¿Cuatro colores son suficientes?

por

Marta Macho Stadler, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

1. Un poco de historia

El problema de los cuatro colores es uno de los más famosos en matemáticas, y tiene la característica de haber interesado no sólo a matemáticos puros.

En esta charla, se trata de dar un repaso histórico del planteamiento y la evolución del problema, así como presentar (sin demostración) su *controvertida* solución.

1.1 Fechas importantes

Las fechas *clave* en el desarrollo del problema de los cuatro colores son las siguientes:

1852 Francis Guthrie plantea el problema a su hermano Frederick y a Augustus de Morgan.

1878 Arthur Cayley publica el enunciado de la conjetura.

1879 Sir Alfred Bray Kempe publica su demostración.

1890 Percy Heawood descubre un error *fatal* en la demostración de Kempe.

1913 George Birkhoff formula la noción de *configuración reducible*.

1960 Se introduce el *método de descarga*.

1969 Heinrich Heesch realiza grandes avances en reducibilidad y la obtención de conjuntos inevitables de configuraciones.

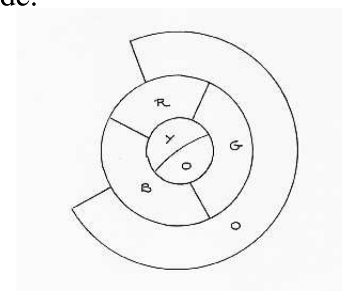
1976 Ken Appel y Wolfgang Haken prueban con ayuda de un ordenador que sus 1478 configuraciones son reducibles (50 días de cálculo).

1995 Robertson, Sanders, Seymour y Thomas mejoran la demostración anterior con ayuda de ordenador (sólo 633 configuraciones) y automatizan la prueba de la inevitabilidad.

Así, desde su planteamiento hasta su resolución, ha pasado ¡más de un siglo!

1.2 ¿Qué dice la conjetura?

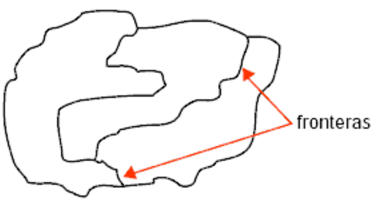
A lo largo de todo este escrito vamos a denotar los colores del modo siguiente: **Y** es amarillo, **B** denota azul, **R** es rojo y **G** significa verde.

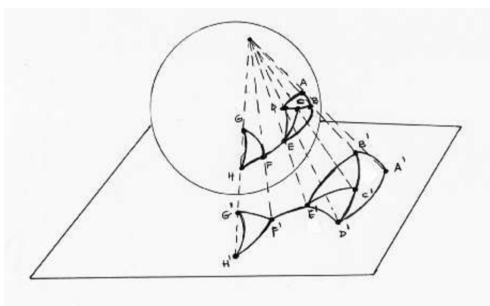


El problema de los cuatro colores afirma que *bastan cuatro colores para colorear un mapa geopolítico plano, sin que dos países con frontera común tengan el mismo color*.

Un mapa es siempre conexo y cada una de sus regiones también lo es, es decir no se admite una figura como la de la derecha.

Dos regiones no pueden tocarse en un único punto, y así, se pueden ignorar regiones con una única línea frontera.





Se trata claramente un *problema topológico*, pues no importa la forma de las regiones, sino como están colocadas las unas respecto a las otras.

Por las condiciones impuestas, la conjetura de los cuatro colores sobre mapas planos equivale a la conjetura del 4-coloreado sobre mapas esféricos, ya que basta con proyectar estereográficamente.

1.3 El teorema fundamental: la fórmula de Euler

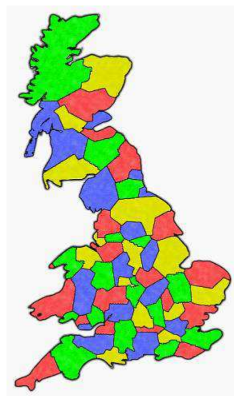
La proyección estereográfica (que es un homeomorfismo) permite pasar de poliedros a mapas: en efecto, se *infla* el poliedro sobre una esfera, se proyecta estereográficamente y se obtiene entonces una *imagen plana* del poliedro original.

