

Universidad Nacional de Educación a Distancia

CENTRO ASOCIADO BIZKAIA

MEMORIA



CURSO 2000-2001

X ANIVERSARIO

Universidad Nacional de Educación a Distancia

CENTRO ASOCIADO BIZKAIA



MEMORIA

CURSO 2000-2001

X A N I V E R S A R I O

LECCIÓN INAUGURAL

LAS MATEMÁTICAS EN LA NATURALEZA

Juan Carlos Peral Alonso,

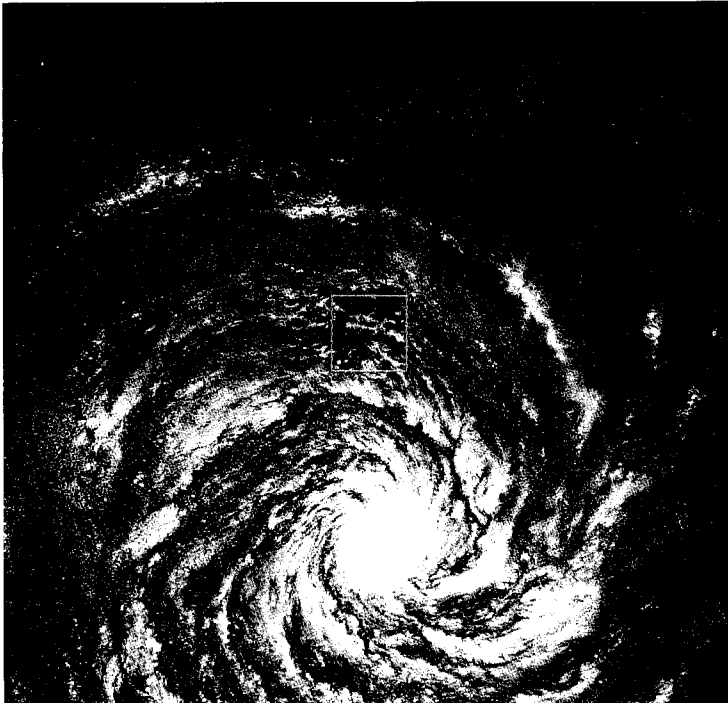
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

1. Anumerismo

Donde se cuentan mil zarandajas, tan impertinentes como necesarias para el entendimiento de esta grande historia. Don Quijote. Cervantes.

Las matemáticas además de su papel formativo y de transmisión de ideas tienen también una presencia importante en la naturaleza y en casi cualquier ámbito de la actividad humana.

Uno de los aspectos más conocidos de la utilidad práctica de las matemáticas es su gran capacidad para la modelización de fenómenos naturales, ya que el estudio de estos modelos permite entender mejor, explicar, e incluso predecir nuestro comportamiento.



Vista frontal de la
Vía Láctea. 10^{21}

Por ejemplo, la estela que deja una barca sobre la superficie de un río puede descubrirse mediante el principio de Huyguens generalizado que se deduce del modelo teórico de propagación de las ondas y su correspondiente ecuación.

La descripción de un modelo matemático para la asignación de precio a ciertos tipos de productos financieros les valió el premio Nobel de Economía a Black y Scholes. Curiosamente una de las herramientas matemáticas usada por dichos economistas está directamente relacionada con el modelo de la transmisión del calor.

Los códigos para las tarjetas de crédito o para la transmisión de mensajes cifrados son aplicaciones directas de la criptografía en la que juegan un papel esencial cuestiones teóricas de las matemáticas llamadas puras.

Por otra parte en la información diaria, las matemáticas están profusamente representadas. Cuando alguien habla de que el desempleo ha seguido bajando pero a un ritmo menor que en los últimos meses lo único que está haciendo es informarnos del signo de la primera y segunda derivadas de una misma función.

Además todo tipo de números nos rodean en nuestra vida diaria en distintas formas: proporciones, porcentajes de crecimiento de precios, gráficos, tablas o estadísticas.

Hay también otros números grandes y pequeños que están presentes aunque resulten un poco más alejados de nuestra experiencia diaria. En la lista que sigue se recogen algunos, que en caso de ser diferentes cambiarían nuestro entorno vital de una forma drástica.

Edad del universo: 1.5×10^{10} años

Aparición del Homo erectus: 1.5×10^6 años

Aparición del Homo sapiens: 3.5×10^5 años

Constante de Gravitación: 6.67×10^{-11} m³/kg.sg².

Velocidad de la luz: 2.9979×10^5 km./ sg.

