eta David Hilbert alemana. Biak ziren sortzaile handiak eta mende honetan matematikak ibili dituen bideetan eragin handikoak suertatu dira. 1900. urtean Parisen egiri zen Matematikarien Nazioarteko Kongresuan hitzaldi bat eman zuen Hilbertek; bertan, hastear zegoen mendean bere iritziz matematikaren ildoa markatuko zuten hogeita hiru problemak formulatu zituen.

Göttingen hiri txikia munduko gune matematikorik garrantzitsuena izan zen E. mendeko lehen laurdenean Hilberti esker. Ez da harritzekoa Göttingenek mekanika kuantikoaren formulazio matematikoan izan zuen garrantzia. Hilbert arlo askotan nabarmendu zen baina matematikaren eraiketa formalerako proposatu zuen programa, matematikako galdera guztiek axiomen sistemaren barruan erantzuna dutelako ideia, okerra zen: Kurt Godelek 1931n argitaratu zuen osotasunik ezaren teoremak dioenez, edozein axioma sistema finituk proposizio erabakiezinak ditu, hau da, proposizio batzuk egia ala gezurra diren erabakitzea ezinezkoa da sistemaren barruan.

Esan ohi da Hilbert eta Poincaré izan zirela matematikaren arlo guztiak ezagutzen azkenak. Esaldia hitzez hitz hartu zein ez, egia da E. mendeko matematikak espezializazio handiko bidea hartu zuela eta arlo bakoitza sakonago aztertzera eroan duen arren, norberarenak ez diren arlo gehienetatik urruntzea ere ekarri duela. Horregatik matematikaren historia orokorrak Bigarren Mundu Gerrara heldu baino lehen amaitzen dute kontakizuna eta lan berezien esku uzten dute jarraipena.

Bigarren Mundu Gerrak historiaren bilakaera aldatu egin zuen eta matematikaren gainean ere eragin zuen. Ordura arteko nagusitasuna Frantzia eta Alemaniaren artean banatu bazen, Europaren erdialdeko zientifikoen emigrazioak Estatu Batuetara eraman zuen lehen aldiz eragin gunea, eta politikan bezala matematikan ere Soviet Batasunarekin batera indar nagusiak izan ziren. Azken honen desagerpenak matematikarien beste emigrazio uhin bat ekarri du


Henri Poincaré (1854-1912)


David Hilbert (1862-1943)

Karl Weierstrass desde su influyente cátedra de Berlín dio al análisis matemático la forma rigurosa en que hoy lo presentamos; es, además, responsable de uno de los tres puntos de vista complementarios (los otros dos son debidos a Cauchy y Riemann) que formaron en el siglo XIX el análisis de funciones complejas. También es digno de mención Georg Cantor, que estudió en profundidad los conjuntos de puntos y avanzó en la comprensión del infinito como objeto matemático.

El trabajo de creación llevó aparejado un amplio esfuerzo que, con objeto de clarificar y dar bases firmes a la matemática, condujo a un estudio profundo de sus fundamentos. El siglo XIX resulta crucial para entender la matemática de hoy, tanto en sus contenidos como en su trayectoria.

La entrada al siglo XX viene representada por dos nombres que sobresalen entre otros grandes: el francés Henri Poincaré y el alemán David Hilbert. Ambos fueron grandes creadores e influyeron fuertemente en los caminos de la matemática de este siglo. En 1900, Hilbert pronunció una conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en la que propuso los que a su juicio eran los veintitrés problemas que iban a marcar el interés de la matemática en el siglo que entraba.

La pequeña ciudad alemana de Gotinga se convirtió, gracias a Hilbert, en el principal centro matemático del mundo del primer cuarto del siglo XX. No es de extrañar que Gotinga tuviese un importante papel en la formulación matemática de la mecánica cuántica. Hilbert destacó en muchos aspectos, pero su programa de construcción formal de la matemática, su idea de que todo problema matemático tiene una respuesta dentro del sistema axiomático, resultó no ser acertada: el teorema de incompletitud que Kurt Godel publicó en 1931 afirma que en todo sistema finito de axiomas existen proposiciones indecidibles, es decir, proposiciones cuya validez o refutación no se pueden decidir dentro del sistema.

Se suele decir que Poincaré y Hilbert fueron los últimos en conocer todas las ramas de la matemática. Tomada la frase en sentido literal o no, lo cierto es que la matemática del siglo XX entró en un proceso de fuerte especialización que ha llevado a estudiar cada área con mayor profundidad pero también a alejar a los matemáticos de la mayor parte de las áreas ajenas. Es por ello que las historias generales de la matemática terminan su relato antes de la Segunda Guerra Mundial y suelen dejar a trabajos especializados la continuación.

La Segunda Guerra Mundial cambió el curso de la historia y tuvo sus efectos sobre la matemática. Si hasta entonces la hegemonía se la repartían entre Francia y Alemania, la emigración de científicos centroeuropeos trasladó por primera vez el centro de acción a Estados Unidos, que junto con la Unión Soviética se convirtieron en los países poderosos también en matemáticas. La desaparición de esta última ha traído recientemente una nueva ola de emigración de oraintsu. Dena dela, "globalizazio" egoera batean gaude, orain esaten den moduan, eta komunikatzeko erraztasunak matematika munduko ia edozein lekutan burutzea ahalbidetzen du.

Beste alde batetik, ordenadoreek garrantzi handiko egitekoa izan dute mendearen bigarren zatiko jarduera matematikoan. Eraikitzeko behar izan zen ikerketa "gerraren gauzek" bultzatu zuten baina azken ean bizitzaren alde guztietara sartu zaizkigu. Ordenadoreek posible egin dute kalkulu izugarri luzeak denbora errealean ematea, matematikaren aplikazio praktikoen eremua asko handituz; eurekin dakartzaten zenbakizko metodoen azterketa helburu duten matematikaren arloak ezinbestean garatu dira.

Cervantes, Shakespeare, Molière, Goethe, Proust, Joyce edo García Lorca literaturarako, eta Vivaldi, Bach, Mozart, Beethoven edo Wagner musikarako direnaren parekoak dira aipatu ditudan pertsonaiak. Haien izenak behintzat, zenbat pertsona kultok ezagutzen ditu?

2. Matematika erabilgarria da

Askorentzat matematikariak lan gogor batean ari dira, helburua lortzeko ahalegin handia eskatzen duena eta helburu honek, azken batean, ez du ezertarako balio. Antzeko zerbait nabarituko zuen Lionel Terray frantziar alpinista ezagunak eskaladak egin eta gero, hirurogeiko hamarkadan *Ies conquérants de l'inutile (Alferrikakoaren konkistatzaileak)* izeneko liburua idatzi zuenean. Beti pentsatu dut matematikariei buruzko liburua izan behar zuela.

Matematikaren baliagarritasuna defenditzeko Simón Abrilen hitzetara joan gintezke berriro eta esan matematikak benetan burua formatzeko eta antolatzeko balio badu, erabilgarritasun nahikoa duela. Izan ere, Platonentzat ezagutzea zen zientziaren benetako balioa eta arrunta iruditzen zitzaion "merkataritzako helburuak" zituena. "Naturaren azterketa sakona da aurkikuntza matematikoen iturri nagusia"[(6)] idatzi zuen Fourierek XIX. mendean, zehaztugabeko galderak alboan utzi eta funtsezko elementuak erakusten dituelakoan. Abel eta Jacobi kritikatu egin zituen beroaren hedapena aztertzeari ez ekitearren eta Jacobik iritzi horrekiko bere desadostasuna adierazi zuen Legendreri idatzitako eskutitz batean (1830)[(7)]:

> "Egia da M. Fourierek uste zuela matematikaren helburu nagusia erabilera publikoa eta naturaren fenomenoen azalpena dela, baina bera zen moduko filosofo batek jakin beharko zuen zientziaren helburu bakarra giza izpirituaren ohorea dela eta, honen izenean, zen bakiei buruzko kontu batek munduaren sistemari buruzko beste batek adina balio duela".