Así, la *fórmula de Euler para mapas* se deduce de la correspondiente fórmula para poliedros, es decir:

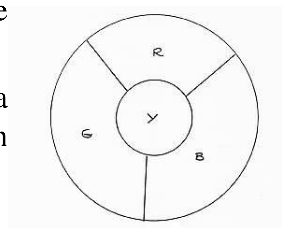
núm(regiones) - núm(líneas frontera) + núm(puntos encuentro)=2,

que es la clave de la prueba de la conjetura. Observar que en la anterior fórmula, la región exterior del mapa debe tenerse en cuenta en el cómputo.

1.4 Francis Guthrie



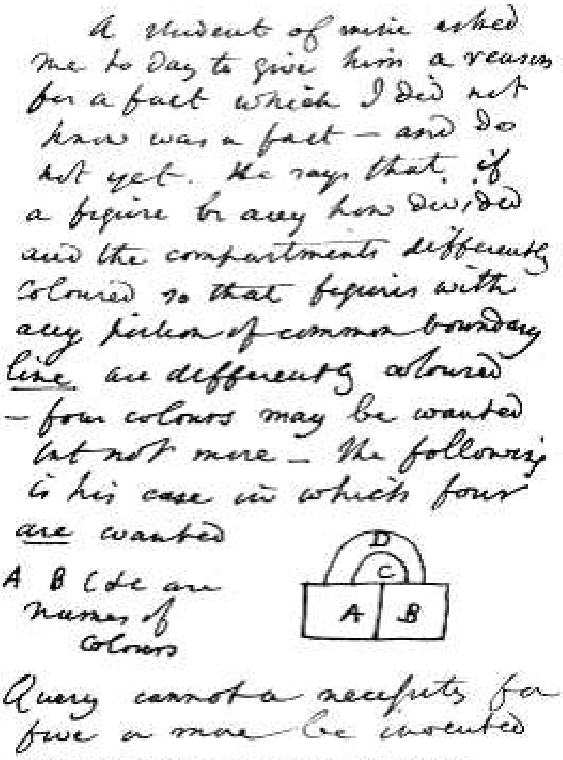
Francis Guthrie (1839-1899) abogado y botánico, observa que puede colorear un mapa complejo de los cantones de Inglaterra con cuatro colores.



En 1852, enuncia el problema a su hermano Frederick y a Augustus de Morgan, probando que tres colores no bastan con el diagrama "crítico" de la derecha:

1.5 Augustus De Morgan

Augustus De Morgan (1806-1871) estaba muy interesado en la conjetura de los cuatro colores y difundió entre sus colegas su importancia.
Una de las primeras personas con las que habló fue William Rowan Hamilton, que en principio no compartía el interés de De Morgan por el problema.


A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact — and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but not more — the following is his case in which four are wanted

A B C D are names of colours

Query cannot a necessity for five or more be invented

Part of Augustus De Morgan's letter to Sir William Rowan Hamilton, 23 October 1852.

En ese momento Hamilton estaba trabajando en teoría de cuaterniones, y respondió a De Morgan cuatro días después:

"I am not likely to attempt your "quaternion" of colours very soon".

Decepcionado por el desinterés de Hamilton, De Morgan se puso en contacto con otros matemáticos. En 1853, escribe al famoso filósofo William Whewell, describiendo su observación como un axioma matemático.

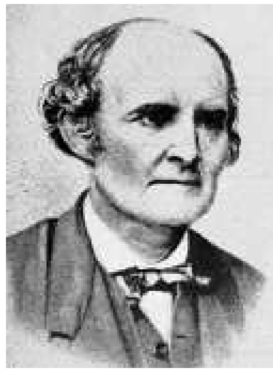
El problema de los cuatro colores cruza el Atlántico y llega hasta el matemático, filósofo y lógico Charles Sanders Peirce que da un seminario sobre la demostración,... aunque nunca la escribió.