Radio del electrón: 2.8178×10^{-15} m.

Diámetro de las células: 2×10^{-5} m.

Radio de la Tierra: 6.350 km.

Masa de la Tierra: 5.98×10^{24} kg.

A pesar de todo lo citado hasta aquí hay un anumerismo imperante, bastante fácil de reconocer como muestran los siguientes ejemplos.

La predicción meteorológica

El hombre del tiempo dice en una cadena de televisión:

... la probabilidad de que llueva el sábado es del cincuenta por ciento y la probabilidad de que llueva el domingo es también del cincuenta por ciento, y concluye; saquen sus paraguas del armario porque con estos datos es seguro que lloverá el fin de semana...

El cubo de Rubick

La compañía juguetera Ideal Toy Company afirmaba en el envoltorio del cubo de Rubick que el cubo admite más de tres mil millones de posiciones distintas, es decir 3×10^9 , lo cual es cierto ya que admite más de 4×10^{19} combinaciones diferentes.

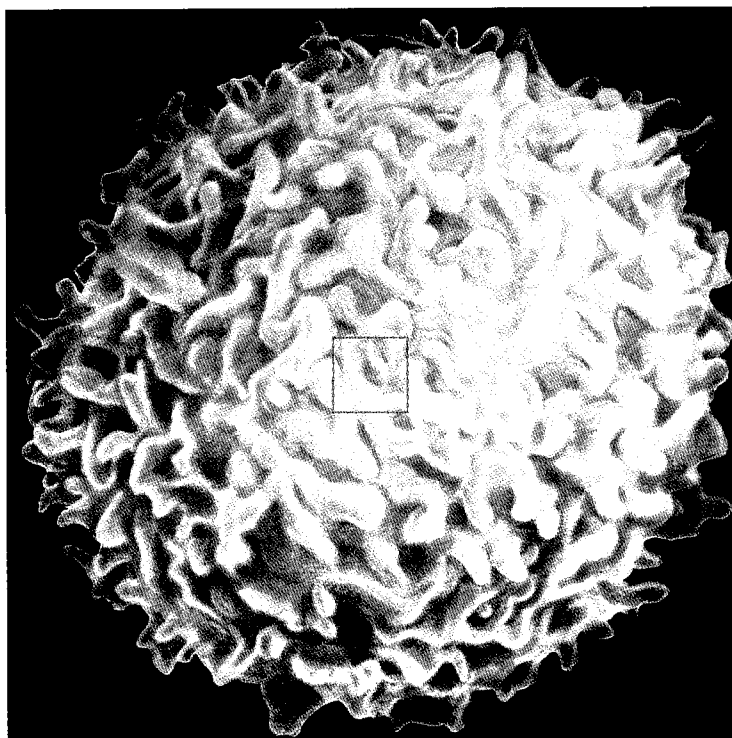
Esta subestimación, que en este caso es contraria a los intereses del anunciante, es parecida a un cartel situado a la entrada de Nueva York y que dijera:

Bienvenido, llega usted a una población con más de 6 habitantes.

El mito de la mortalidad de los seres humanos

Aproximadamente un treinta por ciento de los humanos que han existido en toda la historia estamos vivos en estos momentos sobre el planeta Tierra, y con la tasa actual de crecimiento de la población en poco tiempo ese porcentaje será superior al cincuenta por ciento.

¿No es cierto que por el hecho de que hayan muerto la mitad de nuestros congéneres, inferir que todos moriremos es un poco abusivo?



Linfocito, 10 micras

El ejecutivo temeroso

Un hombre que viajaba mucho estaba muy preocupado por la posibilidad de que hubiera una bomba en su avión. Calculó la probabilidad de que esto sucediera, y aunque era pequeña no se quedó tranquilo. Desde entonces lleva siempre una bomba en su maleta ya que, según él, la probabilidad de que en un mismo avión haya dos bombas es infinitesimal.

Para continuar nuestro paseo por los números propongo ahora un viaje y después una adivinanza.

2. Un viaje

Vamos a estudiar el crecimiento de las potencias positivas de 10 y el decrecimiento de las potencias negativas, realizando un viaje imaginario. Usaremos una cámara fotográfica y las potencias de diez.

Haremos el viaje alejándonos de nuestro objetivo, tomando fotografías cada vez a una distancia diez veces superior a la de la etapa anterior y ése será nuestro viaje hacia afuera, y después acercándonos y ése será nuestro viaje hacia adentro.

Es curioso que en los confines de ambos viajes lo que encontraremos será parecido: hélices, espirales y el vacío.