Ez du inolako zentzurik matematika hutsa eta matematika aplikatua entitate bananduak bailiran aurkeztea -ez baitaude bananduta- eta aurkako interesak bailituzten. Armand Borelek erabiltzen duen irudiarekin gelditzen naiz: matematika iceberg baten modukoa da, uretik kanpo ikusgai dagoen zatia aplikazioen matematika da eta murgilduta dagoena, ikustezina gehienentzat, matematika teorikoa; hau kenduz gero, bestea desagertu egiten da[8].

Matematika erabilgarria da eta bera barik ezinezkoa izango zen bizi garen mundu teknologikoaren garapena eta ulermena. Ez du honek esan gura, hala ere, rnatematika osoak duela erabilera praktikoa, ez eta matematikan (edo beste zientzietan) egiten den oinarrizko ikerketaren helburu bakarra aplikatu bihurtzean datzala, lortu arte porrota izango bailitzan.

Edozein modutan, atal honetarako dudan helburua ez da matematika teorikoaren defentsa egitea, icebergaren kanpoaldeko alderdi batzuk erakustea baizik, matematikak mundu errealean dituen zenbait apl ikazio aurkeztuz.

matemáticos. Con todo, asistimos en este momento a un fenómeno de "globalización", como ahora se dice, en el que la facilidad de comunicación permite desarrollar la actividad matemática en casi cualquier lugar del mundo.

Por otra parte, los ordenadores han tenido un papel importante en el trabajo matemático de la segunda mitad del siglo. También "las cosas de la guerra" impulsaron la investigación necesaria para su construcción pero han acabado por estar presentes en todos los aspectos de nuestra vida. Los ordenadores han hecho posible realizar enormes cálculos en tiempo real, abriendo un gran campo de aplicaciones prácticas para las matemáticas, lo que ha traído consigo el desarrollo de las áreas de éstas destinadas al estudio de los métodos numéricos asociados.

Los personajes que he citado son lo que Cervantes, Shakespeare, Molière, Goethe, Proust, Joyce o García Lorca son para la literatura, lo que Vivaldi, Bach, Mozart, Beethoven o Wagner son para la música; ¿cuántas personas cultas conocen al menos sus nombres?

2. La matemática es útil

Mucha gente ve a los matemáticos como personas dedicadas a una actividad dura, que requiere un gran esfuerzo para conseguir un objetivo que, en realidad, no sirve para nada. Algo así debió de percibir tras sus escaladas Lionel Terray, famoso alpinista francés, que escribió en los años sesenta un libro titulado *les conquérants de l'inutile (los conquistadores de lo inútil)*. Yo siempre pensé que ese libro tenía que tratar sobre matemáticos.

Para defender la utilidad de las matemáticas podríamos recurrir de nuevo a las palabras de Simón Abril y decir que si realmente sirven para una mejor formación y organización de la mente, ya es suficiente utilidad. De hecho, para Platón el conocimiento era el auténtico valor de la ciencia y consideraba vulgar a la que tenía "fines mercantiles". En el siglo XIX encontramos a Fourier diciendo que "el estudio profundo de la Naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos"[(6)] porque permite excluir las cuestiones vagas y descubrir los elementos esenciales; habiendo criticado a Abel y a Jacobi por no dedicarse a estudiar la propagación del calor, éste último mostró su desacuerdo en una carta a Legendre (1830)[(7)]:

> "Es verdad que M. Fourier opinaba que el objeto principal de las matemáticas era la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales, pero un filósofo como él debería haber sabido que el fin único de la ciencia es el honor del espíritu humano y que, por este motivo, una cuestión de números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo".

No tiene sentido presentar a la matemática pura y la matemática aplicada como entidades separadas -que no lo están- y con intereses en frentados. Me quedo con la imagen que utiliza Armand Borel al decir que la matemática es como un iceberg, cuya parte emergida y visible es la matemática de las aplicaciones y cuya parte sumergida, oculta para la mayoría, es la matemática teórica; si prescindimos de ésta, la otra desaparece[(8)].

La matemática es útil y sin ella no sería posible ni el desarrollo ni la comprensión del mundo tecnológico en que vivimos. Pero esto no quiere decir que toda la matemática tenga una utilidad práctica ni mucho menos, ni tampoco que el único objeto de la investigación básica en matemáticas (o en otras ciencias) sea el de convertirse en aplicada, de modo que es una actividad fracasada hasta que lo consiga.

Pero en realidad mi objetivo en esta parte no es tanto defender la matemática teórica como hablar de algunos aspectos de la parte emergente del iceberg, de las aplicaciones de la matemática al mundo real.

Matematika hasieratik dago munduaren azalpen bati lotuta. Dela zeruen deskripabena dela Lurrarena, biak izan ziren antzinako zibil izazioen helburu eta zenbakiak eta geometria arazo praktikoetarako erabili ziren. Kalkulu infinitesimalaren sorrerak ate ugari ireki zituen, fenomeno naturalez arduratzen diren zientzietan matematizazio handia eraginez. Benetan harrigarria da errealitate konplexua abstrakzio mota erraz samar batera bideratu izana eta kalkuluak aurresaten duena errealitatearekin bat etortzea hain modu zehatzean. Eugene Wigner fisikariak oso ezagun egin den artikulu bat argitaratu zuen 1960an, *Matematikaren arrazoitu ezineko eraginkortasuna naturaren zientzietan*[9] izenburupean, eta hau irakur daiteke bertan: “matematikaren izugarrizko erabilgarritasuna naturaren zientzietan [fisika barne, jakina] misterioaren mugan dago eta ez du azalpen arrazionalik" eta "matematikaren hizkera fisikaren legeen formulazioetara egokitzearen miraria opari liluragarria da, ez dugu ulertzen eta ez dugu merezi". Baina hor dago, badakigu zelan erabili eta zer egin dezakegun berarekin, arrakastaren zergatia magikoa dirudien arren.

Gutxi-asko, denek onartzen diote matematikari aipatu berri dudan erabilera hori. Baina ezagutzen ez dutenek uste izaten dute, eguneroko bizitzan matematika elementalak duen praktikotasuna alde batera utzita, aplikazio interesgarri bakarrak naturaren zientzietako eredu horiek direla. Horregatik bestelako erabilerak aukeratu ditut aurkezpen honetarako: medikuntzaren irudiak eta finantzen mundua.

Esaten da hitzaldi matematiko guztietan teorema bat sartu behar dela. Ez dut hutsik egingo eta teorema bat erakutsiko dizuet. Ez da oso teorema ezaguna, baina neuri ederra iruditzen zait, matematikan ere edertasunaren inguruko iritziak beti pertsonalak direla onartuta, jakina. Bohemian jaio eta Vienan lan egin zuen Johann Radon matematikariari zor diogu, 1917an argitaratu zen, eta honela dio: *planoan definiturikofuntzio bat lerrozuzen guztien gainean egindako integralen bitartez erabat berreskuratzen da*. Matematikariok dugun berbaera berezi honek jokoz kanpo utziko zuen bat baino gehiago, esandakoa ulertu ezinik. Adibide erraz bat emango dut jarraipena ulertzeko nahikoa izango delakoan.

Demagun multzo bat dugula planoan eta zenbait zulo dituela barrual dean, irudian ikusten den bezala. Egin dezagun lerro zuzen bat eta neur dezagun multzoa ebakitzean ematen duen luzera; gero gauza bera egingo dugu beste zuzen guztiekin. Radonen teoremaren bertsio berezi baten arabera luzera holien guztien zerrenda ematen badizkigute barruko zuloen forma eta kokalekua erabat zehaz dezakegu.

