

La geometría de las pompas de jabón

por

Rafael López, Universidad de Granada

1. La física de las pompas de jabón

Planteamos dos experimentos sencillos de realizar.

Experimento 1. En un vaso lleno de aceite depositamos una gota de agua. Observamos que la gota adopta inmediatamente forma *esférica*. A continuación, y con la ayuda de un lápiz, tocamos la gota de agua para deformarla, empujarla o moverla. Durante este proceso, la gota cambia de forma, pero de nuevo vuelve a ser esférica en cuanto la dejamos de tocar. Incluso si con el lápiz logramos romper la gota, el resultado es ... ¡dos (o más) gotas *esféricas* de agua!

Experimento 2. Hacemos una pompa de jabón con la ayuda de cualquier de los objetos que se venden en juguetería. Empezamos a soplar hasta que se desprenda la pompa. La forma de la pompa es *esférica*. Esto sucede independientemente de la forma que tenga el objeto con el cual realizamos la pompa de jabón. Además, si dos pompas se colapsan, se crea dos o más pompas *esféricas* pegadas.

A raíz de dichos experimentos, podemos plantearnos varias preguntas. ¿Por qué las gotas de agua en aceite son esféricas y no son de otra forma? ¿Por qué las pompas de jabón que realizamos son redondas y no cúbicas, o van cambiando de forma? ¿Por qué es la esfera la forma geométrica que adoptan las anteriores configuraciones? La

razón se encuentra en que determinadas leyes físicas están gobernadas por principios que pueden modelarse matemáticamente y en las cuales, la esfera, o trozos de ella, son soluciones de dichos problemas. El propósito de este texto es mostrar cómo la *Geometría Diferencial* puede dar una explicación de dichos fenómenos. Es más, cualquier persona sin conocimientos matemáticos, y con un poco de curiosidad, puede comprender y entender cómo la geometría se encuentra en el fondo de dichos fenómenos. Lo que exponemos a continuación es una invitación a adentrarse en la Geometría sin necesidad del uso de una gran cantidad de formalismo matemático.

Para empezar, consideramos dos fluidos inmiscibles (A) y (B). Veamos qué fuerzas actúan sobre la interfaz S de separación de los dos medios. Imaginemos ambos líquidos como una colección de moléculas polares cada una de las cuales ejerce fuerzas de atracción iguales en todas direcciones. Las moléculas 1 y 1' se encuentran atraídas de igual forma por todas las moléculas que las rodean. No sucede lo mismo con las moléculas 2 y 2' situadas cerca de la interfaz, ya que, por ejemplo, la molécula 2 es atraída fuertemente por las moléculas del medio (A) situadas bajo la interfaz y con menor intensidad por las de (B) situadas sobre la interfaz. El resultado es que la molécula 2 queda sometida a una fuerza perpendicular a S hacia el medio (A). Como consecuencia de ello, la superficie S se curva.

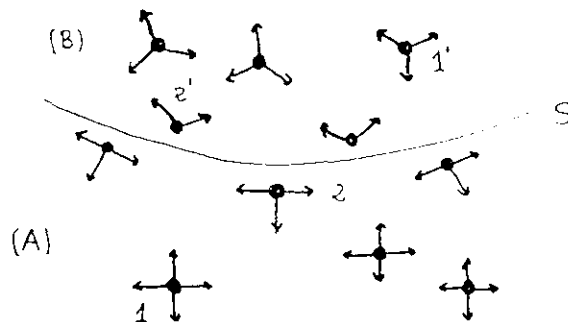


Figura 1: Fuerzas que actúan sobre una interfaz

Esta fuerza que empuja a las moléculas hacia el interior del fluido se llama *tensión superficial*: es la energía de las moléculas del fluido por unidad de superficie, o sea, la energía que hay que gastar para llevar esas partículas desde el interior del fluido hasta su posición superficial. La tensión superficial está regida por los esfuerzos electroquímicos del fluido y modificada por las sustancias disueltas (materia orgánica, sustancias tensoactivas, etc.) Es tangente a la interfaz y su magnitud dimensional es Fuerza/Longitud.

¿Qué ocurre en el agua cuando le añadimos jabón? Una molécula de jabón consiste de una larga y delgada cadena de hidrocarburo no polar (hidrófoba) con una alta polaridad rica en oxígeno (hidrófila) pegado en uno de los finales. Una molécula de jabón típica es $C_{17}H_{35}COO^-Na^+$. Cuando tales moléculas se añaden al agua, el ión positivo Na^+ se libera y se reparte por el agua. De lo que queda, la parte hidrófoba ($C_{17}H_{35}$) intenta “huir” del agua, por lo que la molécula se desplaza a la superficie, orientándose de forma que sus finales hidrófobos se sitúan en el exterior, en contacto con el aire. Al llegar a la superficie, desplaza las moléculas del agua que se hallaban en ella y, por tanto, la tensión superficial del agua disminuye. La superficie del agua está, por tanto, parcial o enteramente cubierta con una capa *no polar* que reduce la tensión superficial.

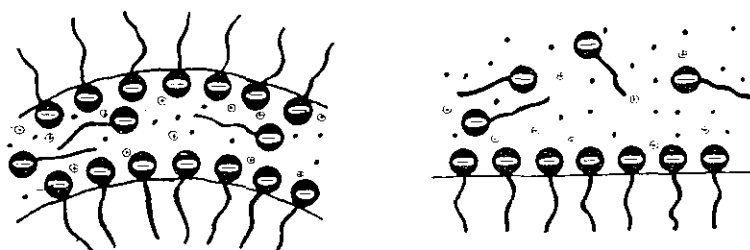


Figura 2: Moléculas de jabón en agua. Una película jabonosa

Al introducir en agua jabonosa un contorno cerrado de alambre (no muy grande) y volverlo a sacar, se forma una finísima capa de agua, cuyo borde es el alambre original. Diremos entonces que se ha formado una *película jabonosa*. En este caso, la superficie de agua se ha expandido, provocando un crecimiento de la tensión superficial debido a la reducción del número de moléculas de jabón y que moléculas de agua que estaban justo por debajo de la superficie vuelven a ella. Aparte de esto, la superficie del líquido adquiere propiedades adicionales elásticas y estabilizantes, ya que las partes hidrófobas de jabón dificultan la evaporación del agua. De la misma forma, cuando tenemos una película de jabón y soplamos en ella, poco a poco esta película se va deformando hasta que se libera del alambre, provocando *pompas de jabón*. En este caso, la propia pompa es una interfaz entre el aire que se halla en el interior de ella, y el aire que se encuentra en el exterior.