Veamos a dónde nos lleva nuestro viaje, que parte de una escena cotidiana.

Hacia fuera

Tomamos la primera foto a un metro de distancia.

Estamos en la escala humana. Vemos a un hombre apaciblemente dormido y rodeado por las cosas de uso diario.

Si ahora se toma una segunda foto a cien metros, se observa al hombre desde cierta altura y se ve que está pasando la tarde en una zona de césped situada entre una autopista y un muelle.

Por cierto, si la humanidad estuviera distribuida de manera uniforme sobre el planeta, a esta persona le correspondería dos veces la superficie que se ve en la fotografía, que aproximadamente es de 10^4 metros cuadrados. Es decir no podríamos tener un campo de golf para cada habitante de la tierra.

Si la siguiente foto se toma a mil metros de altura se contempla un estadio y diversos muelles para embarcaciones de recreo.

Al subir otras diez veces, (estamos a 10 Km.) se divisa una zona urbana donde viven un millón de personas. Se observa la parte sur del lago donde se encuentra la ciudad y se distingue el entramado urbano con las calles principales aún visibles.

Si subimos con nuestra cámara hasta 1000 km., es decir la altura aproximada de una órbita baja de un satélite, podemos contemplar el contorno del lago.

Hay nubes y claros y difícilmente pueden reconocerse a esta altura obras de factura humana.

El primer satélite artificial (Sputnik) fue puesto en órbita el 4 de octubre de 1957. Pesaba unos 80 kilos y el apogeo de su órbita fue de unos 940 Km. Daba una vuelta completa a la Tierra en 96 minutos.

Al llegar a los 10.000 Km. estamos observando la Tierra vista con cierto detalle. Esta imagen fue esperada por los cartógrafos hasta el año 1967.

En alturas de este orden aproximado de magnitud se encuentran las órbitas de los satélites geostacionarios (aquellos con un período de rotación igual al de la Tierra, o sea (24 horas), que son usados para la telecomunicación y deben tener una altitud orbital aproximada de 36.000 Km. El primero de este fue el Syncom 2, puesto en órbita el 26 de julio de 1963 con un peso de 39 kilos. A partir de 1965 se inició la serie de los Intelsat. La primera persona en sugerir esta posibilidad fue Arthur C. Clarke en 1945.

A los 100.000 kilómetros vemos nuestra casa, la Tierra, solitaria en el espacio: el planeta de color azul por su atmósfera. Atraviesa, aproximadamente, en su giro en torno al Sol, el lado de un cuadrado en cada hora.

La Tierra es el tercer planeta del Sistema Solar con un radio ecuatorial de unos 6.378 km. La luz del Sol tarda unos 8 minutos en llegar a la Tierra y viaja a $2.9979 \times 10^8 = 3 \times 10^8$ kilómetros por



Espirales en el girasol

segundo, por lo que la distancia media de la Tierra al Sol es de $R = 8 \times 60 \times 3 \times 10^5 = 1.4 \times 10^8$ kilómetros (149.573.000 km), que tomamos como radio medio de la órbita terrestre, de donde deducimos que la Tierra recorre en un año $D = 2\pi \times R = 8.8 \times 10^8$ kilómetros aproximadamente. Por ello, al dividir entre el número de horas que es de 8760, resulta que viajamos a una velocidad lineal media de unos 1.07×10^5 km/hora, o de forma equivalente a unos 29.8 km/seg.

Si nos situamos a 1 millón de kilómetros contemplaremos la Luna y su órbita en torno a la Tierra. En esta zona se encuentra el lugar más alejado de la Tierra que ha visitado la especie humana. La Luna tiene un radio de 1.700 km. (frente a los 6.300 de la Tierra) y una densidad de 3.34 g/cm^3 frente a los 5.52 g/cm^3 de la Tierra. Gira en torno a la Tierra en 29 días, lo mismo que tarda en girar sobre su eje, esto explica que presente siempre la misma parte hacia la Tierra. Se encuentra a unos 385.000 km. de la Tierra (poco más de 1.28 segundos-luz). Los astronautas Armstrong y Aldrin llegaron a la Luna el 20 de Julio de 1969 con el Apolo 11.

Si subimos hasta 10 mil millones de kilómetros vemos las órbitas de los planetas exteriores: Neptuno, Urano, Saturno, Júpiter, y la más excéntrica, que es Plutón, y que es la única situada en un plano netamente diferente.

Al llegar a los 100 mil millones de kilómetros contemplamos los planetas en su conjunto girando en torno al sol.