Emaitza teoriko polit bat dugu, baina zertarako balio lezake? Allan Cormack fisikari hegoafrikarrak, 1963 eta 1964an argitaratu zituen lan batzuetan, ikustezina ikusteko erabiltzea proposatu zuen, giza gorputzaren barruko irudiak lortzeko, alegia. Gorputzaren sekzio batek aipaturiko multzoaren antza du baina konplikatuagoa da. X izpiak lerro zuzenetan hedatzen direla kontuan hartuz batetik, eta intentsitate-galera ibilitako bidearen luzeraren eta medioaren dentsitatearen proportzionala dela bestetik, kalkulu matematiko batek erakusten du norabide batean sarrerako eta irteerako intentsitateak neurtuz, norabide horren gaineko dentsitatearen integrala neurtuta dugula. Irudiko adibidearen kasuan dentsitatearen balio bi bakarrik hartu ditugu, bat multzoan eta bestea zuloetan, horregatik zen nahikoa luzera ezagutzea. Giza gorputzaren ebaketarako dentsitatea aldakorra da, baina Cormacken metodoa erabilita Radonen teoremak dentsitatearen funtziorako eskatzen dituen integralak lor daitezke gorputza ebaki eta barruan "sartu" gabe. Ematen du Radonen *inbertsio formula* ezartzea baino ez dugula behar dentsitatearen funtzioa berregiteko, hau da, gorputzaren barrualdea "ikusteko".

Baina mundu errealeko matematikak ezaugarri berezia du: kalkulagarria izan behar du. Oztopo bat dugu Radonen teorema erabiltzeko, ezin ditugula lerro guztien gaineko neurriak

Desde el principio la matemática aparece ligada a una explicación del mundo, tanto la descripción de los cielos como la de la Tierra son objetivo de las civilizaciones antiguas y los números y la geometría se usan con fines prácticos. La creación del cálculo infinitesimal abrió muchas puertas y las ciencias que se ocupan de los fenómenos naturales sufrieron una fuerte matematización. Resulta ciertamente sorprendente que una realidad compleja se haya podido reducir a una forma de abstracción relativamente sencilla y que las predicciones de ésta se ajusten tan bien a la realidad. El físico Eugene Wigner publicó en 1960 un artículo que se ha hecho famoso, titulado *La irrazonable eficacia de las matemáticas en las ciencias naturales*(9), en el que se puede leer: "la enorme utilidad de las matemáticas en las ciencias naturales [incluyendo la física, por supuesto] es algo que bordea lo misterioso y para la que no hay explicación racional" y "el milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas a la formulación de las leyes de la física es un maravilloso regalo que ni entendemos ni merecemos". Pero ciertamente está ahí, sabemos cómo usarla y qué podemos hacer con ella, aunque la razón de su éxito parezca mágica.

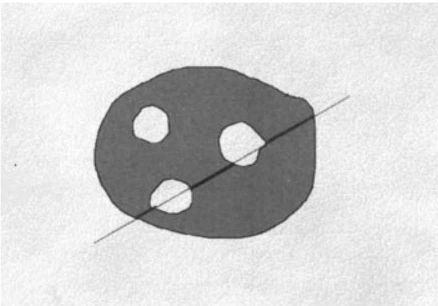
De un modo u otro, todos parecen aceptar esta aplicación de la matemática. Pero quienes no la conocen tienden a creer que, dejando aparte el uso de la matemática elemental en la vida cotidiana, todas las aplicaciones interesantes se reducen a estos modelos para las ciencias de la naturaleza. Por ello he elegido otro tipo de aplicaciones para esta presentación: las imágenes médicas y el mundo de las finanzas.

Solemos decir que en todas las charlas matemáticas debe presentarse un teorema y voy a aprovechar la ocasión. No es un teorema muy conocido, aunque a mí me parece precioso, lo que no deja de ser un apreciación personal, como todo lo que se refiere a cuestiones de belleza, también en matemáticas. El resultado se debe a Johann Radon, un matemático nacido en Bohemia y que trabajó en Viena. Se publicó en 1917 y dice que *una función del plano se puede recuperar a partir de sus integrales sobre todas las rectas*. Me temo que hemos entrado en uno de los peligros de la matemática: su lenguaje. Algunos, quizá muchos, de los oyentes no comprenderán el significado de los términos utilizados. Voy a dar una versión más sencilla que nos servirá para entender lo suficiente para seguir adelante.

Supongamos que tenemos un conjunto plano con algunos agujeros en su interior como en la figura (ver página siguiente). Dibujamos una línea recta y medimos la longitud de su corte con el conjunto y hacemos lo mismo con todas las rectas. Una versión particular del teorema de Radon diría que si nos dan la lista de todas esas longitudes podemos reconstruir exactamente la forma y situación precisa de los agujeros.

Tenemos un bonito resultado teórico, ¿para qué podría servir? El físico sudafricano Allan Cormack publicó en 1963 y 1964 sendos trabajos en los que proponía usarlo para ver lo invisible, imágenes internas del cuerpo humano. Una sección del cuerpo se parece al conjunto mencionado pero es más complicada. Teniendo en cuenta que los rayos X se propagan en línea recta y pierden intensidad proporcionalmente al camino recorrido y a la densidad del medio, una cuenta matemática muestra que midiendo la intensidad de entrada y salida en una dirección podemos calcular la integral de la densidad en esa dirección. En el ejemplo de la figura hemos considerado sólo dos densidades, la del conjunto y la de los agujeros, por eso bastaba saber la longitud de corte. Para la sección del cuerpo humano la densidad es variable, pero con el método de Cormack podemos conseguir los datos que el teorema de Radon necesita para la función de densidad sin cortar ni "entrar" dentro del cuerpo. Parece que sólo haría falta aplicar la *fórmula de inversión* de Radon para recomponer esa función de densidad, es decir, para "ver" el interior del cuerpo.

Pero las matemáticas del mundo real tienen características especiales, necesitan ser calculables. Tenemos un inconveniente para utilizar el teorema de Radon: no podemos medir a lo hartu, *guztiak* matematikan kopuru infinitua delako. Teorema teorikoak oinarria ipintzen du baina matematikariek ez dute horrekin lana amaitzen, analisi numerikoa landu behar dute, hau da, hurbilketa egoki bat proposatu, lerro nahikoa aukeratu, egokiak, eta irudi fidagarri bat emateko adina (irudia behar da, medikuari zenbaki zerrenda luze batek ez lioke lagunduko). Ekuazio sistema oso handiak ebatzi behar dira eta konputazioaren aurrerapenak gertatu ez baziren ezinezkoa izango zen eurekin lan egitea. EMI (Electrical and Musical Instruments) etxeko Godfrey Hounsfield ingeniariak irudia berreskuratzeko bere bidea asmatu eta 1968an *ordenadore bidezko tomografia axiala* ("eskanerra" esaten dioguna) egiteko gauza zen lehen makinaren patentea aurkeztu zuen; 1971ean EMIk eraiki zuen makina hori. Gaur egun oso erabilera handiko teknika da, eta ez bakarrik medikuntzan, eta oinarrian 1917ko Radonen emaitza dago. Cormack eta Hounsfieldek 1979ko Fisiologia eta Medikuntzako Nobel saria eskuratu zuten aurkikuntza horri esker[10].



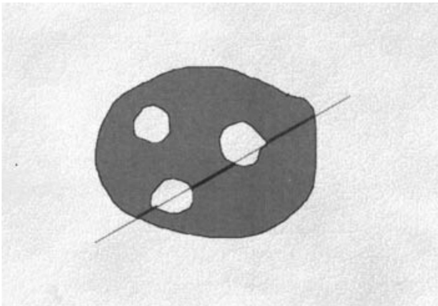
Johann Radon (1887-1956)

Erabilera biomedikorako irudiak lortzea garapen eta interes handiko ikerketa arloa da eta matematika eta fisika oso garrantzizkoak dira bertan. Adibide modura esango dut Estatu Batuetako Zientzia eta Ingeniaritza Akademiek eta Medikuntza Institutuak elkarren arteko batzorde bat sortu zutela 1993an irudi biomedikoen matematika eta fisikaren azterketaz arduratzeko.