Las películas y pompas de jabón son, en definitiva, ejemplos de fenómenos de interfaces entre dos medios. En la Naturaleza encontramos abundancia de ejemplos

de ello. El estudio detallado de los fenómenos físicos que actúan en ellos es de gran interés en muchos campos de la Ciencia y la Tecnología, como veremos más adelante.

Queremos ahora asignar un modelo matemático a dichos fenómenos. Para ello, necesitamos algunas herramientas que entran de lleno en el campo de la geometría diferencial.

2. Un poco de geometría diferencial de curvas y superficies

Como ya hemos observado, en las interfaces entre dos medios se produce una cierta *curvatura* debido a las fuerzas de tensión superficial. Es éste el concepto fundamental de todo de nuestro estudio. Comenzamos con el estudio de las curvas planas.

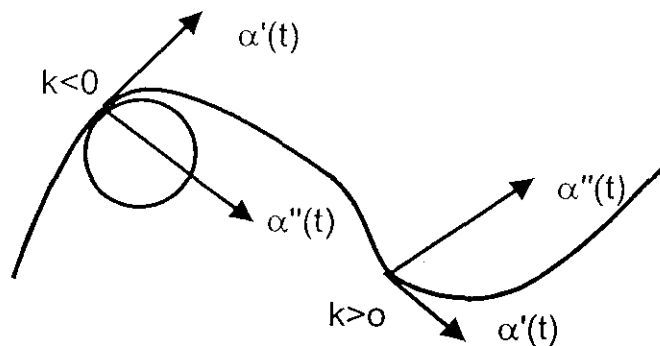


Figura 3. Curvatura de una curva plana

Consideramos una curva plana ¿a qué podemos llamar su curvatura? Intuitivamente, está claro que una recta tiene curvatura nula y que una circunferencia tiene curvatura constante e inversamente proporcional a su radio. Para una curva plana, la definición natural de curvatura es la siguiente: la curvatura es la variación del vector velocidad de la curva respecto de una dirección fija. Supongamos que nos movemos a lo largo de la curva a velocidad constante. Si t nos mide el tiempo que va transcurriendo, entonces se define la curvatura κ de la curva en el instante t como

$$\kappa(t) = \frac{d\theta}{dt},$$

donde θ es el ángulo que hace el vector velocidad a la curva con una dirección prefijada de antemano. La curvatura no sólo mide la magnitud de la rapidez con la que nos alejamos de la dirección tangente, sino también lleva asociado un signo,

indicándonos la dirección de desviación: positiva si viramos hacia la izquierda, y negativa si es a la derecha. Ya que la velocidad es constante, la aceleración sólo tiene componente normal, es decir, la aceleración es centrífuga. Puede comprobarse fácilmente que la curvatura es, salvo el signo, la aceleración centrífuga de la curva. Con nuestra definición, una circunferencia de radio R tiene curvatura $\kappa = 1/R$ cuando nos movemos en sentido contrario a las agujas del reloj.

Definimos ahora la curvatura de una superficie. La idea es hallar las curvaturas de todas las curvas planas que pasa por un punto de la superficie. Sea un punto p de una superficie S y un entorno suyo suficientemente pequeño. Una orientación de S en dicho entorno es una elección diferenciable de un vector N de módulo 1 y perpendicular a S en cada punto. Tomamos todos los vectores tangentes v en p con módulo 1. Para cada uno de estos vectores v y $N(p)$, cogemos el plano P_v que determinan y lo intersecamos con la superficie, definiendo una curva plana, llamada sección normal. Parametrizamos dicha curva de forma que tenga velocidad constantemente 1 y con tangente en p el propio vector v . Llamamos κ_v la curvatura de dicha curva en el punto p (el signo de κ_v será positivo o negativo, según si $N(p)$ se encuentra a la izquierda o a la derecha en el sentido de la curva.) Haciendo variar todos los los planos P_v , consideramos el conjunto de las curvaturas κ_v de todas las secciones normales. No es difícil imaginar que hay un valor mínimo y un valor máximo, a los que denotaremos respectivamente, $\lambda_1(p)$ y $\lambda_2(p)$. Estos dos números se llaman las *curvaturas principales* de la superficie S en p y nos indica, en qué direcciones tangentes a la superficie en p , ésta se curva de la menor y de la mayor forma posible. Observemos que el signo de las curvaturas principales cambia al cambiar la orientación elegida en la superficie.

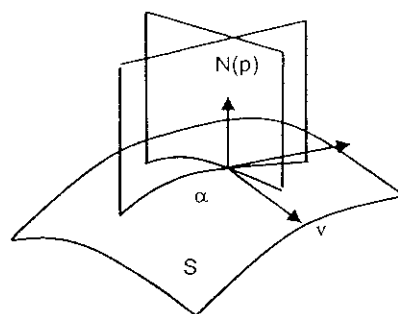


Figura 4: Secciones normales

Podemos definir ahora qué es la curvatura de una superficie en cada punto

tomando “medias” de las curvaturas principales.

