El Reparto del Botín

por

David Pérez-Castrillo, Universitat Autònoma de Barcelona

Introducción

Como vemos en películas, repartir un botín nunca es una tarea fácil. Es difícil saber cuánto merece cada uno de los participantes y mucho más difícil aún hacer el reparto compatible con lo que cada una de las personas involucradas cree merecer.

Para hacernos una idea sobre el tipo de situaciones en las que estamos pensando, imaginemos que nos piden decidir sobre cuál es el reparto "razonable" en el siguiente caso:

Tres personas, Ana, Bea y Carlos pueden trabajar juntos, por parejas, o separados. Si trabajan en equipo, ganan 300 euros. Y esto es lo mejor para todos ellos, porque si Ana y Bea trabajan juntas, entonces ganan 150 euros mientras que Carlos sólo obtiene 60 euros. Si Ana y Carlos decidiesen ir por su cuenta, obtienen 120 euros mientras Bea sólo consigue 30 euros. Por último, si Ana estuviese sola no puede obtener nada, y si Bea y Carlos decidiesen trabajar juntos, entonces consiguen 180 euros. Para representar más fácilmente esta situación, usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} v(A,B,C) &= 300, \\ v(A,B) &= 150, v(A,C) = 120, v(B,C) = 180, \end{aligned}$$

$$v(A) = 0, v(B) = 30, v(C) = 60.$$

¿Qué haríais? ¿Cómo repartiríais este "botín" ? Una posibilidad es argumentar que como, al final, los tres van a trabajar juntos porque es lo mejor "en conjunto", deben obtener 100 euros cada uno. Pero no parece una respuesta muy razonable, porque parece sensato tener también en cuento cuánto hubiesen podido ganar de otra forma, por parejas o en solitario.

Otra posibilidad es proponer a las tres personas algún tipo de mecanismo (de $juego$) a través del cual puedan competir por ese dinero. Dado el título del artículo, no puedo evitar proponer un juego muy conocido: "El juego del pirata". Se trata de un juego propuesto para repartir los doblones obtenidos en un botín. Se le pide al pirata más viejo que haga una propuesta de reparto. Si una mayoría simple de piratas acepta el reparto, entonces se lleva a cabo. Pero si no, se coge al pirata que ha hecho la propuesta y se le tira por la borda (por cierto, aunque no haga falta decirlo, el mar en estos casos siempre está infestado de tiburones). En caso de que se tire el pirata al mar, se le pide al segundo pirata más viejo que haga una propuesta. Y así hasta que una propuesta se acepte por mayoría simple (del grupo de piratas que quede en el barco).

Antes de ver qué ocurre si utilizamos este juego en nuestro ejemplo, pensad un momento: ¿os gustaría ser el pirata más viejo?. Veamos si cambiáis de opinión tras analizar el ejemplo. Vamos a aplicar este juego para repartir los 300 euros, suponiendo que Ana es la jugadora más vieja y Carlos el más joven. ¿Qué propuesta hará Ana?. La única forma razonable de decidirlo es "por inducción hacia atrás", es decir, pensando que pasará si deciden tirarle por la borda y poniéndose en el pellejo de los otros dos. Si Bea tiene que hacer una propuesta a Carlos, ¿cuánto le ofrecerá?. ¡No necesita ofrecerle nada! porque con su voto (el de Bea) ya tiene mayoría simple. Luego todo el mundo sabe que si Ana va por la borda, el reparto posterior será 300 euros para Bea y 0 euros para Carlos. Volvamos ahora a la decisión de reparto que tiene que realizar Ana. ¿Qué les ofrecerá?. Es suficiente que ofrezca 1 euro a Carlos para que éste acepte su propuesta (porque si no acepta, no obtendrá nada luego), con lo que obtiene la mayoría. Luego el reparto final será $(299, 0, 1)$. ¡Y ya véis que es muy bueno ser el pirata viejo!.

El inconveniente de solucionar el reparto del botín a través de un juego como el anterior es que el resultado es muy sensible a quién empieza el juego. Y además, hay muchos otros juegos posibles, con resultados muy distintos; ¿por qué elegir precisamente el juego del pirata?.