Ekonomia eta finantzetan dugu matematikaren beste aplikazio moderno bat. William Jevonsek 1862an bere *General Theory of Political Economy* liburuan hauxe utzi zigun: "argi dago ekonomia benetan zientzia izango bada, zientzia matematikoa izan behar duela". 1970ean, ehun bat urte geroago, Nobel sarien banaketan, Ekonomiako Nobel sariaren irabazle Paul Samuelsonen aurkezpenean, Lindbeck irakasleak honela zioen: "azken hamarkadetako ekonomiaren garapen aren alderdi nabarienetako bat analisirako tekniken gero eta formal izazio maila handiagoan datza, metodo matematikoen bitartez burututa neurri batean''[11].

Bankuan hartzen den mailegu batengatik ordaindu beharrekoa kalkul atzeko behar den matematika elementala da, aspalditik ezaguna, eta irakaskuntzaren maila ertainetan irakasten da. Duela gutxi arte bankuko eragiketa gehienek ez zuten progresio aritmetikoen baturetatik goragoko zailtasunik. Baina gaur egun finantza produktu konplikatuagoak daude. Hona hemen adibide bat. Demagun hiru hilabete barru dirua behar dugula eta akzioak ditugula saltzeko; gaur saldu eta dirua seguru gorde beharrean tentazioa izan dezakegu gorde eta azken momentuan saltzeko. Honek, ordea, arriskua du: ez dakigu hiru hilabete barru gaur baino gehiago ala gutxiago balioko duten. Ordain keta segurtatzeko ondo letorkiguke bankuak hiru hilabete barru akzioak gaurko prezioan erosteko konpromezua hartuko balu eta gain era, gaur baino garestiago egonez gero, geuk zuzenean merkatuan saltzeko posibilitatea gorde. Gure arriskua bankuak har dezan eskatzen ari gara. Baina ez banku ez prestatzaile altruistarik aurkituko ez dugunez, onartzekotan prima bat eskatuko digute. Zelan kalkulatu prima hori merkatuaren etorkizun eko bilakaera inork ez dakienean? Hortxe sartzen da matematika. Berriro ere eredu matematiko bat prestatzen da baina ez aurresateko, ez baitu balio burtsak zer egingo duen jakiteko, baloratzeko baizik.

largo de todas las líneas porque *todas* en matemáticas es una cantidad infinita. El teorema teórico pone la base, pero los matemáticos no terminan ahí su trabajo, tienen que elaborar el análisis numérico que permita escoger un número suficiente de líneas, que sean adecuadas, y que sirvan para recuperar una imagen fiable (imagen, porque al médico no le sirve la larga lista de números). Hay que resolver grandes sistemas de ecuaciones que sin los avances de la computación hubieran sido imposibles de manejar. El ingeniero inglés de la EMI (Electrical and Musical Instruments) Godfrey Hounsfield desarrolló su propio método de reconstrucción y presentó en 1968 la patente de una máquina capaz de realizar la *tomografía axial computerizada* (lo que popularmente llamamos "escáner"), que la EMI construyó en 1971. Hoy es una técnica extensamente utilizada, no sólo en medicina, cuyo fundamento es el resultado teórico de Radon de 1917. Cormack y Hounsfield recibieron en 1979 el Premio Nobel de Fisiología y Medicina por su descubrimiento[10].



Johann Radon (1887-1956)

La obtención de imágenes para uso biomédico es un área de gran desarrollo e interés en la que las matemáticas y la física juegan un papel muy importante. Una muestra de ello es que las Academias de Ciencias e Ingeniería y el Instituto de Medicina de Estados Unidos constituyeron en 1993 una comisión conjunta para el estudio de las matemáticas y la física de las imágenes biomédicas.

Otra moderna aplicación de las matemáticas se sitúa en el terreno de la economía y las finanzas. En 1862, William Jevons escribió en su libro *General Theory of Political Economy* que "está claro que si la economía ha de ser realmente una ciencia, tiene que ser una ciencia matemática". Poco más de cien años después, en 1970, el profesor Lindbeck presentaba en la ceremonia de entrega de los Premios Nobel a Paul Samuelson, ganador del de Economía, con un discurso que comenzaba diciendo: "uno de los aspectos destacados del desarrollo de la economía durante las últimas décadas es el creciente nivel de formalización de las técnicas analíticas, llevado a cabo en parte con ayuda de métodos matemáticos''[11].

Las matemáticas necesarias para calcular los pagos por un préstamo pedido al banco son elementales, conocidas desde antiguo y enseñadas en los niveles secundarios. Hasta no hace mucho tiempo las operaciones bancarias no tenían mayor complicación matemática que la de sumar progresiones geométricas. Pero ahora existen productos financieros más complicados. Por ejemplo, si necesitamos dinero dentro de tres meses y disponemos de acciones podemos estar interesados en conservarlas hasta entonces, pero corremos un riesgo: no sabemos si en ese momento valdrán más o menos que ahora. Para asegurar el pago nos vendría bien que el banco se comprometiese a pagarnos dentro de tres meses el precio que hoy tienen y, además, reservarnos la posibilidad de venderlas en el mercado en caso de que suban. Pero como no vamos a encontrar bancos ni prestamistas altruistas, a cambio de asumir nuestro riesgo nos cobrarán una prima. ¿Cómo se calcula la prima sin saber la evolución futura del mercado? Ahí interviene la matemática. El modelo en que se basa no es predictivo, no sirve para saber qué va a hacer la Bolsa, pero sirve para valorar.

Allan Cormark (1924-1998)

Balorazioen teoria egoki bat bilatzeko saioak mende hasieratik aurkitzen baditugu ere, MITn (Massachusetts Institute of Technology) eta bere inguruan gertatu ziren erabateko aurrerapenak hirurogeita hamarreko hamarkadan. 1973an argitaratu zen ekonomilarien artean hain ezagun egin den *Black-Scholesen formula.* Urte berean hasi zen lanean Chicagon finantzetako deribatuen lehen merkatua eta laster erabili zituzten teknika lortu berriak. 1997ko Ekonomiaren Nobel sariaren irabazleak Robert Merton eta Myron Scholes izan ziren "deribatuen balioa kalkulatzeko metodo berri bat garatzeagatik"[(12)]. Fischer Black urte bi lehenago hil zen. Hirurek formazio matematiko sakona zuten eta Black bera matematika aplikatuan doktorea zen.

Matematikari, fisikari, ingeniari, informatikari eta ekonomilarien arteko elkarlana ekonomiak ateratzen dituen produktu berrien azterketan goraka doa eta erabiltzen duten matematika ez da elementala: aldikako serieak, integral estokastikoak, Markoven prozesuak, higidura browndarra, difusio-ekuazioak, martingalen teoria, dira baliatzen dituzten objektuetako batzuk.

Adibide gehiago atera ditzakegu: GPS batek berehala ematen dizkigu geure kokapenaren koordenatu zehatzak algebra lineala eta seinaleak iragazteko metodo baten bidez (erabat txundituta geldituko lirateke XVIII. mendean longitudearen problema ebazten saiatu zirenak, hau da, itsasoan dabiltzan untzien kokapena zehazteko metodo baten bila); erroreak zuzentzeko algoritmo matematikoek disko konpaktoak entzungarri bihurtzen dituzte; ibilgailuen eraikuntza eta diseinua probatzeko ordenadore bidezko simulazioa prestatzen da eta ez dira prototipoak egin eta hondatu behar; gas naturaleko boltsak non egon daitezkeen jakiteko seinaleen analisi matematikoa egiten da aurretik; eguraldia geroz eta hobeto iragartzen da (beti sinesten ez badugu ere) bitarte matematiko eta teknikoak hobetu direlako, eta matematikak berak esaten du zelan hasierako errore saihestezinek eboluzio oso desberdina eman dezaketen eta epe luzerako iragarpena horregatik ez dela fidagarria; eta abar.