Definición 1 Se define la curvatura de Gauss K y curvatura media H de una superficie en un punto p como

$$K(p) = \lambda_1(p)\lambda_2(p), \quad H(p) = \frac{\lambda_1(p) + \lambda_2(p)}{2}.$$

La curvatura media depende de la orientación elegida en la superficie, no así la curvatura de Gauss. A raíz de nuestra definición podemos calcular K y H para superficies sencillas. Así, el plano tiene todas sus curvaturas nulas. La esfera de radio r tiene curvaturas principales constantes e iguales a $1/r$ (con la orientación N que apunta hacia dentro de la esfera.) Por tanto, $K = 1/r^2$ y $H = 1/r$. Por último, en el cilindro de radio r , $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1/r$, $K = 0$ y $H = 1/(2r)$.

En principio, los conceptos de curvatura de Gauss, como el de curvatura media son extrínsecos a la superficie, es decir, nos tenemos que salir fuera de ella para así determinar N . Sin embargo, Gauss probó en 1817 en sus *Disquisitiones generales circa superficies curvas* que la curvatura de Gauss (llamada entonces curvatura total) depende sólo de la superficie, es decir, es un concepto intrínseco. Concretamente, se puede calcular K midiendo solamente longitudes y áreas en S . Es el llamado *Theorema Egregium* de Gauss. Este resultado fue fruto de su trabajo cartográfico durante la realización de un mapa de una región de Alemania.

Sin embargo, para los propósitos marcados en esta exposición, el concepto que nos interesa es la curvatura media. Para finalizar, decimos que una superficie es *minimal* si tiene curvatura media nula en todo punto.

3. ¿Cómo trabaja un físico de materiales?: la ecuación de Laplace-Young

Volvamos al caso de los dos medios inmiscibles. La condición de equilibrio impone restricciones sobre la geometría de la interfaz. En el siglo XIX, Laplace y Young probaron independientemente el siguiente resultado:

Teorema 1 (Ecuación de Laplace-Young) Sean dos medios inmiscibles y S la superficie que los separa sometida a ambos lados por presiones P_1 y P_2 y sea H la curvatura media de S . Si ambos medios se encuentran en equilibrio, entonces en cada punto p de S se tiene la siguiente fórmula:

$$P_1(p) - P_2(p) = 2\tau H(p),$$

donde τ es el coeficiente de tensión superficial de S . El coeficiente τ es constante a lo largo de la superficie.

Explicamos qué significa equilibrio. A cada sistema físico le asociamos su energía potencial. Se dirá que está en una posición de *equilibrio* si tiene menor energía que en cualquier posición cercana a ella. Este comportamiento viene regulado por el principio de los trabajos virtuales, que afirma que todo sistema físico adoptará una cierta configuración si y sólo si no puede cambiar a una configuración de menor energía.

Volviendo a la ecuación de Laplace-Young, si las presiones a ambos lados de la interfaz S son constantes, entonces la curvatura media de S es constante. De esta forma,

- 1) Si $P_1 = P_2$, entonces $H = 0$. Este es el caso de las películas de jabón, ya que el mismo aire rodea a toda la superficie. *Una película de jabón adopta la forma de una superficie minimal.*
- 2) Si $P_1 \neq P_2$, entonces $H \neq 0$. Las pompas de jabón se enmarcan en esta situación, ya que la presión del aire en el interior es mayor que la presión del exterior. *Una pompa de jabón adopta la forma de una superficie de curvatura media constante.*

En nuestras películas y pompas de jabón, si despreciamos el peso del agua y otras acciones físicas, la energía se corresponde (proporcionalmente) con el área de la superficie interfaz: ya que la única fuerza que actúa es la debida a la tensión superficial, y ésta es proporcional al número de moléculas existentes en la superficie, en condiciones ideales de homogeneidad, se corresponde con el área superficial. Por tanto, la película de jabón limitada por un contorno cerrado de alambre tiene la propiedad de que si la empujamos un poco con el dedo, el área de la superficie jabonosa aumenta. De tal forma, que si dejamos de actuar sobre ella, la película de jabón retorna a su posición original, a aquélla donde el área es mínima de entre todas las configuraciones posibles que puede adoptar la superficie. Esto justifica, en un primer momento, porqué a las superficies con $H = 0$ se llaman minimales.

Veamos a continuación otro fenómeno de interfaz que nos va a permitir mostrar las múltiples aplicaciones del estudio de las superficies con curvatura media constante. Consideremos una gota de un líquido depositada encima de una superficie plana P y homogénea. Admitamos el efecto de la gravedad. Ahora la ecuación de Laplace-Young se escribe $(P_1(p) - P_2(p))h = 2\tau H(p)$, donde h es la altura de la gota respecto del plano P . En este caso, una posición de equilibrio de la gota

significa que H es constante (si las presiones son constantes) y que la gota toca a P a lo largo de una curva formando ángulo constante con dicho plano. Se manifiesta entonces una adherencia ('moja') o una no adherencia ('no moja') del líquido al sólido dependiendo si el ángulo de contacto es grande o pequeño respectivamente.

Wente, en 1980, demostró que si el borde es circular, la gota tiene que ser una superficie de revolución. Las superficies de este tipo se encuentran completamente clasificadas.

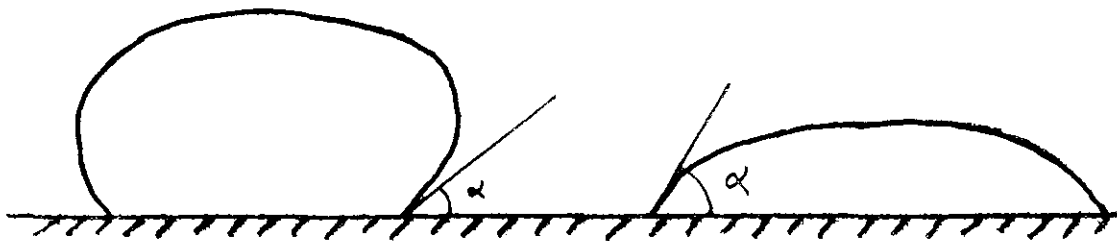


Figura 5: Una gota que no moja y una gota que moja

Podemos explicar ahora qué labor realiza un físico de nuevos materiales. El está interesado en la búsqueda de sustancias que se adhieran a otra (pensemos en un pegamento.) El físico quiere conocer el grado de mojabilidad de las sustancias candidatas y tenerlas clasificadas. Deposita una gota de una cierta sustancia sobre una superficie plana y homogénea de forma que el borde de la gota sea circular. Conoce la presión ejercida dentro la gota. Quiere conocer el grado de adherencia de la gota al sólido en términos de la tensión superficial. Para ello, y según la ecuación de Laplace-Young necesita conocer la curvatura media de la superficie de la gota. Con la ayuda de una cámara de video, obtiene una imagen de la forma de la gota. Ya que se tienen clasificadas las gotas que adoptan formas de superficies de revolución, con un programa numérico, determina la curvatura media de la superficie y finalmente, la tensión superficial gracias a la ecuación de Laplace-Young.