Si seguimos nuestra ascensión hasta los 100 mil años-luz podemos ver la Vía Láctea frontalmente (es un disco casi plano) y con su forma, marcadamente espiral. Tiene unos 100 mil millones de estrellas, (10^{11} estrellas), una de ellas es nuestro Sol, que gira en torno al centro de la galaxia dando una vuelta cada 300 millones de años, o sea, cada 3×10^8 años.

La edad del universo es de 15×10^9 años, por lo que a lo más ha dado 50 vueltas en torno a su centro galáctico desde el comienzo del universo.

Si seguimos más allá contemplaremos un espacio prácticamente vacío...

Hacia adentro

Hacemos una primera foto, en este viaje interior, a 10 centímetros, y vemos uno de los instrumentos más versátiles y perfectos: una mano humana vista de cerca.

Si ahora se hace un acercamiento hasta la décima parte, es decir a un centímetro, se distinguen las arrugas y pliegues de la piel, signo y consecuencia de la flexibilidad.

Al pasar a las 10 micras, o sea tres etapas más, estamos contemplando, tras atravesar la piel y un vaso capilar por donde circula la sangre, un linfocito (célula blanca) que forma parte del sistema inmunitario con el que el cuerpo se defiende de las infecciones.

Hay muchos tipos de células en el cuerpo humano, pero las más frecuentes tienen un diámetro de una 20 micras.

Una persona de 70 kilos, cuya densidad es aproximadamente uno, tiene un volumen de 70 litros (o, lo que es igual, caben unas 14 personas en un metro cúbico) por lo que una persona ocupa 0.07 metros cúbicos.

Como cada célula (supuesta un cubo) ocupa $(20 \times 10^{-6})^3 = 8 \times 10^{-15}$ metros cúbicos, en una persona hay

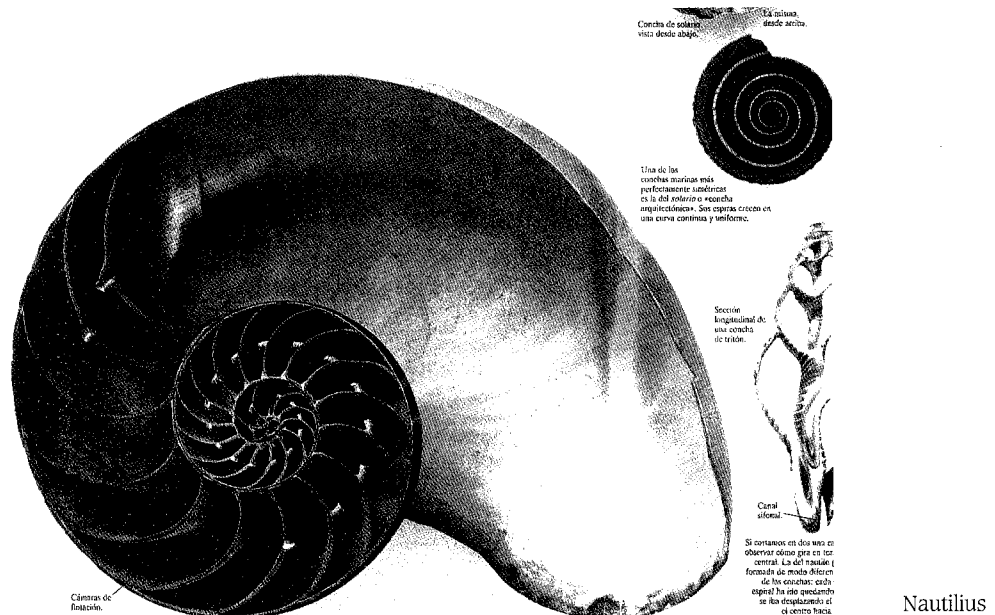
$$\frac{7 \times 10^{-2}}{8 \times 10^{-15}} = 10^{13}$$

células, es decir cien veces más que estrellas en la Vía Láctea.

Si llegamos a la dimensión de la micra, vemos la membrana del núcleo del linfocito con sus poros para el intercambio de sustancias químicas.

En una etapa más, o sea en la décima de micra, se contemplan las moléculas del ADN con sus hélices replegadas en este espacio tan reducido. Cada uno de los 46 cromosomas del núcleo de cada célula humana tiene una de estas estructuras moleculares.