Matematika hainbat lekutan badago zergatik ez dugu ikusten? Esango nuke arrazoietako bat elkarlanetik datorrela, hain zuzen ere, kontraesana dirudien arren. Erabilpen praktikoa beti dago matematika ez den beste atal bati lotuta, areago, askotan matematikaren erabiltzaile den fisikaria, ingeniaria, biologoa edo ekonomilaria bera da matematika zuzenean aplikatzen eta lantzen duena eta ez titulazioz matematikari den batek. Matematika hor dago, baina ostenduta, ez agerian.

Ez dut halere esan nahi matematika dela gauza guztien konponbidea. Batzutan matematizazioak seriotasuna eta zientifikotasuna ematen duelakoan era desegokian sartzen da. Iruzur intelektuala eta zientifikoa da (jakinaren gainean egin edo ez) eta horren aurrean zintzotasun zientifikoa praktikatzea beste erremediorik ez dugu.

Godfrey Hounsfield (1919)

Aunque los intentos por buscar una teoría satisfactoria de la valoración ya empezaron a primeros de siglo, fue en el MIT (Massachusetts Institute of Technology) y su entorno donde en los años setenta se produjeron avances decisivos. En 1973 se publicó la *fórmula de Black-Scholes*, que tan famosa se ha hecho entre los economistas. El mismo año empezó a funcionar en Chicago el primer mercado de derivados financieros, que pronto utilizó las técnicas ahí desarrolladas. El premio Nobel de Economía de 1997 fue otorgado a Robert Merton y Mvron Scholes por "haber desarrollado un nuevo método para calcular el valor de los derivados"[12]. Fischer Black había muerto dos años antes. Los tres tenían una fuerte formación matemática; de hecho, Black era doctor en matemática aplicada.

La colaboración de matemáticos, físicos, ingenieros, informáticos y economistas en los nuevos productos de la economía va en aumento y las matemáticas utilizadas ya no son elementales: series temporales, integrales estocásticas, procesos de Markov, movimiento browniano, ecuaciones de difusión, teoría de martingalas, son algunos de los objetos en uso.

Podríamos poner más ejemplos y mencionar que el GPS es capaz de darnos en un momento y exactamente las coordenadas de nuestra posición con álgebra lineal y un método de filtrado de señales (lo que dejaría enormemente sorprendidos a quienes en el siglo XVIII se dedicaron al problema de la longitud, el de determinar la situación exacta de los barcos en el mar); que algoritmos matemáticos de corrección hacen audible un disco compacto; que las pruebas para la construcción y diseño de vehículos se hacen por medio de la simulación en un ordenador, sin estropear prototipos; que la búsqueda de bolsas de gas natural se hace después de un análisis por medio de señales; que el tiempo se predice cada vez mejor (aunque no siempre lo creamos) porque se han mejorado los métodos matemáticos y técnicos, y que, además, las propias matemáticas son las que prueban que pequeños e inevitables errores en las mediciones originales pueden provocar evoluciones tan diversas que hacen la predicción a largo plazo poco fiable; etc.

¿Por qué si las matemáticas están presentes en tantos sitios seguimos sin verlas? Creo que una de las razones es precisamente la colaboración, aunque parezca contradictorio. El uso práctico siempre está ligado a otra disciplina que no es la matemática, más aún, muchas veces el físico, ingeniero, biólogo o economista usuario de la matemática es quien directamente la aplica y la trabaja, sin intervención de un titulado matemático. La matemática está ahí, pero está oculta, no se reconoce.

Tampoco quisiera dejar la impresión de que la matemática es la solución a todo. A veces se utiliza impropiamente para aparentar una seriedad y un carácter científico que no existe. Son situaciones de impostura intelectual y científica (consciente o inconsciente) ante las que no hay más remedio que practicar la honradez científica.

Unibertsitateko ikasle askok hartu behar ditu matematikako eskolak karreren tresna bezala erabiltzeko. Ikasketa plangintzen erreformak eduki matematikoen murrizpena ekarri du askotan, hainbeste behar ez zelakoan. Hau dela eta, Pedro Puig Adamen berba batzuk ekarriko ditut; Puig Adam oso irakasle ezaguna zen eta haren matematikako liburuek oraindik ere harrera ona dute ingeniaritza eskoletan. 1944-45 promozioko industri ingeniariei tituluak emateko Madrilen egin dako ekitaldian irakurri zuen hitzalditik hartu ditut; hitzaldiaren izenburua *Alferrikakotasunaren apologia*[13] zen eta hau da aukeratu dudan pasartea:

> "Ez dago betirako alferrikakoa izatera kondenatu daitekeen ezagupenik. Ez ditugun ezagupenak dira sekula aplikatzen ez direnak. Gero eta ezagupen gehiago hartu, tresna gehiago aurkituko ditugu geure tailer intelektualean, eta geure lana errazteko eta laburtzeko posibilitate handiagoak izango ditugu unean uneko tresnarik egokiena aukeratuz"

Myron S. Scholes (1941)

3. Matematika bizi da

Matematika zertarako den galdetzeaz gain, sarri egiten zaigun beste galdera bat da ea matematikan gauza berririk aurkitzeko gelditzen den. Matematikaren ibilbide historikoa gaur arte heldu dela azaitzen saiatu naiz, azken urteotan pilpilean dauden aplikazioak jarri ditut eta, hala ere, jendea sinesgogor dugu, historia amaitu dela uste du eta matematikariok gordetzen dugun altxorra kutxa batean -kutxa handi batean agian- kabitzen dela eta ez dagoela gehiago bertan sartzeko, ez behintzat zentzuzko gauzarik.

Goldbachen aierua, Riemannen hipotesia, Poincaréren aierua edo Navier-Stokesen ekuazioen ebazpenaren bakartasuna entzutean mito bihurtu diren problemak etortzen zaizkigu gogora. Denbora luzez egon dira erantzunaren zain eta hor diraute. Bieberbachen aierua, esferen paketatzea edo denetan ezagunena, Fermaten azken teorema, zerren da bereko parte izango ziren duela gutxi arte baina heldu zaie frogapena, azkenaren kasuan oihartzun handia lortuz komun ikabideetan.

Hala ere, problema ospetsu hauek guztiak erakusleihoa besterik ez dira, publizitaterako aproposak. Batzuk ebazteagatik milloidun sariak eskaintzen diren arren[14], munduan gutxi dira horiek ebazteko ahaleginean ari diren matematikariak eta ez dut uste sariok ofizioko matematikarien lanen helburuak aldatzeko gauza izango direnik. Asko dira, asko gara, geure lan alorreko problemak, handiak edo txikiak, ebazten saiatzen garenok. Matematikariok beste edozein esparrutako ikerlariekin berdintzen gaituen printzipio bat dago: galderak egiteko ahalmena dugun bitartean, lana dugu. Non daude galderak? Ikus ditzagun adibide batzuk.

Muchos de los estudiantes de la universidad tienen que estudiar matemáticas como instrumento para sus carreras. Las reformas de los planes de estudio han traído consigo una reducción general de los contenidos matemáticos con la idea de que no son necesarios tantos. Ante esto, me limitaré a reproducir unas palabras de Pedro Puig Adam, que fue un conocido profesor cuyos libros de matemáticas siguen siendo apreciados en las escuelas de ingenieros. Están tomadas del discurso que leyó en Madrid en la entrega de títulos a los ingenieros industriales de la promoción de 1944-45. El título del discurso era *Apologia de la inutilidad* (13) y éste es el párrafo elegido:

> "Ningún conocimiento puede ser condenado a inutilidad perpetua. Los únicos conocimientos que jamás se aplican son los que no se tienen. Cuantos más conocimientos se adquieran, mayor riqueza de útiles hallaremos en nuestro taller intelectual, mayores posibilidades tendremos de simplificar y abreviar nuestra tarea echando mano del útil adecuado en cada caso".