Como aplicación práctica en la Tecnología, tenemos todos aquellos procesos donde se manifiesten fenómenos de adhesión y mojado. Como ejemplos, tenemos los siguientes:

- 1) Fenómenos de capilaridad en microbiología.
- 2) Mezcla de polímeros, microemulsiones y cristales líquidos.

- 3) Técnicas farmacéuticas de separación de sustancias. Adherencias de aceites en cosmética.
- 4) Estudio de la separación entre sustancias orgánicas e inorgánicas: absorción y penetración de proteínas en membranas celulares, acción de medicamentos, etc.
- 5) Adhesión de sustancias a materiales, aleaciones, etc.
- 6) Plásticos, pinturas y adhesivos sobre superficies.
- 7) Estudio de flujos entre agua y petróleo en Hidrogeología.

4. El problema isoperimétrico

Las superficies con curvatura media constante han surgido como consecuencia de la ecuación de Laplace-Young en el estudio de la forma de la interfaz de dos medios inmiscibles. Sin embargo, una forma de introducir las superficies con curvatura media constante, desde el punto de vista matemático, es a través del problema isoperimétrico:

Problema isoperimétrico: De entre todas las superficies acotadas que encierran un volumen prefijado, encontrar aquéllas de menor área.

Para ello consideramos una curva cerrada Γ y una superficie S cuyo borde sea Γ . Tomamos una variación de S , es decir, una familia uniparamétrica S_t de superficies con borde Γ y tal que $S_0 = S$. Vamos a denotar por $A(t)$ y $V(t)$ el área y el volumen de la superficie S_t . Una primera aproximación al problema isoperimétrico es imponer que el área de S sea un punto crítico del funcional área, es decir, $A'(0) = 0$. Un cálculo algo difícil prueba que esto ocurre si y sólo si $H = 0$ en cada punto de la superficie. Si ahora imponemos que todas las superficies tienen el mismo volumen, entonces $A'(0) = 0$ si y sólo si H es constante en S . Como conclusión tenemos

Las superficies minimales son puntos críticos del área para cualquier variación de la superficie. Las superficies con curvatura media constante son puntos críticos del área para cualquier variación de la superficie que preserve el volumen.

En particular, las soluciones del problema isoperimétrico son superficies con curvatura media constante. También obtenemos que si S es la superficie con menor área de entre todas las superficies con el mismo borde, entonces S es una superficie minimal (más tarde veremos que el recíproco no es cierto.)

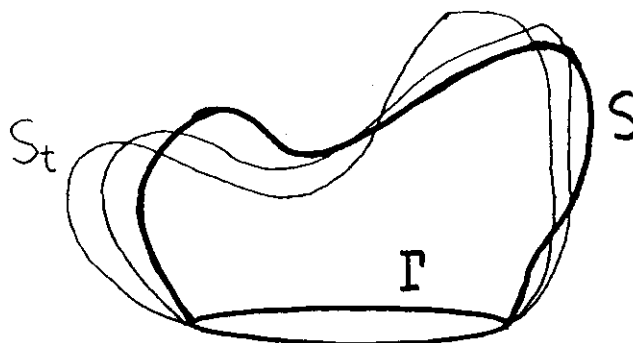


Figura 6: Variaciones de una superficie

La respuesta del problema isoperimétrico es la esfera y la solución era ya intuitiva por los griegos, aunque no se tuviera una demostración de ello. ¡Los esquimales también sabían la respuesta!: los iglús tienen forma semiesférica, ya que es la forma de casa que, con un volumen dado, pierde menos calor, pues el calor perdido es proporcional al área superficial de la casa.

La demostración matemática del problema isoperimétrico se realizó en el siglo XIX y es debida a Schwarz, usando ideas previas de Steiner y Minkowski.

Justamente, las pompas de jabón que realizábamos en el experimento 2 era la prueba física del problema isoperimétrico, ya que para un volumen dado encerrado por la pompa, ésta adoptaba la forma de equilibrio, en la que el área se minimizaba. Lo mismo ocurría con las gotas de agua en aceite: el volumen era fijo, el de la gota, pero la forma de ésta era la que minimizaba el área superficial. El hecho de que las pompas y las gotas de agua sean esféricas, nos afirmaba que éstas eran las soluciones del problema isoperimétrico.

Un problema análogo al problema isoperimétrico es el problema de la doble pompa: dados dos números V_1 y V_2 , hallar las superficies con menor área que encierran y separan dos regiones de volúmenes V_1 y V_2 . De nuevo, se sospechaba que la solución era dos casquetes esféricos unidos con volúmenes los dados. Sin embargo, la demostración de ello es muy reciente: fue probado en el año 2000 por Hutchings, Morgan, Ritoré y Ros.

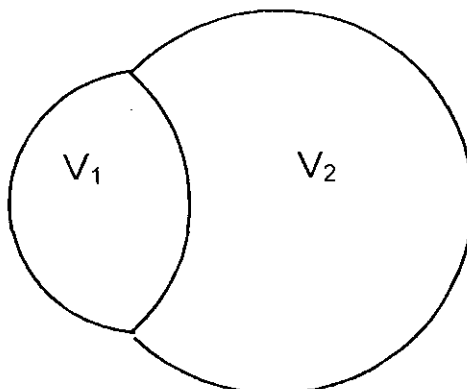


Figura 7: Doble pompa

Podemos también hacer una prueba física del problema isoperimétrico en el plano. Éste plantea hallar las curvas cerradas sin autointersecciones de longitud dada que encierran un mayor área.