En 1953 Watson y Crick propusieron este modelo como elemento fundamental en la transmisión genética y recibieron el premio Nobel de Medicina en 1962 por su trabajo. Cada una de las hélices tiene unos componentes básicos (cuatro bases orgánicas) A, Adenina ligada a la T, Timina de la otra hélice y G, Guanina ligada a C, Cistina de la otra. Hay unidades de tres de estos cuatro componentes que producen un código básico de 64 elementos AAA, AAC, etc. en el que está contenida toda la información genética de cada especie.



Nautilus

Las células del ADN humano, cuando son estiradas, alcanzan unos milímetros de longitud y, como una persona tiene 10^{15} células, la distancia que se alcanza si se disponen todas estas moléculas una tras otra es de 2×10^{10} kilómetros, es decir, es suficiente para hacer un tendido de ida y vuelta hasta el Sol.

En la escala de los 100 amstrong se ve la doble hélice del ADN en mayor detalle. Todo el mensaje genético está contenido aquí.

Hay que citar que las moléculas de ADN de los anfibios son bastante más largas que las humanas.

Si se llega a la escala del manómetro se pueden observar moléculas formadas por un átomo de carbono y tres de hidrógeno visibles, y una cuarto átomo situado detrás.

Tres pasos más y estamos en la medida del picómetro en la que aparece el núcleo del átomo (en este caso con seis protones) rodeado por un inmenso espacio vacío.

Al llegar hasta el fermi vemos el núcleo en detalle: los 6 protones y los 6 neutrones correspondientes al carbono-12. El carbono, que tiene número atómico 6, representa, aproximadamente, el 0.2 por ciento de la corteza terrestre. Uno de sus isótopos radiactivos, el carbono-14, tiene una vida media de 57304 ± 40 años, y se utiliza en la datación de fósiles.

La ley que explica la desintegración del carbono radiactivo se modeliza con una ecuación diferencial.

3. Adivinanza

La sucesión de Fibonacci

Nos podemos preguntar qué relación existe entre el Partenón y un girasol, es decir, un templo griego construido hace 2.500 años y un humilde fruto vegetal.

Como la explicación parece estar un poco oculta necesitamos ayuda, pero ¿qué mejor ayuda para desvelar un misterio que la que puede proporcionar un mago? Pedimos ayuda a alguien que vivió hacia 1200 en Pisa, y que, aunque su nombre era Leonardo Bigollo, ha pasado a la posteridad por su apodo: **Fibonacci** (contracción de *Filius Bonacci*).

Fibonacci fue un matemático que se preocupó de introducir en el mundo occidental el uso del sistema de numeración indo-arábigo (el que usamos en la actualidad) para sustituir al sistema romano, que resultaba muy incómodo incluso para los cálculos más sencillos.

Pero los magos suelen hacer sus trucos ayudados por algún animal, y este caso no será la excepción. Fibonacci estudió el ritmo de desarrollo de una colonia de conejos, dando lugar a la llamada sucesión que lleva su nombre y que será la clave para la explicación de la relación que buscamos y que, no lo olvidemos, es la relación entre el Partenón y un girasol.

En su libro *Liber Abaci*, Fibonacci propuso un problema relativo al crecimiento en número de una colonia de conejos de los que se supone que se reproducen a partir del segundo mes de vida y de forma que cada pareja genera una nueva pareja cada mes, pero como se ha dicho a partir del segundo de existencia. El problema planteado por Fibonacci consiste en calcular el número de parejas existentes al cabo de n meses. Llamaremos F_n a ese número.

Si se comienza con una pareja en el primer mes, en el segundo, como aún no son fértiles se tiene también una pareja, en cambio en el tercero se han reproducido y hay dos parejas, en el cuarto hay tres, y así sucesivamente.

Un momento de reflexión nos lleva a la conclusión de que la ley de formación de los términos de la sucesión de Fibonacci está dada por el hecho de que para obtener un término basta con sumar los dos anteriores. Es decir, en notación matemática;