En todo caso, esta forma de tomar decisiones es en ocasiones razonable (¡siempre y cuando no se lo jueguen a vida o muerte!) y al estudio del resultado de los mecanismos en los cuales los participantes compiten se dedica la *teoría de los juegos no cooperativos*. Se trata de una teoría muy rica e interesante en la que grandes matemáticos y economistas han trabajado.[1]

Aquí, vamos a intentar dar una respuesta a la pregunta sobre cuál es el reparto "razonable" desde un enfoque distinto. Vamos a preguntarnos qué propiedades creemos que debe satisfacer una regla "razonable" de reparto, en lugar de plantearnos únicamente el ejemplo propuesto. Es decir, en lugar de resolver un problema particular, vamos a "simplificarnos la vida" resolviendo todos los problemas de reparto posibles. Discutiremos sobre principios generales, en lugar de pelearnos por el reparto en una situación particular.

Los juegos cooperativos

Un *juego cooperativo* es, para nosotros, un par (N, v), donde N es el conjunto de n jugadores ($N = \{A, B, C\}$ en el ejemplo anterior) y v es una función que nos dice el valor que cada subconjunto de N puede obtener, es decir, $v : 2^N \to \mathbb{R}$. A cada uno de los posibles grupos $S \subseteq N$ que los jugadores de N pueden formar le llamaremos una *coalición*, con lo que $v(S)$ nos informa sobre cuánto (dinero) puede obtener la coalición S si se forma. Por comodidad notacional, supondremos que $v(\emptyset) = 0$. Además, como vamos a pensar en situaciones en las que es bueno que todos los jugadores se junten, vamos a suponer por sencillez que los jugadores obtienen más beneficio conjunto si se ponen todos de acuerdo que si forman grupos más pequeños, es decir,[2]

$$v(N) \geq \sum_{S \in P} v(S) \text{ para toda partición } P \text{ del conjunto } N.$$

Partiremos de la base de que, como lo mejor que pueden hacer los jugadores es ponerse de acuerdo y formar N, lo harán y buscamos la forma de repartir lo que pueden obtener juntándose. Y queremos hacer este ejercicio para todos los juegos cooperativos posibles. Es decir, buscamos un *valor* ϕ que asigne a cada juego (N, v) un vector indicando cuánto obtiene cada jugador $i \in N$. Denotaremos por

[1] El lector curioso tiene muchas referencias sencillas para acercarse a la teoría de los juegos no cooperativos, como Gibbons (1992) o Binmore (1994).

[2] Esta propiedad no es necesaria para el análisis que vamos a desarrollar, pero algunas de las ideas que vamos a proponer son más fáciles de entender si se cumple.

ello $\phi_i(N, v)$ a la ganancia que, de acuerdo con el valor ϕ, el jugador $i \in N$ debe obtener en el juego (N, v).

El valor de Shapley

Lloyd S. Shapley fue uno de los primeros investigadores en el área de la teoría de los juegos y se planteó el problema anterior de cómo repartir las ganancias de la cooperación.[3] Propuso algunas propiedades que una regla "razonable" de reparto debe cumplir.

La primera propiedad es que se reparta entre los jugadores todo lo que ellos pueden obtener, es decir, que sea eficiente:

Eficiencia. Un valor ϕ satisface el axioma de *eficiencia* si $\sum_{i \in N} \phi_i(N, v) = v(N)$ para cualquier juego (N, v).

La segunda propiedad es que el valor debe ser anónimo (simétrico), en el sentido que lo que un jugador gane no sea función de su nombre, sino de su contribución al juego. Para escribir esta propiedad, consideremos una permutación cualquiera σ del conjunto N. Definimos entonces la permutación σ del juego (N, v), a la que denotaremos $(N, \sigma v)$, como aquel juego cuya función se define como es $(\sigma v)(S) = v(\sigma S)$, donde σS es la imagen de la coalición S de acuerdo con la permutación σ.

Simetría. Un valor ϕ satisface el axioma de *simetría* si $\phi(N, \sigma v) = \sigma\phi(N, v)$ para cualquier juego (N, v) y para cualquier permutación σ.

También parece razonable proponer que lo que los jugadores obtengan no dependa del protocolo del reparto, de si primero se reparte una parte del botín y luego el resto, por ejemplo. Ésta es una propiedad débil de linealidad. Para proponerla, definamos la suma de dos juegos (N, v) y (N, v') como el juego $(N, v + v')$ donde $(v + v')(S) = v(S) + v'(S)$ para cualquier coalición $S \subseteq N$.