Experimento 3. Tomamos un contorno de alambre cerrado y plano. Cogemos un trozo de hilo donde hemos pegado los extremos y lo colgamos de un lado del armazón de alambre. Lo introducimos en agua con jabón y lo sacamos a continuación. El hilo adopta formas arbitrarias dentro de la película de jabón. Con la ayuda de un lápiz, rompemos el trozo de película encerrada por el hilo. En este preciso momento, el hilo adopta forma circular. La explicación es la siguiente: al romperse la película de jabón que se encontraba en el interior, la película de jabón que se encontraba entre el hilo y el alambre intenta buscar una nueva forma de equilibrio, y para ello minimiza el área superficial. Por tanto, el área que encierra el hilo es la mayor posible, es decir, es la solución isoperimétrica.

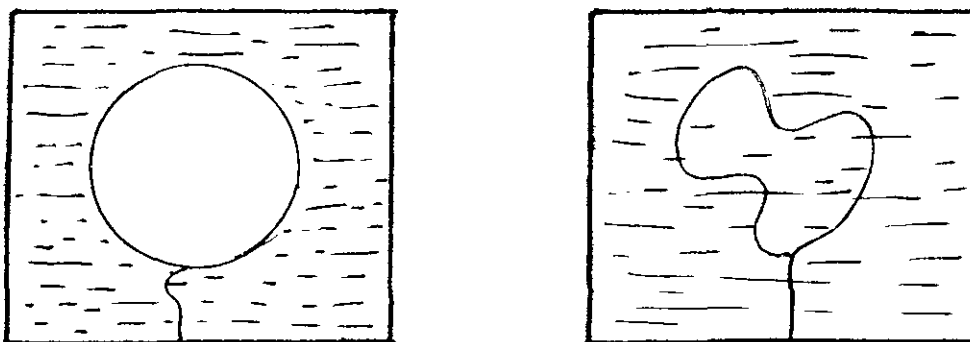


Figura 8: El círculo es la solución del problema isoperimétrico del plano

Podemos hacer dos variantes del mismo experimento, colocando primero un trozo de hilo con extremos pegados en uno de los lados del alambre. La otra variante consiste en colocar los dos extremos del hilo en el alambre, y estos extremos tengan movilidad a lo largo del alambre. En ambos, la solución es un trozo de circunferencia para el primer caso, y la semicircunferencia en el segundo.

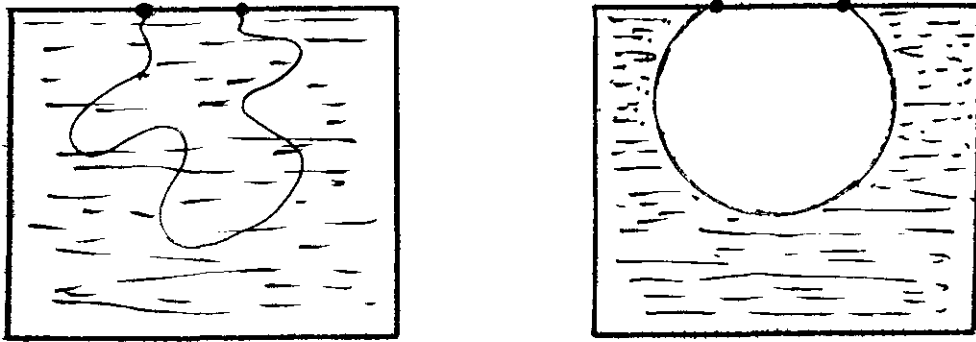


Figura 9: Otra modificación del problema isoperimétrico del plano

5. Superficies minimales

Recordemos que las superficies minimales son puntos críticos del área; sin embargo, no minimizan necesariamente el área para un borde dado. Analizamos esto con un poco más de detalle. Un tipo de superficies fáciles en su descripción son aquéllas que son grafos de funciones diferenciables, es decir, si $z : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida en un abierto D , su grafo es la superficie: $S = \{(x, y, z(x, y)); (x, y) \in D\}$.

Un cálculo algo tedioso, pero no difícil, nos dice que para la superficie S anterior, la curvatura media H satisface la ecuación:

$$(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy} = -2H(\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2})^{\frac{3}{2}}, \quad (7.1)$$

donde los subíndices denotan las correspondientes derivadas parciales. Esta ecuación diferencial es una ecuación “buena” en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales y con fuertes consecuencias geométricas. Si la superficie es minimal ($H = 0$), entonces la ecuación (7.1) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0.$$

Usando el teorema de la divergencia (una generalización del teorema fundamental del Cálculo), se prueba que todo grafo minimal cuyo borde es una curva cerrada es la superficie con menor área de entre todas las superficies con dicho borde. Por otro lado, toda superficie se puede describir localmente como grafo de una cierta función diferenciable. En consecuencia, *una superficie minimal minimiza localmente el área de entre todas las superficies que bordean una curva dada.*

Cuando la superficie minimal no es grafo de una función, la superficie no tiene porqué minimizar el área, como muestra la superficie de la figura 10.