1.6 Arthur Cayley

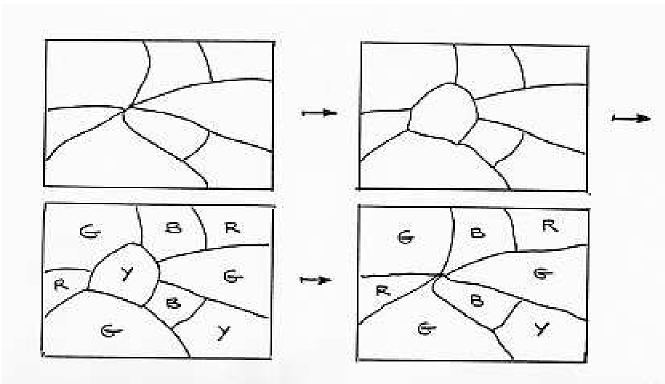
Tras la muerte de De Morgan en 1871, el problema de los cuatro colores parece dormido. Peirce continúa intentando probarlo en EE.UU., pero ninguno de los amigos británicos de De Morgan lo mencionan.

Pero, el problema no está del todo olvidado, gracias a Arthur Cayley (1821-1895) de la Universidad de Cambridge. Cayley ejerció de abogado, y continúo durante esa época con sus investigaciones matemáticas, en particular es uno de los padres fundadores del álgebra de matrices.

En junio de 1878, Arthur Cayley va a un Encuentro de la London Mathematical Society, donde hace una pregunta *"Has a solution been given of the statement that in colouring a map of a country, divided into counties, only four colours are* *required, so that no two adjacent counties should be painted in the same colour?*



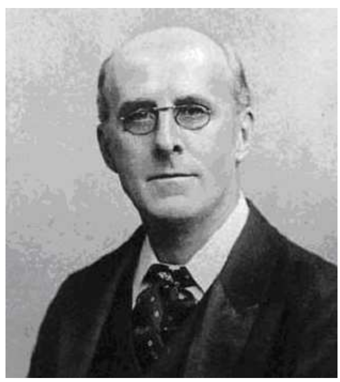
En 1879 Publica una nota sobre el tema en la revista no matemática *Proceedings of the Royal Geographical Society*, donde explica la dificultad del tema. Entre otros, hace la útil observación de que, cuando se intenta probar el problema de los cuatro colores, pueden imponerse condiciones más restrictivas sobre los mapas a colorear, en particular, basta con considerar *mapas cúbicos*, es decir, aquellos en los que hay exactamente tres regiones en cada punto de encuentro: en efecto, supongamos un mapa en el que hay más de tres regiones en alguno de los puntos de encuentro.



Sobre este punto puede pegarse un pequeño parche que produce un mapa cúbico. Si se puede colorear este mapa con cuatro colores, se puede obtener un 4-coloreado del mapa original, simplemente aplastando el parche en un punto.

2. La "prueba" fallida de Kempe... y sus buenas ideas

2.1 Alfred Bray Kempe

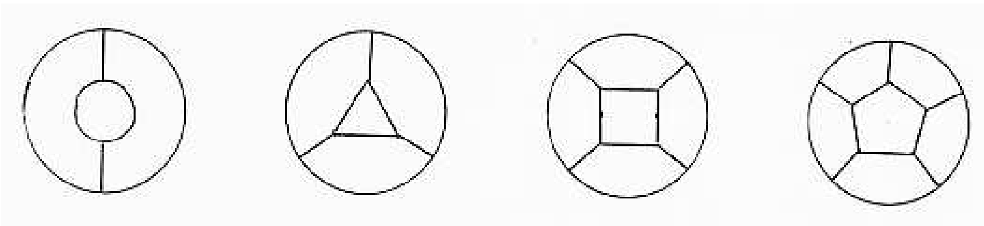


Alfred Bray Kempe (1849-1922) era un soberbio cantante. Aprendió matemáticas de Cayley y se graduó en 1872, con distinción en matemáticas. A pesar de su pasión por las matemáticas y la música, eligió la profesión de abogado (especializado en la ley eclesiástica), dejando las matemáticas y la música (y el alpinismo: existe un *monte Kempe* en el Antártico) como pasatiempos.

En 1872 escribió su primer trabajo matemático sobre la solución de ecuaciones por medios mecánicos y cinco años más tarde, estimulado por un descubrimiento de Peaucellier sobre un mecanismo para trazar líneas rectas, publicó su famosa memoria sobre mecanismos titulada *"Como trazar una línea recta"* (ver *"Máquinas de vapor, mecanismos y P.L. Chebyshev"* por Francisco Luquin, en esta misma publicación).