Linealidad. Un valor ϕ satisface el axioma de *linealidad* si $\phi(N, v + v') = \phi(N, v) + \phi(N, v')$ para todo par de juegos (N, v) y (N, v').

Finalmente, vamos a proponer una última propiedad que es también muy razo-

[3] Lloyd S. Shapley sigue la estela del primer libro en el que se plantea y analiza la teoría de los juegos (no cooperativos), escrito por John von Neumann y Oskar Morgenstern (1944). John Nash (1950) realizó una aportación fundamental a la teoría, que fue una de las contribuciones (posiblemente la más importante) por las que obtuvo el premio Nóbel de Economía en 1994.

nable: quien no contribuya ni perjudique, no debe ni recibir ni pagar. A este tipo de jugador se le llama jugador nulo, o jugador inútil ("dummy player" en inglés). Diremos que el jugador $i \in N$ es un jugador nulo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para toda coalición $S \subseteq N$.

Jugador nulo. Un valor ϕ satisface el axioma de *jugador nulo* si $\phi_i(N, v) = 0$ siempre que i sea un jugador nulo en el juego (N, v).

Si todas las propiedades anteriores os han parecido razonables, estamos de suerte porque entonces podemos dar una respuesta inequívoca a la pregunta de cómo repartir el botín en el ejercicio propuesto en la Introducción. De hecho podemos dar una respuesta única a cualquier problema de reparto (N, v). Éste es el principal resultado de Shapley (1953):

Teorema. Existe un único valor ϕ^* que satisfaga los axiomas de eficiencia, simetría, linealidad y jugador nulo. Dicho valor viene dado por la fórmula siguiente:

$$\phi_i^*(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

para todo jugador $i \in N$ y para todo juego (N, v).

Demostración. Dado que la demostración de este resultado es bastante simple e intuitiva, damos aquí los pasos fundamentales. Fijemos el conjunto de jugadores N. Definamos una clase particular de juegos muy sencillos, a los que denotaremos v_R, de la forma siguiente:

$$v_R(S) = \begin{cases} 1 \text{ si } S \supseteq R, \\ 0 \text{ si } S \not\supseteq R. \end{cases}$$

Además, podemos definir el juego (N, cv_R), simplemente por $(cv_R)(S) = cv_R(S)$. Es fácil ver que, dado que ϕ^* satisface los axiomas de eficiencia, simetría y de jugador nulo (y todos los jugadores en $N \setminus R$ son nulos), tiene que ocurrir que:

$$\phi_i^*(N, cv_R) = \begin{cases} \frac{c}{r} \text{ si } i \in R, \\ 0 \text{ si } i \notin R. \end{cases}$$

La parte un poco más calculística de la demostración es ver que cualquier función característica v puede expresarse como combinación de funciones de la forma cv_R, eligiendo adecuadamente los coeficientes (a los que denotamos $c_R(v)$) que multiplican cada una de las funciones simples v_R. Es decir, los juegos (N, v_R) constituyen una base para el conjunto de los juegos (N, v). De hecho,

$$v = \sum_{\substack{R \subseteq N \\ R \neq \emptyset}} c_R(v) v_R,$$

donde

$$c_R(v) = \sum_{T \subseteq R} (-1)^{|R|-|T|} v(T).$$

A partir de aquí, y tras unos cálculos sencillos de combinatoria, el axioma de linealidad nos lleva a la expresión propuesta. C.Q.D.

¿Cuánto tienen que ganar Ana, Bea y Carlos, de acuerdo con el *valor de Shapley*? Ana es la que menos obtiene, $\phi^*_A = 70$ euros, mientras que cada uno de sus compañeros gana lo mismo, $\phi^*_B = \phi^*_C = 115$ euros.

Es un poco difícil ver por qué ese reparto se deriva de los axiomas que hemos propuesto como razonables. Dada esta dificultad, vamos a enfocar el problema de reparto de los 300 euros de una forma un poco distinta, y luego vemos en qué difieren estos enfoques.