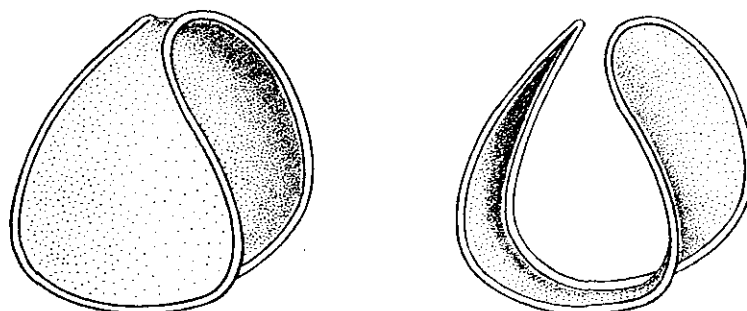


Figura 10: Un contorno de alambre que es borde de dos superficies minimales

Como ya hemos visto, para conseguir ejemplos de superficies minimales basta con realizar películas jabonosas con armazones cerrados de alambre. Uno puede comprobar, con un poco más de trabajo, que cualquier forma que adopte dicho contorno, siempre determina al menos una película de jabón. Podemos plantearnos la siguiente pregunta: dado un contorno cerrado, ¿existe una película de jabón cuyo borde sea dicho contorno? Geométricamente, esta pregunta equivale al siguiente problema:

Problema de Plateau. Dada una curva cerrada C , ¿existe una superficie minimal S cuya frontera ∂S sea C ?

Podemos también preguntarnos cómo es dicha superficie, cuántas hay, cuál es su topología, etc. La primera persona que estudió de una forma sistemática la geometría de las pompas de jabón fue el físico belga Joseph Plateau, hace más de un siglo.

La respuesta la dio conjuntamente Douglas y Radó en los años 30. Hay que observar que dicho problema es muy difícil, con implicaciones en el cálculo variacional, el análisis complejo y la topología.

Teorema 2 (Douglas-Radó) *Dada una curva cerrada sin autointersecciones, existe una superficie minimal con la topología de un disco que bordea dicha curva.*

La importancia del resultado lo muestra el hecho de que la primera medalla Fields que se ha dado en la historia fue para Douglas por dicho resultado.

La historia de las superficies minimales es larga y empieza ya con Lagrange. Durante el siglo XIX numerosos matemáticos se dedicaron a mostrar más ejemplos de superficies minimales: Meusnier, Scherk, Weierstrass, Enneper, Schwarz, Darboux, Serret, Riemann, Beltrami, Plateau. A mediados del siglo XX, grandes matemáticos han dedicado su trabajo a la teoría de superficies minimales: Courant, Douglas, Shiffman, etc. De nuevo, al finalizar dicho siglo, esta teoría ha vuelto a tomar nuevos impulsos y diversificado sus problemas.

De entre los ejemplos de superficies minimales, aparte del plano, vamos a destacar dos. El primer ejemplo se debe a Euler. Él se planteó por la forma que tenía que tener una superficie de revolución de área mínima y con borde prefijado. Probó que dicha superficie es la obtenida de rotar una catenaria: la catenaria es la forma que adopta una cadena suspendida por sus extremos cuando se encuentra en equilibrio. La superficie de revolución se llama catenoide. *La catenoide es la única superficie de revolución que es minimal.*

El segundo ejemplo es el helicoide. Esta superficie está originada al mover una semirrecta horizontal que se va apoyando a lo largo de una hélice. En particular, el helicoide está formado por rectas. *El helicoide es la única superficie reglada que es minimal.*

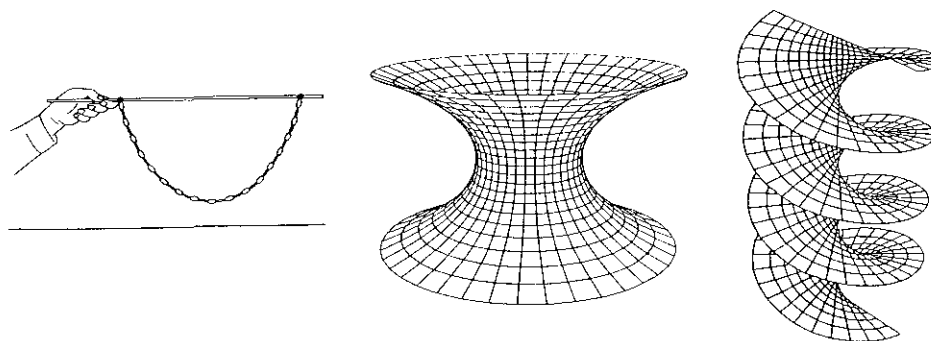


Figura 11: Catenaria, catenoide y helicoide

De entre las numerosas cuestiones que podemos plantearnos en la teoría de

superficies minimales, quiero mostrar una, que por su sencillez merece la pena detenerse un poco. En 1860, Riemann halló una familia de superficies minimales formadas por circunferencias en planos paralelos y él mismo probó que no había otras superficies minimales con dicha propiedad. Cogemos ahora dos circunferencias C_1 y C_2 contenidas en sendos planos paralelos P_1 y P_2 . ¿Cuáles son las superficies minimales acotadas por $C_1 \cup C_2$?, ¿la intersección de una de ellas con un plano paralelo a P_1 resulta también una circunferencia? La respuesta es afirmativa y la dio Shiffman en 1956. Cabe decir que la demostración de dicho resultado es difícil y sale de los objetivos de esta exposición. A raíz del teorema de Shiffman, hacemos el siguiente experimento:

Experimento 4. Tomamos dos aros circulares de alambre y lo sumergimos en un recipiente que contenga agua con jabón. Dentro del agua colocamos los dos aros de forma paralela, uno por encima del otro, y saquémoslos (necesitamos que estén próximos para que puedan determinar una película jabonosa.) Probablemente, dicha superficie tenga aristas en su interior. En tal caso, con la ayuda de un lápiz, rompemos el trozo de película jabonosa para que la superficie no tenga aristas. Podemos observar entonces que si los dos aros son concéntricos la superficie que obtenemos es una catenoide.

Por otro lado, si desplazamos los dos aros en direcciones paralelas pero en sentido contrario, vamos obteniendo una familia de superficies. En principio no sabemos cómo son, pero el teorema de Shiffman, nos asegura que cada una de esas superficies es una superficie de Riemann. Por tanto, cada rodaja horizontal de la película de jabón es una circunferencia.