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{para } n > 1$$

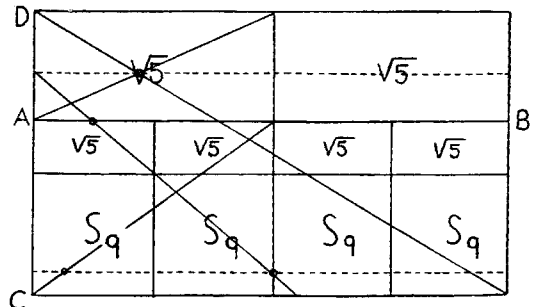
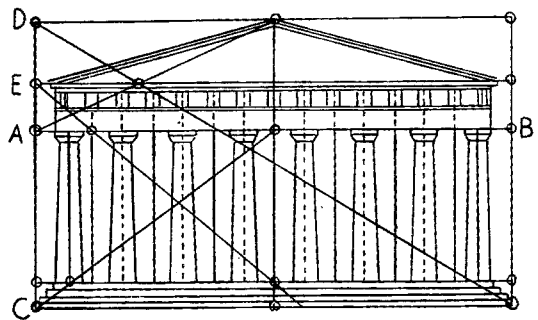
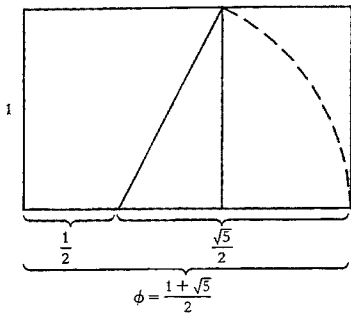
Los primeros términos de la sucesión de Fibonacci resultan ser;

1, 1, 2, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

Filotaxia

Ahora podemos volver a nuestro problema original, y si nos fijamos en el girasol vemos que sus frutos están dispuestos en unas espirales a izquierda y otras a derecha. Si contamos el número de unas y otras vemos que son 34 y 55 respectivamente, es decir, dos elementos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

Naturalmente podría pensarse que esto es una coincidencia, pero estudios matemáticos revelan que, dependiendo del tamaño de los girasoles, el número de espirales en uno y otro sentido está



Razón áurea y proporciones del Partenón

formado casi siempre por un par de términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, que suele ser 34 y 55 como en el ejemplo que hemos visto ó 55 y 89 en los frutos más grandes.

El fenómeno que acabamos de describir para los girasoles es mucho más que una simple anécdota, ya que es muy común en el mundo vegetal.

Por ejemplo, las piñas comunes (*Ananas comosus*) muestran 8 espirales a derecha, 13 a la izquierda y 21 en sentido vertical, es decir términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Esto fue descrito por un socio de la sociedad hawaiana editora de la revista *Pineapple Quarterly* en 1933.

De la misma forma, hay muchas especies de árboles que presentan una disposición de las hojas en torno al tallo característica de la especie, y que indica que cada hoja aparece girada respecto a la anterior en una proporción del ángulo total que es $1/2$ para el olmo y el tilo, $1/3$ para el avellano y el haya, $2/5$ para el roble y el albaricoque, $3/8$ para el álamo y el peral, $5/13$ para el sauce y el almendro, etc., es decir, en todos los casos fracciones formadas por números de la sucesión de Fibonacci alternos (F_n, F_{n+2}).

El fenómeno descrito se conoce como *Filotaxia*; etimológicamente disposición de las hojas.

La razón áurea

Pero en nuestro problema original nos faltan las explicaciones y parecen acumularse las preguntas ya que nos queda por explicar:

- a) ¿qué relación tiene la sucesión de Fibonacci con el Partenón?
- b) ¿por qué en el girasol aparece el fenómeno descrito en relación al número de espirales?

Afortunadamente las dos preguntas tienen una respuesta relacionada y para llegar a descubrir el enigma vamos a introducir la *razón áurea*.

En diversos momentos históricos los artistas plásticos se han preocupado por encontrar un tipo de proporción que resultase especialmente armónico y agradable. Uno de los intentos más intensos en este sentido se ha centrado en torno a la razón áurea, que es la proporción que resulta al dividir un segmento en dos, de forma que la relación entre las longitudes mayor y menor sea igual que la relación entre las longitudes del total y la del trozo mayor.

Esta idea parece haber influido en el arte desde la Grecia Clásica hasta el Movimiento Impresionista y desde Egipto al Renacimiento, jugando un papel importante en la arquitectura, la pintura, y la escultura de dichas épocas.

Por ejemplo, el arquitecto suizo Le Courbissier (1887-1965) utilizó la razón áurea para su famosa escala de proporciones conocida como *El Modulor*, que incluye la noción de que la proporción áurea se encuentra de forma natural en el cuerpo humano al ser la proporción (en media) entre la altura de una persona y la distancia de la cabeza al ombligo. Pero antes de seguir necesitamos unas nociones elementales sobre el significado matemático de la razón áurea.