Imaginemos que colocamos a nuestros tres jugadores en una fila, por ejemplo el primero de la fila es Carlos, luego Ana y luego Bea. Según van llegando para pedir su parte del botín, les damos lo que “hasta ese momento” merecen. Cuando Carlos llega, pide lo que es suyo. Pero como está sólo, lo máximo que puede obtener es $v(C) = 60$, luego le damos 60 euros. Cuando llega Ana, estamos en una situación en la que el equipo está formado por Ana y Carlos, $v(A, C) = 120$. Como ya hemos gastado 60 euros con Carlos, a Ana le damos el resto, otros 60 euros. Finalmente, cuando llega Bea, podemos por fin conseguir los 300 euros, como ya hemos pagado 120 euros le damos el resto a ella. A cada uno de los jugadores le hemos asignado su contribución marginal (CM) al grupo que hasta entonces se ha formado.

Está claro que cuánto obtiene cada uno depende estrechamente del orden en que entran. Para ser justos, tomemos la media de dichas contribuciones para todos los órdenes posibles. ¿Cuál es esa media?

Orden	CM del jugador A	CM del jugador B	CM del jugador C
ABC	0	150	150
ACB	0	180	120
BAC	120	30	150
BCA	120	30	150
CAB	60	180	60
CBA	120	120	60
Media	70	115	115

¿Casualidad que los dos procedimientos den el mismo resultado? ¡Claro que no! Para cualquier problema de reparto podemos hacer lo mismo. De hecho, si volvemos a la expresión del valor de Shapley ϕ^*, nos daremos cuenta del porqué. Por un lado, la parte derecha, $[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$, es la contribución marginal del jugador i al conjunto S, para cualquier coalición S a la que i no pertenezca. Por otro lado, la expresión $|S|!(n - |S| - 1)!$ mide cuántas combinaciones de los jugadores hacen posible que i vaya precisamente detrás del conjunto S en la fila. Finalmente, $n!$ es el número de filas distintas posibles, con lo que el sumatorio no es sino la media, tomada sobre todas las filas posibles, de la contribución marginal del jugador i al conjunto de jugadores que le precede.

Otras propiedades del valor de Shapley

El valor de Shapley ha sido muy estudiado y utilizado en Teoría de Juegos porque, además de los axiomas que lo caracterizan, tiene muy buenas propiedades.[4] Veamos alguna de ellas.

En algunas ocasiones, un jugador i puede percibir que ha sido peor tratado en el reparto que otro jugador j, que no se le ha reconocido su contribución de forma "justa". En lugar de quejarse al encargado del reparto, i puede decidir ir a ver al jugador j para intentar que éste le compense. Fijémonos que no hablamos aquí de simetría, ya que no estamos considerando ni cambios de nombre ni jugadores con contribuciones similares. Los jugadores i y j pueden contribuir de forma muy distinta al pago de las coaliciones a las que pueden pertenecer.

Una queja del jugador i al j puede tener la forma siguiente: "Gracias a que yo estoy en el juego, tú consigues obtener más, y me debes compensar por ello."

[4] Aquellos lectores curiosos pueden acercarse al libro de Alvin Roth (1988) que recopila algunos trabajos modernos sobre el valor de Shapley.

¿Cuánto más obtiene j gracias a que i está en el juego? Si ambos jugadores están de acuerdo en repartir de acuerdo a un valor ϕ, la respuesta a la pregunta anterior es $\phi_j(N, v) - \phi_j(N\backslash\{i\}, v)$, ya que $\phi_j(N\backslash\{i\}, v)$ es la parte del reparto que le correspondería al jugador j si el jugador i no hubiese participado. El valor de Shapley es un valor que satisface la propiedad de que ningún jugador puede quejarse a otro en esos términos. De hecho, tal y como el siguiente teorema señala, es (¡sorprendentemente!) el único valor eficiente que satisface esa propiedad.

Teorema. Un valor ϕ eficiente es el valor de Shapley ϕ^* si y sólo si se satisface que:

$$\phi_i(N, v) - \phi_i(N\backslash\{j\}, v) = \phi_j(N, v) - \phi_j(N\backslash\{i\}, v)$$

para todo (N, v) y para todo $i, j \in N$.

Demostración. Es fácil ver, usando rudimentos de combinatoria, que ϕ^* satisface la propiedad. La demostración de que es el único valor que la satisface se basa en una inducción: una vez que sabemos que la propiedad es cierta para juegos con $n-1$ jugadores, conocemos las expresiones para todos los valores de la forma $\phi_i(N\backslash\{j\}, v)$. Las fórmulas anteriores, para todo $i, j \in N$, junto con la condición de eficiencia, forman un sistema lineal sencillo que tiene solución única. C.Q.D.