Kempe se interesa por el problema de los cuatro colores tras la pregunta de Cayley en la London Mathematical Society. En junio de 1879 obtiene su solución y la publica en el *American Journal of Mathematics*. En 1880, publica unas versiones simplificadas de su prueba, donde corrige algunas erratas de su prueba original, pero deja intacto el error fatal.

Kempe usa la fórmula de Euler para mapas cúbicos para obtener la llamada *counting formula*, que permite probar: *"Todo mapa cúbico tiene al menos una región con cinco o menos regiones vecinas"*, es decir, cada mapa contiene al menos un digon, un triángulo, un cuadrado o un pentágono:



Otros resultados esenciales en la demostración de la conjetura, y que obtiene utilizando la fórmula de Euler, son:

"Un mapa cúbico que no contiene digones, triángulos o cuadrados debe contener al menos doce pentágonos".

"Si todos los mapas se pueden colorear con cuatro colores, puede hacerse de manera que sólo aparezcan tres colores en el borde exterior del mapa".

2.2 El interés popular

Por lo elemental de su planteamiento, todo el mundo pensaba que la prueba de la conjetura de los cuatro colores tenía que ser *muy corta*.

Por ejemplo, en 1887, el director del Clifton College organiza un concurso para encontrar una demostración del problema de los cuatro colores, pero debía ocupar *menos de treinta líneas*. Entre otros, presentaron una prueba conjunta el obispo de Londres y el que más tarde sería el arzobispo de Canterbury, Frederick Temple.

Uno de los ingleses victorianos que se divirtió con el problema de los cuatro colores fue Lewis Carroll (1832-1898). A Carroll, que era matemático profesional, le encantaba inventar puzzles y juegos.

Uno de ellos tiene que ver precisamente con el problema de los cuatro colores:

- *A is to draw a fictitious map divided into counties*;
- *B is to colour it (or rather mark the counties with names of colours) using as few colours as possible*;
- *Two adyacent counties must have different colours*;
- *A's object is to force B to use as many colours as possible.*

How many can he force *B* to use?

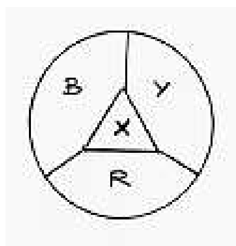
2.3 Por fin la "demostración"

A continuación, vamos a dar la argumentación empleada por Kempe, que a pesar de contener un error, será la clave en la demostración final de la conjetura.

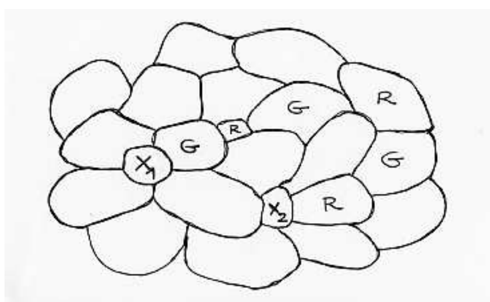
Si X es una región del mapa cúbico M, denotamos por $v(X)$ el número de sus regiones vecinas. La propiedad probada por Kempe de *"Todo mapa cúbico M tiene al menos una región X con cinco o menos regiones vecinas"* se escribe con la anterior notación del modo: *"Existe una región X con* $v(X) \leq 5$*"*.

La prueba se hace por inducción sobre el número de regiones. Así, la hipótesis de inducción es que $M - X$ es 4-coloreable, y la prueba consiste en ver que M también lo es. Hay tres casos posibles:

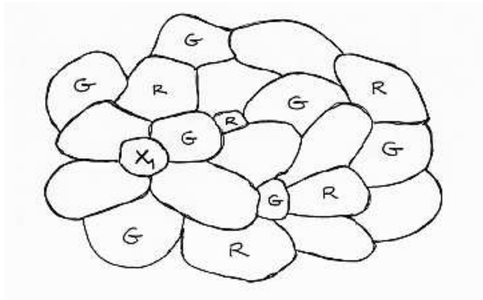
<u>CASO 1</u>: Supongamos que $v(X) = 3$ (el caso de $v(X) = 2$ es aún más fácil).
Basta con colorear X con el cuarto color (en este caso, el verde), como muestra la figura adjunta.