Si llamamos c a la longitud del trozo corto, l a la del trozo largo y t al total, la definición anterior significa:

$$\frac{l}{c} = \frac{t}{l} = \frac{l+c}{l} = 1 + \frac{c}{l}$$

Por tanto, si se denomina Φ a esa razón común, resulta que ha de verificar

$$\Phi = 1 + \frac{c}{l} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{t}{1 + \frac{1}{\Phi}} =$$

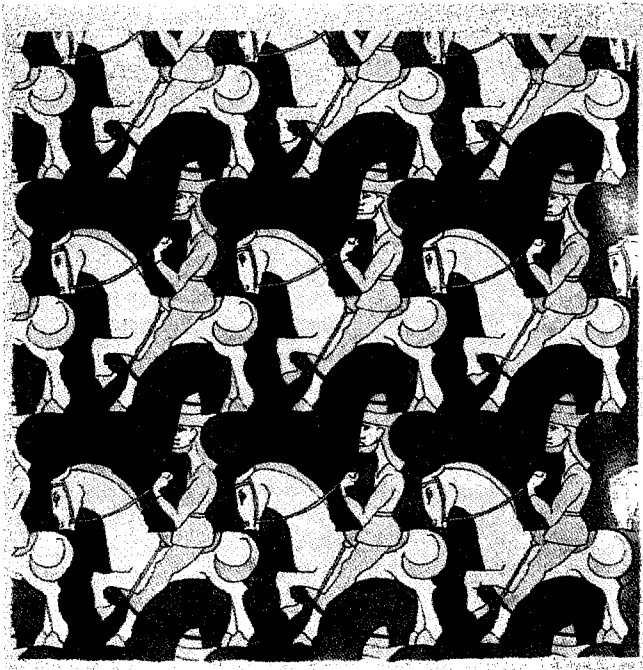
De forma equivalente; Φ es solución de la ecuación cuadrática

$$x^2 = x + 1$$

Es inmediato obtener la única solución mayor que uno de esta ecuación es el valor

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$$

Este número fue llamado de **Proporción Divina** por Fray Luca Paccioli di Borgo (1445-1514) en su tratado *De Divina Proportione* que fue ilustrado nada menos que por Leonardo Da Vinci.



Uno de los dibujos de Escher

Pues bien, en 1850 Zeysing observó la presencia de la razón áurea en las proporciones de la fachada del Partenón y posteriormente otros autores han analizado éste y otros templos griegos, así como vasijas de esta época y han encontrado la presencia de este número en una buena parte de las diversas proporciones externas de dichas piezas de arte.

También se ha afirmado por diversos autores que Φ está presente en las proporciones de las dimensiones de las pirámides de Egipto.

Hambidge, Lund y Moessel han desarrollado más estas ideas y, fruto de ellas, son diversos análisis gráficos referentes al Partenón, a la obra de Miguel Angel en la Capilla Sixtina, y a otras obras de arte, tales como las vasijas griegas del Museo de Boston, etc...

Pero aquí falta algo, ¿qué relación tiene esto con el girasol, o con la sucesión de Fibonacci? De nuevo el granjero de los conejos nos va a ayudar porque al cabo de un tiempo observó que la tasa de crecimiento mensual del número de parejas de conejos se estabilizó cerca de un número, es decir de un mes para otro la proporción entre el número de parejas en ese mes y en el siguiente era más o menos constante.

Para calcular qué constante es ésta, nos basta con hacer un sencillo razonamiento; si llamamos p al número por el que hay que multiplicar el número de parejas en el mes N , es decir, F_n , para obtener, de forma aproximada, las que hay en el mes $n+1$, o sea F_{n+1} , entonces se tendrá que, básicamente;

$$F_{n+1} = pF_n \quad \text{de donde: } F_{n+2} = pF_{n+1} = p(pF_n)$$

Y, al aplicar la ley de recurrencia de la sucesión, resulta que, salvo algún pequeño error, se verifica que;

$$F_{n+2} = p^2F_n = pF_{n+1} + F_n \quad \text{de donde: } p^2 = p + 1$$

Es decir $p = \Phi$ la razón áurea, puesto que satisfacen la misma ecuación de segundo grado.

Y esto cierra la relación buscada entre el Partenón y el girasol, usando para ello la noción matemática de recurrencia.

Espirales

Pero hay más, la forma de las espirales del girasol, y no sólo su número, están relacionadas con la sucesión de Fibonacci y con el número de oro, y además ahora estamos en condiciones de entender la filotaxia mucho mejor.

En el girasol se observan dos tipos de espirales llamadas por los botánicos **paristiquios**, pero, como suele ocurrir, esa primera mirada superficial refleja un hecho que es consecuencia de otro hecho mucho más profundo.