El valor de Shapley es pues el único valor eficiente "a prueba de quejas de uno contra otro". De hecho, incluso podemos establecer una propiedad más fuerte: el valor de Shapley es el único valor eficiente "a prueba de quejas de uno contra todos los demás".

Teorema. Un valor ϕ eficiente es el valor de Shapley ϕ^* si y sólo si se satisface que:

$$\sum_{j \in N\backslash\{i\}} [\phi_i(N, v) - \phi_i(N\backslash\{j\}, v)] = \sum_{j \in N\backslash\{i\}} [\phi_j(N, v) - \phi_j(N\backslash\{i\}, v)]$$

para todo (N, v) y para todo $i \in N$.

Entre el resto de propiedades y caracterizaciones del valor del Shapley, la última que voy a comentar es también sorprendente, por lo alejada que parece de la definición misma del valor.

Fijemos un juego cualquiera (N, v). Imaginemos que a cada jugador $i \in S$ le otorgamos un cierto "dividendo" μ_S por el hecho de pertenecer a la coalición S. Y, al final, al jugador le asignamos un valor $\phi_i(N, v)$ que corresponde a la suma de todos los dividendos que obtiene, dadas todas las coaliciones a las que pertenece, es decir,

$$\phi_i(N, v) = \sum_{\substack{S \ni i \\ S \subseteq N}} \mu_S.$$

Además, queremos poder utilizar el mismo método para asignar un valor cuando repartamos los beneficios de la cooperación de un subgrupo de jugadores $R \subset N$. Es decir, si consideramos ahora el juego (R, v), donde $R \subseteq N$, queremos también otorgar un valor

$$\phi_i(R, v) = \sum_{\substack{S \ni i \\ S \subseteq R}} \mu_S$$

a todos los jugadores $i \in R$.

Impongamos únicamente la propiedad que el valor que estamos construyendo sea eficiente, es decir, $\sum_{i \in R} \phi_i(R, v) = v(R)$, para todo $R \subseteq N$. ¿Cuántas formas de asignar dividendos a las coaliciones existen de tal forma que sea luego posible distribuir de forma eficiente el valor de la cooperación?. ¿Qué aspecto tienen los valores que se obtienen de esta forma?. El siguiente resultado, cuyo origen se encuentra en el artículo de Harsanyi (1959), [5] da una respuesta sencilla y clara a las preguntas anteriores.

Teorema. Un valor ϕ eficiente es el valor de Shapley ϕ^* si y sólo si para todo juego (N, v) existen números reales $\mu_S \in \mathbb{R}$ para todo $S \subseteq N$ tales que:

$$\phi_i(R, v) = \sum_{\substack{S \ni i \\ S \subseteq R}} \mu_S$$

para todo $i \in R$ y para todo $R \subseteq N$.

Espero que todo el análisis anterior os haya convencido de que el valor de Shapley es una buena regla que podemos usar para repartir las ganancias que se obtienen cuando diversos agentes cooperan. Sin embargo, por desgracia (o quizás por suerte, porque si no ¡a lo mejor nos quedaríamos sin trabajo los investigadores!) el valor también tiene sus puntos débiles. Vamos a dedicar ahora un poco de espacio a alguna de estas debilidades.

[5] Por cierto, John Harsanyi también obtuvo el premio Nóbel de Economía en 1994, junto con John Nash y Reinhard Selten.

Cuando he propuesto en la Introducción el ejemplo de Ana, Bea y Carlos, quizás a alguno se le haya ocurrido el siguiente razonamiento: El reparto tiene que satisfacer que, dado lo que obtienen sus jugadores, ninguna coalición prefiera marcharse por su cuenta. En nuestro ejemplo, esta propiedad se cumple, ya que cada uno de los jugadores obtiene más de lo que hubiese obtenido sólo (por ejemplo, $\phi_A^* = 70 \geq 0 = v(A)$) y además, los miembros de cualquier coalición de dos jugadores también obtienen más conjuntamente de lo que ganarían si se marchasen por su cuenta (por ejemplo, $\phi_A^* + \phi_B^* = 185 \geq 150 = v(A, B)$).