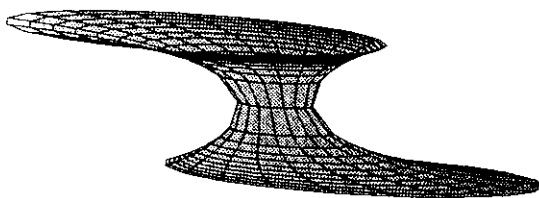


Figura 12: Superficie de Riemann

6. Superficies con curvatura media constante

Ya sabemos que el cilindro y la esfera son superficies con curvatura media constante. Hasta hace poco años, no muchos más ejemplos eran conocidos. Solamente se tenían descritas las *superficies de revolución* con curvatura media constante.

Delaunay, en 1838, clasificó todas ellas. Lo curioso es que se describen de forma sencilla de la siguiente forma. Se considera una cónica apoyada sobre una recta L y se hace desplazar la cónica a lo largo de L sin deslizarse. Se considera la traza de un foco de la cónica. Entonces la superficie de revolución que se obtiene al girar dicha curva respecto de la recta L tiene curvatura media constante. Además, todas las superficies de revolución con curvatura media constante se obtienen de esta forma. Un trozo de segmento da esferas y la circunferencia da cilindros; la parábola determina catenoides; por último, la elipse y la hipérbola dan, respectivamente, onduloideas y nodoideas.

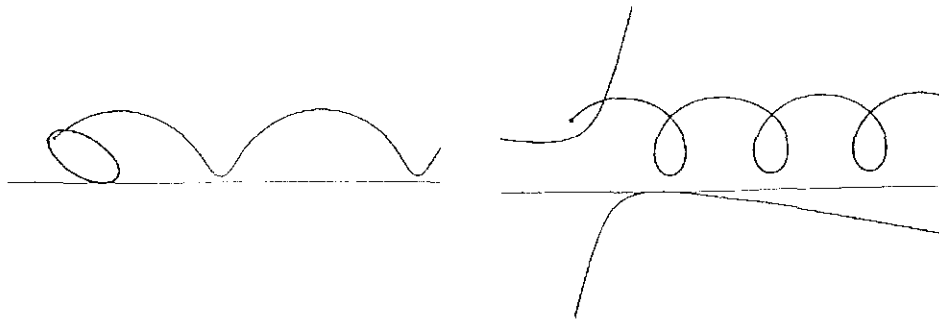


Figura 13: Forma de obtener superficies de Delaunay

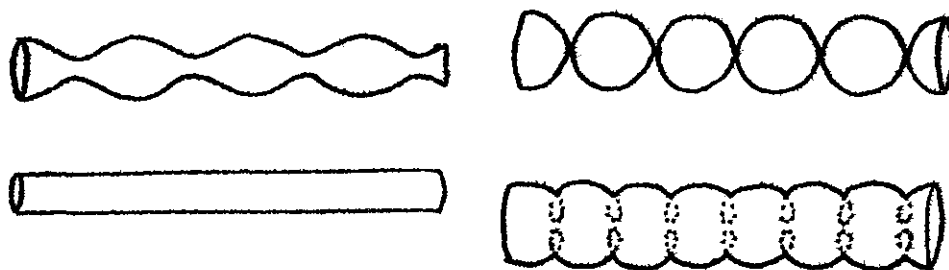


Figura 14: Superficies de Delaunay

De entre las superficies de revolución anteriores, la única que es cerrada (acotada y sin borde) es la esfera. Hasta 1986, el único ejemplo conocido era éste y, por tanto, todos los resultados se encaminaban a caracterizar las esferas en la familia de superficies cerradas con curvatura media constante. Ya en 1899, Liebmann demostró que *los únicos ovaloides con curvatura media constante son esferas*.

El teorema de Liebmann se puede generalizar en dos sentidos: medio siglo más tarde, en 1951, Hopf probó el siguiente resultado.

Teorema 3 (Hopf) *Las únicas superficies homeomorfas a las esferas y con curvatura media constante son las esferas.*

Por otro lado, en toda una serie de artículos entre 1956 y 1962, Alexandrov obtuvo un resultado fundamental dentro de esta teoría.

Teorema 4 (Alexandrov) *Las únicas superficies cerradas sin autointersecciones y con curvatura media constante son las esferas.*

Este resultado fue verdaderamente sorprendente, no por su contenido, que era esperado, sino por el método que Alexandrov inventó para demostrarlo, que era completamente distinto de los de Liebmann y Hopf y que se apoya esencialmente en una utilización recurrente del principio del máximo para las ecuaciones elípticas. Es el llamado método de reflexión de Alexandrov, que ha sido utilizado por numerosos autores, no sólo en problemas exclusivamente geométricos, y que sigue siendo un método fecundo de estudio en geometría diferencial y en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales.

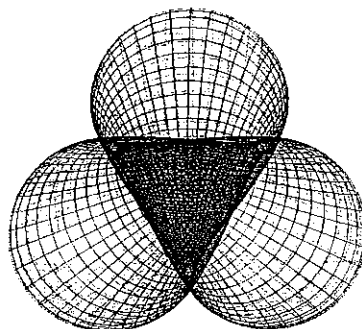


Figura 15: Toro de Wente

A la vista de la falta de ejemplos y de los teoremas de Hopf y Alexandrov, durante varias décadas existía la siguiente conjetura, debida a Hopf: la esfera es la única

superficie cerrada en \mathbb{R}^3 con curvatura media constante. Sin embargo,

Wente demostró en 1986 que existen superficies cerradas con curvatura media constante que no son esferas. Construyó explícitamente toros con autointersecciones de curvatura media constante.

Después de él, numerosos geómetras se dedicaron a hallar más ejemplos y no solamente toros, sino superficies con género arbitrario. Cabe destacar a Kapouleas, que consiguió construir en 1991 superficies tanto cerradas como no cerradas de género mayor que uno y con curvatura media constante.