Los botánicos se dieron cuenta de que cada una de las partes del fruto procedía de una zona central de un tejido indiferenciado, constituyéndose en unos abultamientos llamados **primordios** y que al desarrollarse dan lugar a las pipas.

Pues bien, si se numeran los primordios de acuerdo a su **edad** se forma una nueva espiral mucho más cerrada y no visible a simple vista, que se llama la **espiral generativa**.

Cada uno de estos **primordios** se desplaza radialmente por ser empujado por los nuevos primordios que se van desarrollando y, además, su velocidad de desplazamiento es proporcional a su distancia al centro (lo que explica el desarrollo de tipo logarítmico de las espirales).

Pero además los primordios van apareciendo con un ángulo constante llamado **ángulo de divergencia**. Y ahora pensemos qué tipo de ángulo es, antes incluso de medirlo.

Si fuese, por ejemplo, un ángulo de cuarto de giro, resultaría que nuestro girasol adulto sería muy diferente al que hemos visto por que quedarían grandes espacios vacíos, y de hecho en ese caso el girasol tendría sus frutos dispuestos en una especie de cruz, pero algo parecido ocurriría si el ángulo fuese un sexto del giro total, ya que en este caso el girasol tendría el aspecto de una rueda con seis radios, etc...

En general, este razonamiento nos lleva a concluir que para que no haya grandes espacios vacíos, y sabemos que en los frutos reales no los hay, el ángulo de divergencia no puede ser un múltiplo racional de 360 grados. Pero si no es un múltiplo racional será irracional, y así sucede al ser nada menos que 360 dividido entre la razón áurea. Pero este número es, en un sentido matemático muy profundo (Teorema de Hurwitz), el más irracional de todos los número irracionales, lo cual sugiere que los girasoles son expertos en teoría de números.

Teorema de Hurwitz

a) Sea α un número irracional cualquiera. Entonces existen infinitos racionales diferentes $\frac{h}{k}$ tales que

$$\left| \alpha - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}$$

b) La constante $\frac{1}{\sqrt{5}}$ de la parte a) es la mejor posible como se ve utilizando $\alpha = \Phi$

Es decir, en algún sentido, la razón áurea es el más irracional de todos los números.

Esto explica de forma inmediata la formación de otras espirales, su forma que es logarítmica, igual que la forma de la concha del Nautilus, y el hecho de que se produzca un empaquetado óptimo de las semillas del girasol.

La forma de espiral logarítmica se prodiga en la naturaleza, por ejemplo en la concha del Nautilus, en la espirales formadas por los frutos de las piñas, en las que conforman la estructura del virus del tabaco o en las que pueden observarse en la forma del crecimiento de los cuernos de diversos mamíferos.

Todo ello sin olvidar las espirales presentes en la estructura de la doble hélice del ADN, la espiral presente en nuestra galaxia, los dibujos de Escher o el empedrado de Penrose por citar algunos ejemplos más.

Para terminar recurrimos a una de las citas más conocidas sobre las matemáticas en la naturaleza, pero no por ello menos válida, se debe a Galileo y es como sigue:

La Filosofía está escrita en el gran libro del Universo, constantemente abierto para nuestro deleite, pero que no puede ser entendido salvo que aprendamos primero a comprender el lenguaje en que está escrito.

El libro de la Naturaleza está escrito en el lenguaje de las matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra suya; sin ellos uno está vagando a través de un oscuro laberinto. Galileo (1623)

Bibliografía

- [A] *Potencias de diez*, A.M.S.
- [CO] *COMAP, For all practical purposes*, Freeman, 1994
- [C] H.S.M. Coxeter, *Fundamentos de geometría*, Limusa, 1988
- [EB] *Enciclopedia Britannica*, Chicago U.P.
- [G1] M. Ghyka, *The geometry of art and life*, Dover Publications, 1977
- [G2] M. Ghyka, *El número de oro: I los ritmos, II los ritos*, Poseidón, 1968
- [H] I. Hargittai, *Symmetry: Unifying Human Understanding*, Pergamon Press, 1986
- [J] R.V. Jean, *Phyllotaxis*, Cambridge University Press, 1994
- [Pa] P.A. Paulos, *El hombre anumérico*, Tusquets, 1990
- [Pe] R. Penrose, *La nueva mente del emperador*, Mondadori, 1991
- [S] I. Stewart, *Deshojando la margarita, Investigación y Ciencia*, Marzo 1995
- [W] H. Weyl, *Simetría*, McGraw Hill, 1991