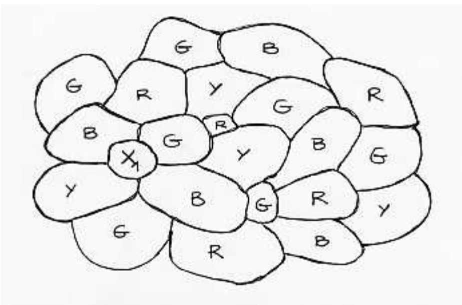
<u>CASO 2</u>: Supongamos que $v(X) = 4$.
Si X_1 y X_2 son dos regiones, X_1 de color rojo y X_2 de color verde, en un mapa 4-coloreado, se llama *cadena de Kempe rojo–verde de* X_1 *a* X_2 a un camino que va de X_1 a X_2, alternando los colores rojo y verde.



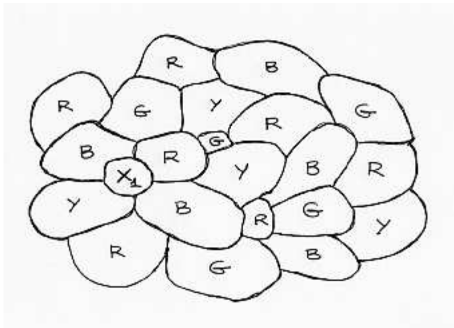
Una componente rojo–verde de X_1 es el conjunto de todas las regiones X_2 del mapa, tales que existe una cadena de Kempe rojo–verde de X_1 a X_2.



El interés de estas dos definiciones es que se pueden invertir los colores rojo y verde en una componente rojo–verde cualquiera de un grafo 4-coloreado, para obtener un nuevo coloreado del mapa respetando la regla de los cuatro colores:

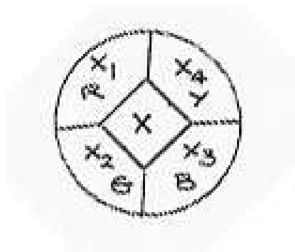


Carta original



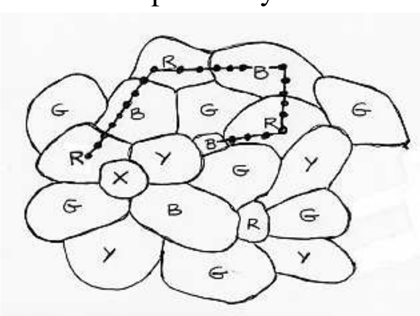
Carta obtenida por inversión de la componente rojo-verde

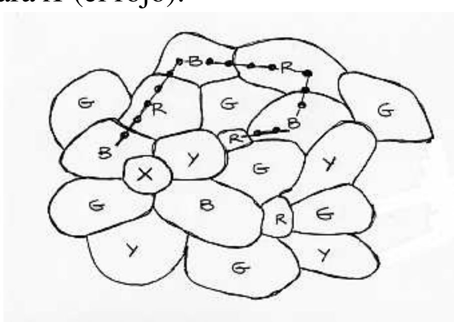
En el caso que nos ocupa en que $v(X) = 4$, un entorno de X es de la forma que aparece en la figura de la derecha.



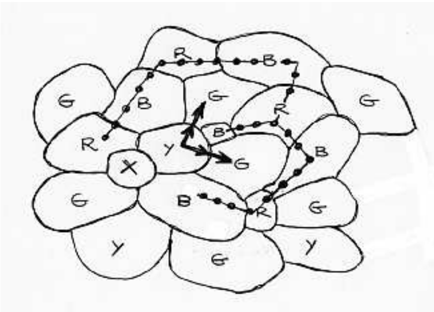
Y se distinguen entonces dos posibilidades:

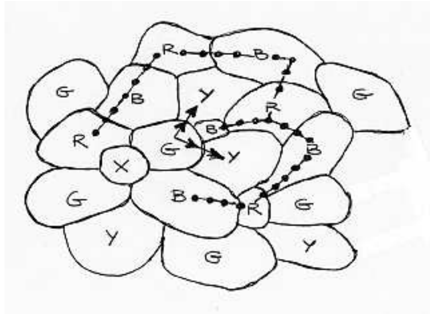
1) si X_3 no está en la componente rojo–azul de X_1, se invierten el rojo y el azul en esta componente y se libera un color para X (el rojo):