Robert C. Merton (1944)

3. La matemática está viva

Además de para qué sirve la matemática, la otra pregunta que se nos hace frecuentemente es si queda algo por descubrir en matemáticas. He tratado de mostrar que el recorrido histórico de la matemática llega hasta ahora mismo y he dado ejemplos de aplicaciones de la matemática que están de actualidad, pero, aun así, la gente es difícil de convencer y cree que la historia ha terminado y que el tesoro que guardamos los matemáticos cabe en un arca -posiblemente grande- pero que ya no hay necesidad de meter más cosas en ella, al menos cosas razonables.

Conjetura de Goldbach, hipótesis de Riemann, conjetura de Poincaré o unicidad de solución en las ecuaciones de Navier-Stokes evocan problemas que se han convertido en mitos. Llevan mucho tiempo a la espera de una respuesta y en esa lista estuvieron hasta hace poco tiempo la conjetura de Bieberbach, el empaquetamiento de esferas o el más famoso de todos, el último teorema de Fermat, a los que por fin les llegó la solución, y en este último caso con gran repercusión en los medios de comunicación.

Pero todos estos famosos problemas no son sino el escaparate, la muestra publicitaria. A pesar de que algunos tienen premios millonarios por su resolución(14) es una minoría de matemáticos la que se dedica directamente a ellos y dudo mucho que el premio ofrecido consiga cambiar la dirección de los trabajos de los matemáticos profesionales. Son, somos muchos los matemáticos que nos dedicamos a buscar la solución de problemas, pequeños o grandes, de nuestras áreas de trabajo. Porque hay algo en lo que no somos distintos a los investigadores de cualquier otra disciplina: mientras podamos hacernos preguntas, tenemos trabajo. ¿Dónde se encuentran las preguntas? Veamos algunas situaciones.

Honela zioen Salomon Bochnerek Gaussi buruz ari zela[15]:

> "Matematikan XIX. mendea [1801 bainoJ apur bat beranduago heldu zen, koefiziente konplexuak dituen polinomio batek erro konplexu bat gutxienez duela dioen baieztapenerako Gaussek lau frogapen desberdin ematera "bultzatuta" ikusi zuenean bere burua, hain zuzen ere. Esaten denez, Lagrange agurea harrituta gelditu zen jarrera honengatik, bere XVIII. mendeko ikuspuntutik frogapen bat ematea izango zen egokiena, gogobetekoa, eta aurrerantzean gauza desberdin bati ekitea".

Zein zen Gaussen arrazoia horrelako jarrera hartzeko? Ulertzeko beharra eta gogoa, ez besterik. Ulertzea baita matematikariak eta beste zientzilariak lanean jartzen dituen arrazoietako bat. Ulertzea eta jakitea ez dira gauza bera, eta jakitetik ulertzera dagoen aldeak aztergaiak eskaintzen ditu. Emaitza bat ezagutu arren, frogapen berri batek hobeto ulertaraz dezake, erlazio berriak erakutsi, eta frogapena bera argibidea izan daiteke beste kasu batzuetan. Inoiz ez dago esaterik gai bat guztiz itxita dagoela eta ez zaiola etekin gehiagorik aterako. Hona hemen lanerako lehen iturria.

Goldbachek susmatu zuen edozein zenbaki oso hiru zenbaki lehenen batura modura idatz zitekeela (gogora ekarriko dut zenbaki bat "lehena" deitzen dugula, zenbakia bera eta unitatea beste zatitzailerik ez duenean) eta, beraz, bi lehenen baturak nahikoa zirela zenbaki bikoitiak lortzeko. Frogatzen saiatu zen baina ez zuen lortu. 1742an idatzitako gutun batean Euleri proposatu zion problema hori eta gaur arte inor ez da frogatzeko gauza izan. Gorago aipatu ditudan problema ireki ospetsu horietako bat da. Formulazio erraza du eta ez dira kontzeptu zailak erabili behar azaltzeko, baina adituen artean problema ireki ugari dabiltza, matematikaren alor guztietakoak. Egunero asmatzen dira problema berriak, bere buruari galderak egiten dizkion edonoren aurrera datoz. Batzutan erantzuna berehala lortzen da eta problematzat hartzeko arrazoirik ere ez da egongo, beste batzutan lan handia egin behar da erantzuteko, eta inoiz, artikulu, liburu edo hitzaldi batean azalduko da galdera eta beste matematikari batzuentzako aztergai bihurtuko da.

Ikus dezagun hirugarren egoera bat. Fourieren transformatua aplikazio potentzial asko dituen objektua da, baina oztopo bat du, ezin da zehazki kalkulatu. Beti egiten den bezala, lehen urratsa aldaera diskretu bat proposatzea izan zen eta honetan integralen kalkuluaren ordez ekuazio linealen sistemak ebatzi behar ziren (hauek eragiketa elementalez egiten dira). Baina oraindik ere oztopo bat zegoen, sistemak hain ziren handiak non ordenadoreak ere ez ziren gauza denbora errealean erantzuteko. 1965ean J. Cooley eta J. Tukeyren eskutik *Fourieren transformatu arinaren algoritmoa* etorri zen eta "gauetik goizera industria osoak motelak izatetik arinak izatera pasatu ziren". Aergatik ez zen lehenago asmatu? Matematikaren erabilera

La carta de Goldbach a Euler

Dice Salomon Bochner a propósito de Gauss[15]:

> "En matemáticas, el siglo XIX llegó en realidad algo más tarde [de 1801], cuando Gauss se vio 'motivado" a suministrar cuatro demostraciones diferentes para el aserto de que cualquier polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. Se cuenta que el anciano Lagrange quedó sorprendido por esta actitud; desde su punto de vista siglo XVIII, lo adecuado era proponer una sola prueba, que fuera satisfactoria, y a partir de ahí seguir con algo diferente".

¿Cuál era el motivo de Gauss para semejante actitud? Simplemente la necesidad de entender, que es una de las razones que mueve a los matemáticos y a los demás científicos. No es lo mismo saber que entender y en esta diferencia se encuentran temas de estudio. Aunque un resultado se conozca, encontrando una nueva prueba se puede entender mejor, se le pueden descubrir nuevas relaciones y la propia prueba puede dar luz para tratar otros casos. Nunca se puede afirmar que una cuestión está cerrada del todo y no va a servir para producir más. Es una primera fuente de trabajo.

Goldbach observó que todo número entero parecía poderse escribir siempre como suma de tres números primos (recuerdo que llamamos "primo" al número que no tiene más divisores que él mismo y la unidad) y, por tanto, dos deberían bastar para conseguir los números pares. Trató de demostrarlo pero no pudo. En una carta a Euler de 1742 le propuso el problema y hasta hoy nadie ha sido capaz de dar una prueba. Es uno de los famosos problemas abiertos que he mencionado antes. Éste permite una formulación sencilla, que se comprende sin complicados conceptos matemáticos, pero circulan entre los especialistas otros muchos problemas abiertos en todos los campos de la matemática. Se inventan problemas nuevos cada día, aparecen ante cualquiera que se haga preguntas. La respuesta puede a veces llegar tan rápidamente que ni siquiera merecerá ser mencionado como problema, otras veces vendrá después de mucho trabajo, y en algunas ocasiones acabará proponiéndose la pregunta en un artículo, un libro o una conferencia, y otros matemáticos tendrán un nuevo tema para pensar.