El reparto propuesto en el ejemplo satisface que es "inmune a desviaciones de coaliciones". Sin embargo, ello no es cierto en general. Pensemos en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}
v(A, B, C) &= 300, \\
v(A, B) &= v(A, C) = v(B, C) = 250, \\
v(A) &= v(B) = v(C) = 0.
\end{aligned}$$

Las propiedades de eficiencia y simetría nos dicen inmediatamente que todos los jugadores obtienen lo mismo en el valor de Shapley, $\phi_A^* = \phi_B^* = \phi_C^* = 100$. Sin embargo, cualquier par de jugadores, por ejemplo Ana y Bea, tendrán la tentación de marcharse por su cuenta, ya que así obtienen 250 entre las dos (que se pueden repartir, por ejemplo, a partes iguales).

Sólo en algunos tipos de juego, como en los juegos convexos, estamos seguros de que el valor de Shapley es siempre inmune a desviaciones por parte de coaliciones.

Definición. Decimos que un reparto $x \in \mathbb{R}^n$ pertenece al *núcleo* del juego (N, v) si satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} x_i &= v(N), \text{ y} \\
\sum_{i \in S} x_i &\geq v(S) \text{ para todo } S \subset N.
\end{aligned}$$

Hay que señalar que el núcleo de un juego puede tanto incluir muchas asignaciones como ser vacío (como en el segundo ejemplo que hemos visto).

Definición. Decimos que el juego (N, v) es convexo si para todo $S, R \subset N$ con $R \subset S$, y para todo $i \notin S$, se satisface la siguiente desigualdad:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(R \cup \{i\}) - v(R).$$

Teorema. El valor del Shapley ϕ^* pertenece al núcleo del juego siempre que el juego sea convexo.

Otra propiedad que, al menos en ciertas ocasiones, es deseable en una regla de reparto es la de *consistencia*. Lo que esta propiedad nos dice es que si, una vez que hemos realizado el reparto, miramos a un grupo cualquiera de jugadores y repensamos el reparto que hemos hecho para ese grupo, el resultado es el mismo.

Dicho de otra forma, pensemos otra vez en nuestro ejemplo con Ana, Bea y Carlos, en el que hemos repartido 300 euros otorgando 70 euros a Ana, y 115 euros a Bea y a Carlos. Imaginad que, una vez que ya les hemos anunciado cómo vamos repartir el dinero, llega Ana y recoge sus 70 euros. Quedan encima de la mesa 230 euros para repartir y entonces nos entran dudas sobre si el reparto entre Bea y Carlos es razonable. Si aplicamos ahora la regla al juego en el que los jugadores son Ana y Carlos, con $v(B, C) = 230, v(B) = 30$ y $v(C) = 60$ ¿seguimos repartiendo el dinero por igual?. La respuesta es negativa. En este caso, debiéramos dar 100 euros a Bea y 130 euros a Carlos.

Sobre la propiedad de consistencia, hablaremos un poco más en la próxima sección, donde analizamos un tipo de juegos cooperativos particularmente interesantes.

¡Bancarrota!

Hay muchas situaciones en las que hay que repartir un botín demasiado escaso. ¿Qué quiere decir esto?, que los participantes creen tener derecho a reclamar más de lo que es posible repartir. Ello ocurre desde luego siempre que una empresa está en bancarrota, ya que el estar bancarrota quiere decir que el valor de la empresa es menor que la suma de las deudas que ésta ha contraído en el pasado. ¿Cómo repartir "la escasez"?. ¿A quién se debe pagar primero y a quién después?.

Situaciones de bancarrota han existido desde hace mucho mucho tiempo (¡parece que siempre nos ha gustado endeudarnos!). Por ello, hay propuestas para resolver estos problemas ya en textos muy antiguos, incluso en textos religiosos. Encontramos un ejemplo bastante curioso en el Talmud. Veamos qué situaciones estudia y cuál es la respuesta que se da.

Hay tres acreedores, cuyas deudas son 100, 200 y 300. Se consideran tres situaciones distintas, correspondientes a casos en los que el valor de liquidación de la empresa es 100, 200 y 300 respectivamente. El Mishna[6] estipula los siguientes repartos del valor de liquidación:

$$(33 + \tfrac{1}{3}, 33 + \tfrac{1}{3}, 33 + \tfrac{1}{3})$$
$$(50, 75, 75)$$
$$(50, 100, 150).$$

Estos números han dado lugar a grandes debates, ya que deben guiar las decisiones de los jueces que tienen que solucionar problemas de bancarrota. Sin embargo, los tres casos parecen derivar de tres reglas de reparto distintas.