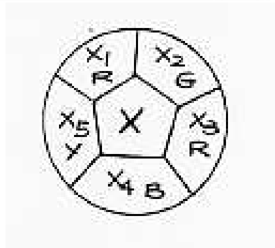




2) Si X_3 está en la componente rojo–azul de X_1, entonces, X_2 no está en la componente amarillo–verde de X_4. Se hace un cambio en la componente amarillo–verde de X_4, con lo que se libera un color (el amarillo) para X:



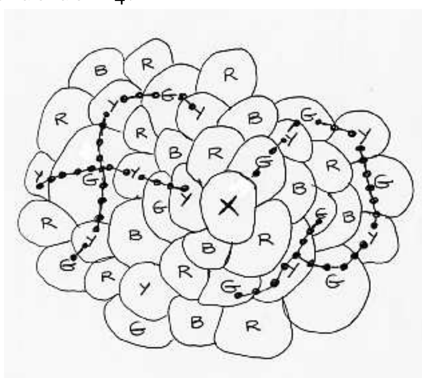




CASO 3: Supongamos que $v(X) = 5$.
Entonces, un entorno de X es de la forma que se muestra en la figura de la derecha:

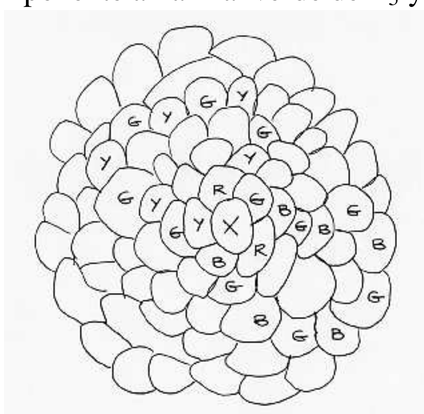
Y se distinguen otra vez dos casos:

1) Supongamos que X_2 no pertenece a la componente amarilla–verde de X_5 o que X_2 no pertenece a la componente azul–verde de X_4.



Elegimos la primera de las opciones por fijar ideas, el otro caso se hace de manera totalmente análoga.
Entonces, se invierten el amarillo y el verde en esta componente amarilla–verde de X_5 y se libera un color (el verde) para X.

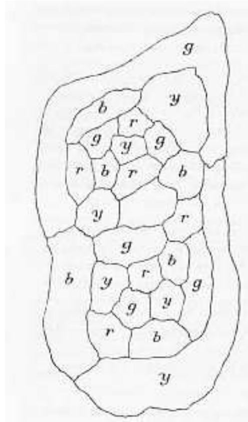
2) En caso contrario, X_2 pertenece a la componente amarilla–verde de X_5 y X_2 pertenece a la componente azul–verde de X_4.



Entonces, se invierten las componentes roja–azul de X_1 y roja–amarilla de X_3, para liberar el rojo para X.

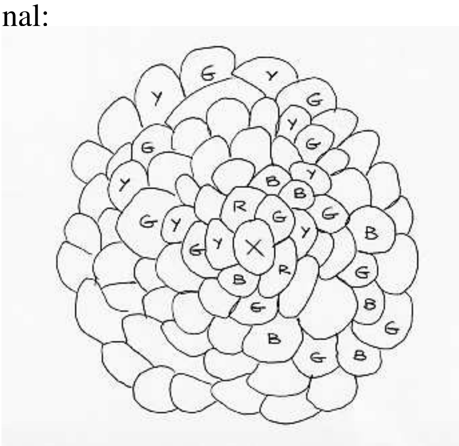
... Y, así, Kempe finaliza *"con éxito"* la demostración de la conjetura.

2.4 Percy John Heawood



Percy John Heawood (1861-1955) publica el trabajo *"Map Colour Theorem"* en el *Journal of Pure and Applied Mathematics*, en 1890.

Encuentra, *muy a su pesar* (como él mismo afirma), un contraejemplo a la prueba de Kempe. Se muestra a la derecha su configuración original:



En efecto, el problema consiste en que las componentes amarilla–verde de X_5 y azul–verde de X_4 pueden cruzarse. Y si así sucede, las componentes rojo–azul de X_1 y rojo–amarillo de X_3 no son invertibles simultáneamente...

En 1890, Heawood prueba el problema de los cinco colores, usando precisamente el argumento de las cadenas de Kempe.