Veamos una tercera situación. La transformada de Fourier es un objeto con muchas aplicaciones potenciales, pero tiene un inconveniente, no es calculable. Como habitualmente se hace, un primer paso fue proponer una versión discreta en la que el cálculo de integrales se reemplaza por la resolución de sistemas lineales (que sólo requiere operaciones elementales). Pero seguía habiendo un inconveniente, los sistemas eran tan grandes que incluso los ordenadores no podían ofrecer respuestas en tiempo real. En 1965, J. Cooley y J. Tukey presentaron el algoritmo de la *transformada rápida de Fourier*, que 'hizo pasar a industrias enteras de lentas a rápidas de la noche a la mañana". ¿Por qué no se descubrió antes? Porque es un

Goldbacheck Euleri bidalitako eskutitza

errealak ekarri zuen problema zelako, lehenago ez zegoen arrazoirik bila ibiltzeko. Adibide honek, beste askok bezala, erakusten du aplikazioen alorrean matematikak ez duela bakarrik ematen, hartu ere egiten duela.

Lan egiteko behin eta berriro problemak zelan agertzen diren erakusteko adibideak izan dira. Ez da historia amaitu eta, noizean behin harresi handi bat botatzen den arren, Fermaten teorema esate baterako, ez du inoiz amaitzeko itxurarik.

Ikuspegi pertsonaletik esango dut zorionekoa izan naizela garai hon etan egokitu zaidalako matematikari izatea hemen. 70eko hamarkadan, orduko Universidad Autónoma de Bilbao hartan matematika ikasle izan ginenok unibertsitate gazte eta eginbakoa aurkitu genuen. Irakasleak, gu baino apur bat zaharragoak, ez zuten ezagutzen egunean eguneko matematikaren bilakaera. Baina norbaitek pentsatu zuen prestakuntzarik onena jakintsuak zeuden lekuan hartuko genuela eta kanpora joateko aholkua eta laguntza aurkitu gen uen. Honela, batzuk kanpoko bidea hartu genuen eta gure lehen harridura matematika bizi zela jakitea izan zen. Mintegiak eta bilerak ezagutu genituen eta matematikaren aurrerapenen egileak geure begiz ikusi genituen, hezur-haragizko pertsonak ziren eta ez erretratu zaharren galeria bateko argazkiak. Hurrengo urrats aipagarria geu ere aurrerapenen egile izan gintezkeela konturatzea izan zen, ekarpen txikiekin bazen ere. Eta sarean harrapatu gintuen.

Hogei urte geroko Euskal Herriko Unibertsitatea ordukoa baino askoz ere helduagoa da. Kanpora joandako batzuk itzuli egin ginen, beste batzuk guregana etorri ziren gelditzeko, eta hemen hezitakoak ere prestakuntza hobea hartu zuten. Gaur egun, hemen ere senti daiteke matematikaren bizitz a eta aspaldi haretan pentsaezina zena gertatzen da , hona ere etortzen baitira mundu guztiko matematikariak, bertan egonaldiak egitera, mintegiak ematera edo kongresuetan parte hartzera. Duela urte bi geometrilari handi bat, Alfred Gray, Bilbon hil zen gure sailean urte sabatiko batekin zegoela. Orain dela aste bi haren oroimenez unibertsitate honetan egin den kongresu batean mundu guztitik etorritako berrehun aditu baino gehiago elkartu dira. Joan den uztailean jokoen teoriari buruzko kongresu bat egin zen Bilbon eta bertan bostehun partehartzaile baino gehiago izan ziren, Ekonomiako hiru Nobel saridun barne.

Dena dela, ez lukete gure ikasleek pentsatu behar dagoeneko hemen dena egitea posible dela eta ez dela kanpora joan behar. Oraindik ere asko dago ikusteko eta ikasteko gehiago dakitenen albora joanez gero, eta hau da aldatzeko eta aurreratzeko dugun bide bakarra.

Unibertsitate honetako matematika asko hobetu da eta orain ingurukoen mailarekin bat dator gurea ere, baina beste erronka bat dugu aurretik. Matematikaren irakaskuntza unibertsitate espainiarretan irakasle eta ikertzaileen formaziorako bideratu da, beharrak eskatzen zuelako edo besterik egiten ez genekielako. Mende berriak matematikari berriak eskatuko ditu, inguru akademikotik kanpo ezagutza erabiltzeko eta mundu errealeko proiektuetan beste arlo batzuetako profesionalekin elkarlanean aritzeko gauza. Ez beste ofiziokoen ordezkari, osagarri baizik. Geure ardura da behar diren al daketak prestatzea.

Eta amaituko dut. Beste urte batez bete barik geldituko da Pedro Simón Abrilen nahia, "ez dezatela inor onartu ezein gradu motatara ez badu lehenago erakusten ondo ikasi dituela jakingai matematikoak", baina oraingoan gutxienez lehen ikasgaia matematikaren gainean izan da. Beti bezala irakaslea gustora geldituko litzateke ikasleek, entzuleek oraingoan, gauza berriren bat ikasi badute, baina, batez ere, gehiago jakiteko gogoa atera badute. Horrela bada, bila ezazue liburu bat, interneteko orri bat, irakasle baten aholkua; ez zaizue damutuko. Matematikaren mundua lil uragarria da.

problema que surge por las necesidades de utilización real de la matemática y antes nadie tuvo un motivo para pensar en ello. Es un ejemplo como tantos otros de que las aplicaciones son un terreno en el que la matemática no sólo da, sino también recoge.

Son algunas muestras de cómo pueden surgir continuamente problemas en los que trabajar. La historia no ha terminado y, aunque a veces cae un muro grande como el teorema de Fermat, no tiene visos de que vaya a terminar nunca.

Voy a hablar desde una experiencia personal para decir que he tenido mucha suerte con el momento en que me ha tocado ser matemático aquí. Los que fuimos estudiantes de la Universidad Autónoma de Bilbao en los años setenta, encontramos una universidad joven y en formación. Los profesores, poco mayores que nosotros, no estaban al día en el desarrollo de la matemática de la época. Pero hubo quien pensó que la mejor manera de prepararnos era que fuésemos a los lugares donde estaban los que sabían, nos aconsejaron salir y nos ayudaron a conseguirlo. Algunos fuimos a otros centros y nuestra primera sorpresa fue la de descubrir que la matemática estaba viva. Conocimos seminarios y reuniones científicas y vimos con nuestros ojos a los autores, que eran de carne y hueso y no fotos de una galería de viejos retratos. Un segundo paso notable se producía cuando nos dábamos cuenta de que nosotros mismos podíamos participar en los avances de la matemática, aunque fuese con pequeñas aportacion es. Quedamos atrapados en su red.

Veinte años después la Universidad del País Vasco está mucho más madura. Algunos de los que salimos fuera volvimos, otros vinieron para quedarse y también los que se quedaron mejoraron su formación. Hoy día, aquí mismo, se puede sentir que la matemática está viva y lo que entonces era impensable es una realidad, matemáticos de todo el mundo vienen a hacer estancias, dar seminarios o participar en congresos. Un gran geómetra, Alfred Gray, falleció en Bilbao hace dos años mientras disfrutaba de un sabático en nuestro departamento. Hace dos semanas un congreso de geometría diferencial celebrado en su memoria en esta universidad ha reunido a más de doscientos especialistas de todo el mundo. A finales de julio pasado se celebró en Bilbao un congreso de teoría de juegos con más de quinientos participantes, entre ellos tres premios Nobel de Economía.

Con todo, no deberían pensar nuestros estudiantes que todo se puede hacer aquí y va no es necesario salir fuera. Sigue habiendo mucho que ver y mucho que aprender yendo cerca de los que saben más y es la única manera de que podamos cambiar y avanzar.