Para ayudar a aclarar (¡o complicar!) la situación, el mismo libro estipula el reparto que debe realizarse en un caso con dos acreedores: "Dos tienen una tela; uno de ellos la reclama entera, el otro reclama la mitad. Entonces, al primero se le concede $\frac{3}{4}$ de la tela, al otro $\frac{1}{4}$." Aquí, la lógica parece un poco más sencilla: quien reclama menos, concede al otro la mitad de la tela. Por tanto, es sólo la otra mitad la que está en litigio, que se divide a partes iguales.

Sorprendentemente, es posible compatibilizar ambos ejemplos de forma elegante (aunque ello sólo ha sido posible en 1985, en un artículo de Robert Aumann y Michael Maschler). Vamos a denotar (E, d) un problema cualquiera de bancarrota, donde $E \in \mathbb{R}_+$ es el valor de liquidación de la empresa y $d \in \mathbb{R}^n_+$ es el vector de reclamaciones de los n acreedores. Como estamos en bancarrota, $\sum_{i=1}^n d_i > E$.

Pensemos en problemas con dos acreedores, $n = 2$. La parte que el acreedor i concede al otro es $(E - d_i)_+$, luego la parte en disputa es $E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+$. Esa parte, se reparte de forma proporcional. A toda regla que, para los problemas de bancarrota con dos jugadores, reparta el valor de liquidación de esa forma, le llamaremos regla talmúdica.

Definición. Una *regla talmúdica* es cualquier regla para problemas de bancarrota que, para las situaciones con dos jugadores $(E, (d_1, d_2))$, otorgue al jugador i la siguiente parte:

$$x_i = \frac{E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+}{2} + (E - d_j)_+.$$

[6] El Mishna es un texto sagrado que tiene 2000 aos y forma la base de la legislación civil, criminal y religiosa Judía.

Además, vamos a requerir que la regla sea *consistente*, en un sentido bastante débil: si la regla asigna $x = (x_1, ..., x_n)$ ante un problema de bancarrota (E, d), entonces debe ser una regla talmúdica ante un problema de bancarrota $(x_i + x_j, (d_i, d_j))$. Es decir, si dos acreedores se encontrasen en la calle y aplicasen la misma regla al total que se les ha concedido, acabarían con el mismo reparto.

Proposición. Todo problema de bancarrota tiene una única solución consistente.

¿Cómo reparte el valor de liquidación la única regla consistente?. Es bastante curioso. Pensemos en un valor de liquidación que va aumentando. Cuando E es pequeño, se divide de forma igual entre los n acreedores. Continúa así hasta que el acreedor más pequeño (digamos que $d_1 \leq ... \leq d_n$) obtiene $d_1/2$, en cuyo caso deja de recibir nada por ahora. A medida que va aumentando el valor de liquidación, se da más a los otros $n - 1$ acreedores hasta que el segundo recibe $d_2/2$, y así hasta que el proceso termina, lo que ocurre cuando el valor E es la mitad de la deuda total. Cuando el valor de liquidación es mayor que la mitad del total de la deuda, hacemos un proceso similar, sólo que ahora igualamos pérdidas, en lugar de ganancias. Cuando E es muy grande, la pérdida total es pequeña y se iguala entre todos los acreedores. Ello es así hasta que el acreedor 1 ha perdido $d_1/2$, en cuyo momento ya no se le descuenta más. Y así sucesivamente. Fijémonos que la regla favorece a los pequeños acreedores cuando el valor de liquidación es pequeño y a los grandes acreedores cuando el valor es grande.

Aplicando esta regla al ejemplo anterior, se obtiene desde luego el reparto propuesto por el Mishna. Curioso, ¿no?.

Algunos de vosotros ya os habréis dado cuenta que el procedimiento anterior no es el utilizado normalmente en nuestro país. El código civil español propugna que el valor de liquidación de una empresa en bancarrota se reparta entre los acreedores de forma proporcional a las deudas que la empresa contrajo con ellos. Así, si la deuda con el primer acreedor es el doble que la deuda con el segundo, el primero recibirá el doble que el segundo (aunque ambos cobran menos del valor nominal de su deuda). Esta forma de repartir parece razonable. De hecho, ya fue utilizada en la antigüedad (los griegos, por ejemplo, la estudiaron y aplicaron hace ya muchos años).