Demuestra además el llamado *problema de coloreado de mapas de Heawood*, que afirma que el número máximo N de colores necesarios para colorear el mapa (su *número cromático*) sobre una superficie sin borde de género $g > 0$ (es decir, todas menos la esfera) es la parte entera de $\frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{48g+1}\right)$.

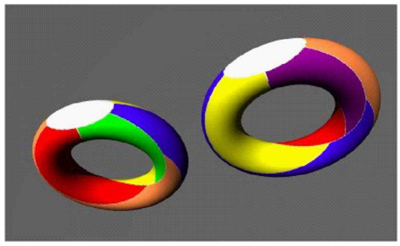
La fórmula de Euler, para poliedros en género $g > 0$ (debida a Simon Lhuilier) queda entonces:

1) en el caso orientable: num(caras)-num(aristas)+num(vertices)=2-2g;

2) en el caso no orientable: num(caras)-num(aristas)+num(vertices)=2-g.

En 1968, Ringel y Youngs prueban que para toda superficie sin borde orientable de género $g > 0$ o toda superficie sin borde no orientable distinta de la botella de Klein, N no es el máximo, sino de hecho, el número exacto.

Saaty prueba en 1986 que la botella de Klein precisa seis colores (uno menos que su número $N = 7$).
Para la banda de Möbius, que es una superficie con borde, se necesitan también seis colores (aquí la fórmula de Heawood no se puede aplicar).



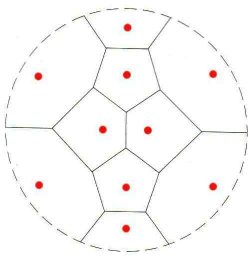
http://www.johnstonsarchive.net

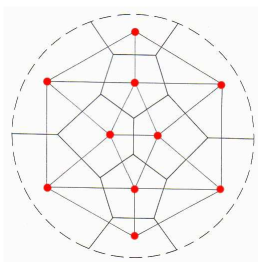
¡Así, el único caso no resuelto es el caso de la esfera (es decir, el caso de mapas planos)! *¡Qué mala suerte!*

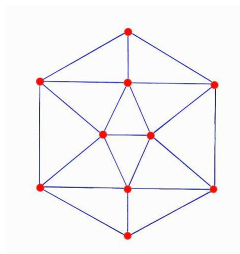
3. Un siglo más tarde: llega la demostración con ayuda de ordenador

3.1 Grafos de incidencia

Por comodidad, a partir de ahora, se va a trabajar con grafos en vez de con mapas: se marca la capital de cada país, se unen las capitales de países contiguos, y se obtiene el grafo de incidencia (o dual) del mapa. Colorear el mapa equivale a colorear las capitales (vértices), asignando distintos colores a dos capitales unidas por una ruta (arista).

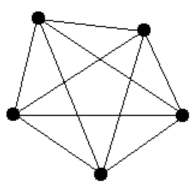


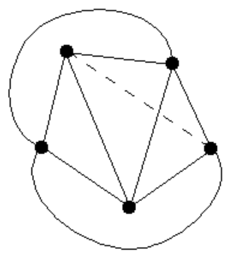




Los grafos así obtenidos son siempre *planares*, es decir, es posible dibujar en el plano una representación concreta del grafo, en la cual las aristas no se corten excepto en un eventual vértice común.

Además, un mapa es cúbico si y sólo si su grafo de incidencia es *triangulado* (un grafo plano en los que cada cara tiene tres aristas exactamente).





El número de regiones vecinas se corresponde ahora con el *grado* de cada vértice (es decir, el número de aristas incidentes).

La fórmula de Euler se hereda trivialmente para grafos de incidencia.

3.2 Minimales criminales

Hay un acercamiento alternativo para resolver el problema de los cuatro colores: suponemos que es falso, es decir, existen algunos mapas (grafos) que no se pueden 4-colorear. Entre estos mapas (grafos) que necesitan cinco colores o más, debe de haber alguno con el menor número posible de regiones.

Estos ejemplos se llaman *minimales criminales*, así un minimal criminal no puede 4-colorearse, pero un mapa (grafo) con menos regiones (vértices) si.

Para probar el problema de los cuatro colores hay que demostrar entonces que no existen minimales criminales, y esto se consigue encontrando condiciones restrictivas sobre este tipo de mapas (grafos).