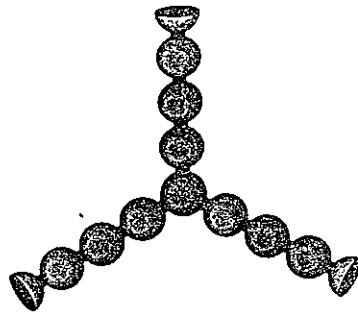


Figura 16: Una superficie de Kapouleas no acotada

7. Una pregunta de la que sospechamos su respuesta

Volvamos a nuestra motivación original de este texto, con el siguiente experimento.

Experimento 5. Cogemos un aro *circular* y lo sumergimos en un recipiente que contenga agua jabonosa. Al sacarlo obtenemos un disco plano. Soplamos hacia el disco de forma que no se desprenda una pompa de jabón. Sin dejar de estar soplando, para que la pompa adherida al aro no se vuelva a convertir en disco, observamos que la superficie resultante es un trozo de esfera, es decir, un casquete esférico (para los fumadores, pueden realizar un experimento análogo expulsando humo por la pipa, sin que se desprenda una bolita de humo.)

¿Son éstas las únicas configuraciones posibles? Así se nos muestra cada vez que hacemos el mismo experimento. Podemos ahora, a raíz de dicho experimento y desde un punto de vista matemático, plantear el siguiente problema:

¿Cuál es la forma de una superficie acotada con curvatura media con-

stante y con frontera una circunferencia?

Si la circunferencia C tiene radio r , tenemos los siguientes ejemplos. Si $H = 0$, el disco plano es la única superficie minimal que bordea C . Para cada H , $0 < H < 1/r$, tenemos dos casquetes esféricos (grande y pequeño) de radios $1/H$. Si $H = 1/r$, un ejemplo es la semiesfera de radio r .

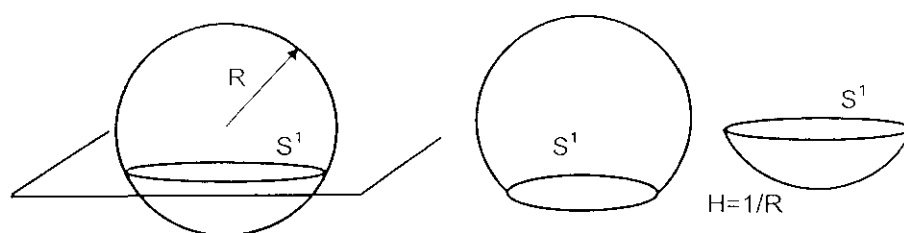


Figura 17: Casquetes esféricos

¿Hay más ejemplos? Sí. Kapouleas dio ejemplos de superficies acotadas con curvatura media constante cuyo borde es una circunferencia. Estos ejemplos tienen autointersecciones y no tienen la topología de un disco.

Los casquetes esféricos y los discos planos son discos topológicos y no tiene autointersecciones. Cabe preguntarse, pues, si como muestran los experimentos, son los únicos con algunas de estas propiedades. Sorprendentemente aun hoy no se sabe dar una respuesta afirmativa. Recordando los teoremas de Hopf y de Alexandrov, hoy en día se tiene planteadas las dos siguientes conjeturas:

Conjetura 1. Los casquetes esféricos y los discos planos son las únicas superficies acotadas con curvatura media constante con la topología de un disco y con borde circular.

Conjetura 2. Los casquetes esféricos y los discos planos son las únicas superficies acotadas con curvatura media constante sin autointersecciones y con borde circular.

No sólo esto, sino que apenas se tiene un conocimiento exacto sobre la estructura de las superficies de curvatura media constante y con borde circular. Se sabe que H tiene que satisfacerla desigualdad $0 \leq |H| \leq 1/r$ y que en el caso $H = 1/r$, la superficie tiene que ser una semiesfera. La misma demostración del teorema de Alexandrov puede usarse para probar que *las únicas superficies acotadas con cur-*

vatura media constante sin autointersecciones con borde circular y que se encuentra por encima del plano que contiene a la circunferencia, son los casquetes esféricos.

No cabe duda de la simpleza y claridad con las que están enunciadas las dos conjeturas. Llegados a este momento, reflexionemos en que toda esta sencillez encierra una gran dificultad matemática. En verdad, esto mismo sucedió en el caso cerrado, ya que los resultados de Hopf y Alexandrov son relativamente recientes. La evidencia de la experiencia nos hace sugerir que las dos conjeturas son ciertas.

Bibliografía

[HT] S. Hildebrandt, A. Tromba, *Matemáticas y formas óptimas*, Prensa Científica, 1990 (Se da un repaso histórico del problema isoperimétrico y la teoría de superficies minimales. Apenas contiene formulación matemática. Apropiado para cualquier estudiante de Ciencias).

[I] C. Isenberg, *The Science of Soap Films and Soap Bubbles*, Dover, 1992 (Un libro destinado a un conocimiento más profundo de la ecuación de Laplace-Young. Aparecen numerosos ejemplos y problemas de la Física en los de se muestra el efecto de la tensión superficial. Hay también una suficiente base de geometría diferencial, de forma que es un libro atrayente para un alumno interesado en la interrelación entre la Física y la Geometría.)

[L] D. Lovett, *Demonstrating Science with Soap Films*, Institute of Physics Publ. 1994 (En el libro no sólo se trata las pompas de jabón, sino otros fenómenos físicos que son resultado del principio de minimización. El autor usa las pompas de jabón como ayuda para comprender otros fenómenos de la Física y de la ciencia en general).

[O] J. Oprea, *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, Student Mathematical Library vol. 10. American Mathematical Society, 2000 (Introduce las superficies minimales y las superficies con curvatura media constante. El programa Maple permite al autor el estudio de numerosos ejemplos de este tipo de superficies).

[WWW] Direcciones de internet. Existen varias páginas en internet donde aparecen numerosas imágenes realizadas por ordenador de superficies minimales y superficies con curvatura media constante. Una completa lista de direcciones de internet se encuentra en: www.ugr.es/local/surfaces/msi.htm.