La regla de reparto proporcional no es una regla talmúdica. Si uno de los acreedores reclama toda la tela y el otro reclama la mitad, el reparto proporcional corresponde a una proporción de $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, en lugar de $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ tal y como propone el Talmud.

Sí que es una regla consistente, en el sentido de que si aplicamos la regla porcional a un grupo de los jugadores una vez realizado un primer reparto, seguiremos repartiendo el total de la misma forma.

Recientemente, se ha caracterizado la regla de reparto proporcional a través de una propiedad bastante interesante (Maria Angeles de Frutos publicó el resultado en 1999). Para ver el interés de esta propiedad, recordemos el primero de los ejemplos del Talmud, en el que se tiene que repartir un valor de liquidación de 100 entre tres acreedores, cuyas reclamaciones son $100, 200$ y 300. Se estipula que, en este caso, el reparto sea $(33+\frac{1}{3}, 33+\frac{1}{3}, 33+\frac{1}{3})$. Pero imaginemos que el primer acreedor llega al reparto diciendo: "la inversión de 100 no era individual, sino era a medias con mi mujer, somos dos acreedores". Como es difícil confirmar esta afirmación, imaginemos que la dan por cierta. Entonces, el nuevo problema tiene cuatro acreedores, con reclamaciones $50, 50, 200$ y 300. El reparto propuesto por la regla consistente es, en este caso, 25 para cada uno de los acreedores, ¡con lo que ahora el primer acreedor (o la primera pareja) pasa de cobrar $33+\frac{1}{3}$ a cobrar 50!.

¿Es posible evitar comportamiento oportunistas de este tipo?

Teorema. La única regla de bancarrota no manipulable a través del agrupamiento o de la división de los acreedores es la regla proporcional.

El teorema nos dice que si los agentes involucrados en un proceso de bancarrota pueden agruparse o dividirse, entonces la única regla que es inmune a comportamientos estratégicos de este tipo por parte de los jugadores es la regla de reparto proporcional. ¿Es ello muy importante?. Muchas veces, los pequeños inversores se agrupan para poder defender mejor sus intereses. ¿Debemos considerar a los inversores uno a uno, o como una grupo de inversión?. Igual ocurre cuando varios miembros de una familia están involucrados en la inversión: ¿se trata de varios inversores o de una familia?. Por otro lado, un gran inversor es en ocasiones un fondo de inversión. ¿Debemos considerarlo como un único agente, o como tantos agentes como partícipes en el fondo?. La regla de reparto proporcional es la única que evita que tengamos que discutir sobre cómo tratar a los inversores.

Conclusión

En este artículo, he ilustrado con algunos ejemplos una forma de enfocar la resolución de situaciones complicadas, como los problemas de reparto. En lugar de intentar poner a los agentes de acuerdo en cómo se debe repartir la abundancia o la escasez en un caso particular, debemos ponernos de acuerdo a los agentes en qué propiedades les parecen deseables para una buena de reparto. Normalmente, es más fácil (¡y menos sangriento!) discutir sobre propiedades ex ante que sobre dinero, una vez la situación se plantee. El diseño y estudio de reglas que satisfagan las propiedades deseables ayuda a resolver conflictos particulares.

Bibliografía

[1] R. Aumann y M. Maschler, "Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud", *Journal of Economic Theory* 36, 195-213, 1985.

[2] K. Binmore, *Teoría de juegos*, McGraw-Hill, 1994.

[3] M. A. de Frutos, "Coalitional manipulations in a bankruptcy problem", *Review of Economic Design* 4, 255-272, 1999.

[4] R. Gibbons, *Un primer curso de teoría de juegos*, Antoni Bosch editor, 1992.

[5] J.C. Harsanyi, "A bargaining model for the cooperative $n-$person game", en *Contributions to the theory of games* vol. 4, eds. A. W. Tucker y R.D. Luce, Princeton University Press, 1959.

[6] J. Nash, "Equilibrium points in N-Person Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1950.

[7] A. Roth, ed., *The Shapley value. Essays in honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press, 1988.

[8] Ll. S. Shapley, A value for $n-$person games, en *Contributions to the theory of games* vol. 2, eds. H. Huhn y A. W. Tucker, Princeton University Press, 1953.

[9] J. von Neumann y O. Morgenster, *Theory of games and economic behavior*, Princeton, 1944.