Hemos mejorado lo suficiente la matemática en esta universidad como para tener un nivel homologado con los de nuestro entorno, pero tenemos un nuevo reto por delante. La enseñanza de la matemática se ha dirigido en las universidades españolas a formar docentes e investigadores, porque había una necesidad o porque no se sabía hacer de otro modo. El nuevo siglo nos va a pedir matemáticos nuevos, capaces de utilizar sus conocimientos fuera del ámbito académico y de trabajar junto a profesionales de otras ramas en proyectos conjun tos del mundo real. No para sustituirlos sino para complementarlos. También es nuestra responsabilidad preparar los cambios para ello.

Llego al final. Otro año más quedará sin cumplir el deseo de Pedro Simón Abril de que "nadie sea admitido a ningún género de grado sin haber hecho demostración de haber estudiado bien las disciplinas matemáticas", pero al menos esta vez la primera lección ha sido sobre matemáticas. Como siempre al profesor le gustaría que sus alumnos, sus oyentes en este caso, hubieran aprendido algo nuevo, pero sobre todo le gustaría que se hubieran quedado con las ganas de saber más. Si es así, busquen un libro, una página en internet, un profesor que les asesore, no se arrepentirán. El mundo de la matemática es apasionante.

NOTAk

1 Izenburu osoa hau da: *Apuntamientos de cómo se deben reformar las doctrinas y la manera de enseñarlas para reducirlas a su antigua entereza y perfección; de que con la malicia del tiempo y con el demasiado deseo de llegar los hombres presto a tomar las insignias de ellas han caido, hechos al Rey Nuestro Señor por el doctor Pedro Simón Abril.* Testua berriro argitaratu da hemen: P Simón Abril, *Textos de Humanismo y Didáctica*, Clásicos Albacetenses, 6, Diputación de Albacete, 1988.

* Alboan dagoen erdarazko jatorrizko testuan euskal itzulpen honek ez duen zahar kutsua aurkituko du irakurleak.

2 Victor Hugo, *Les Misérables*, Maurice Allem-en edizio kritikoa, Gallimard, Paris, 1951.

3 Aipu Biak L. A. Santaló-ren *La matemática: una filosofía y una técnica* (Ariel, Madrid, 1994) liburutik hartu ditut.

4 Newtonen ekarpena handia izanda ere, beste batzuk hasitako bidearen burutzea bezala ulertu behar da haren lana; Newtonen berak Hookeri eskutitz batean esan ziona gogoratuko dugu: "beste batzuk baino urrunago ikusteko gauza izan banaiz, erraldoien bizkarretan oinarritu naizelako izan da".

5 Galileoren hitzak hauek dira: "Filosofia, gure begien aurrean etengabe zabaltzen den liburu honetan dago idatzita (unibertsoaz ari naiz); ezin da ulertu, ordea, aurretik haren hizkuntza ikasi eta idatzita dagoen alfabetoa ezagutzen ez bada. Eta matematikaren hizkeran dago idatzita, karaktereak triangeluak, zirkuluak eta beste irudi geometrikoak izanik, eurak barik berba bat bera ere ulertzea ezinezkoa gertatzen da; eurak barik labirinto ilun batetik noraezean ibiltzea baino ez da lortzen" (*Il Saggiatore*, 1623)

6 J Fourier-en *Théorie Analytique de la chaleur* liburuko *Discours préliminairetik* hartua; edizio faksimilea dago: Jacques Gabay, Paris, 1988.

7 Jacobik Legendreri idatzitako gutunak Jacobiren lan guztien bildumako lehen tomoan datoz. Biduma Chelsea Publishing Company etxeak berrargitaratu zuen (*Gesammelte Werke*, New York, 1969).

8 Armand Borelen konparazio hau P. A. Griffiths-ek dakar: *Mathematics -from servant to partner*, Institute for Advance Study delakoan emandako diskurtsoa, Princeton, 1993.

9 E. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 1-14; berriro agertu zen *Symmetries and reflections; scientific essays of Eugene P Wigner* (MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1967) liburuan eta bere lan guztien bilduman (Springer, 1992).

10 Interneteko www.nobel.se/medicine/laureates/1979/index.html orrial informazio gehiago dakar sariaz eta sarituez.

11 A. Lindbeck-en hitzaldia www.nobel.se/economics/laureates/1970/press.html helbidean dago.

12 Nobel sari honen informazioa www.nobel.se/economics/laureates/1997/index.html helbidean aurki daiteke.

13 Hitzaldi osoa www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/ppuigadam/ppa001245.html helbidean aurki daiteke.

14 Clay Mathematics Institute (Cambridge, Massachusetts) delakoak joan den maiatzaren 24an adierazi zuenez, milioi bana dolarreko zazpi sari emango ditu, beste hainbeste problema matematikoren ebazpenengatik.
(Ikus vvww.claymath.org//prize_problems/index.htm.)

15 S. Bochner, *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*, Alianza, Madrid, 1990; jatorrizkoa ingelesez, Princeton University Press, 1966.

NOTAS

1 El título completo es *Apuntamientos de cómo se deben reformar las doctrinas y la manera de enseñarlas para reducirlas a su antigua entereza y perfección; de que con la malicia del tiempo y con el demasiado deseo de llegar los hombres presto a tomar las insignias de ellas han caido, hechos al Rey Nuestro Señor por el doctor Pedro Simón Abril*. Se reproduce en P. Simón Abril, *Textos de Humanismo y Didáctica*, Clásicos Albacetenses, 6, Diputación de Albacete, 1988.

2 Victor Hugo, *Les Misérables*, edición crítica de Maurice Allem, Gallimard, París, 1951.

3 Ambas citas están tomadas de L. A. Santaló, *La matemática: una filosofía y una técnica*, Ariel, Madrid, 1994.

4 A pesar de la gran aportación de Newton, su labor hay que verla como la culminación de un camino que otros habían empezado; recordemos lo que él mismo escribió en una carta a Hooke: "si he sido capaz de ver más lejos que otros, ha sido sólo porque me he apoyado en hombros de gigantes".

5 La cita completa es la siguiente: "La filosofia está escrita en este vasto libro que continuamente se abre ante nuestros ojos (me refiero al universo), que, sin embargo, no se puede entender si antes no se ha aprendido a entender su lengua y a conocer el alfabeto en el que está escrito. Y está escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra; sin ellos sólo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto" (*Il Saggiatore*, 1623).

6 J Fourier en el *Discours préliminaire* de su *Théorie Analytique de la chaleur;* hay una edición facsímil de Jacques Gabay, París, 1988.

7 Las cartas de Jacobi a Legendre se reproducen en el tomo primero de las obras completas de Jacobi, *Gesammelte Werke*, reeditadas por Chelsea Publishing Company, Nueva York, 1969.

8 La comparación de Armand Borel está tomada de P. A. Griffiths, *Mathematics -from servant to partner*, discurso en el Institute for Advance Study, Princeton, 1993.

9 E. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 1-14; reproducido en *Symmetries and reflections; scientific essays of Eugene P. Wigner,* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1967, y en sus obras completas, Springer, 1992.

10 La página de internet www.nobel.se/medicine/laureates/1979/index.html contiene más información sobre el premio y los premiados.

11 El discurso de A. Lindbeck está en www.nobel.se/economics/íaureates/1970/press.html.

12 La dirección www.nobel.se/economics/laureates/1997/index.html contiene información sobre este premio Nobel.

13 Reproducido en www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/ppuigadam/ppa001245.html.

14 El Clay Mathematics Institute de Cambridge (Massachussets) anunció el 24 de mayo pasado la concesión de siete premios de un millón de dólares cada uno por la solución de otros tantos problemas matemáticos.
(Véase www.claymath.org/prize_ problems/index.htm.)

15 S Bochner, *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*, Alianza, Madrid, 1991; original en inglés de Princeton University Press, 1966.