Por ejemplo, lo que Kempe demuestra con su argumentación (en este nuevo lenguaje), es que un minimal criminal no puede contener digones, triángulos o cuadrados (en esta prueba es en la que usa su método de cadenas),... y falla al intentar probar que tampoco puede contener pentágonos. Si hubiese conseguido esto último, habría quedado establecida la conjetura, al no existir minimales criminales (pues cualquiera de ellos debe contener obligatoriamente una de las anteriores cuatro configuraciones).

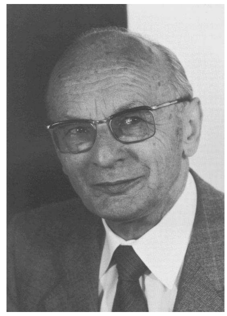
La demostración (bien hecha) del problema de los cuatro colores toma la de Kempe pero, para la inducción, en vez de eliminar un único vértice (región), elimina un determinado trozo del grafo (un conjunto de regiones): una *configuración*.

Un *conjunto inevitable* K es un conjunto finito de configuraciones, tal que todo grafo contiene una copia conforme de una $k \in K$. Por ejemplo, Kempe demuestra que para mapas cúbicos, $K = \{\text{digones, triángulos, cuadrados, pentágonos}\}$ es un conjunto inevitable.

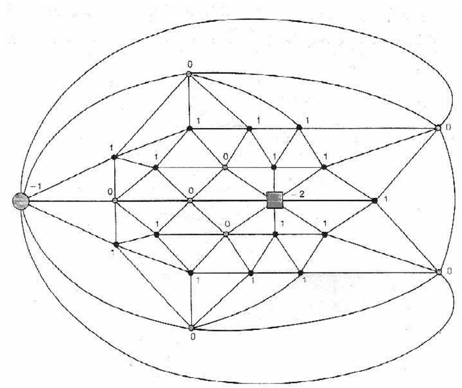
k es una *configuración reducible*, si se puede deducir el coloreado de cualquier grafo (mapa) que contenga a k, a partir de un grafo (mapa) menor.

El plan de la prueba consiste en encontrar un conjunto inevitable K: si K estuviese formado sólo de configuraciones reducibles, la prueba del problema de los cuatro colores estaría terminada. En efecto, en tal caso, no podría existir un minimal criminal.

El concepto de *reducibilidad* fue introducido formalmente en 1913 por George David Birkhoff en su trabajo *"The reducibility of maps"*. Esencialmente se refiere a cuando una configuración puede reducirse a un caso más simple, que por inducción se puede asumir coloreable con cuatro colores.



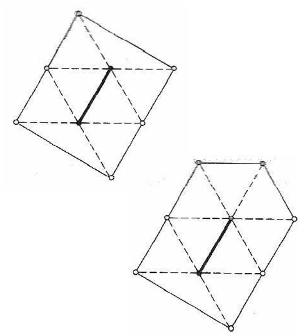
En 1969, Heinrich Heesch sistematiza la prueba de la reducibilidad, desarrollando un algoritmo que intenta implementar con ordenador. Realiza diversos tests con el programa *Algol 60* en un *CDC1604A*.
Afirma que la conjetura puede resolverse considerando 8900 configuraciones.
Además, inventa la construcción de conjuntos inevitables (obstrucciones locales) a través de su llamado *algoritmo de descarga*.



Para generar un conjunto inevitable de configuraciones, la idea de Heesch es considerar el grafo como una red eléctrica, asociando a cada vértice v una "carga" inicial de $6 - d(v)$, donde $d(v)$ es el grado de v.
Usando la fórmula de Euler, se prueba que la suma de las cargas en un grafo triangulado es siempre 12.

Si ahora se desplazan las cargas eléctricas sobre la red a través de su algoritmo de descarga, la suma total seguirá siendo 12: los vértices cargados positivamente pueden donar cargas, los cargados negativamente pueden recibir y los de carga nula no intercambian.

Al final del proceso, se eliminan los vértices de carga negativa y se obtiene un conjunto de configuraciones de vértices de cargas positivas o nulas: como todo grafo triangular es de carga total 12, debe contener al menos una de las configuraciones del conjunto anterior (cuya geometría dependerá del proceso de descarga elegido), que forma entonces un conjunto inevitable.



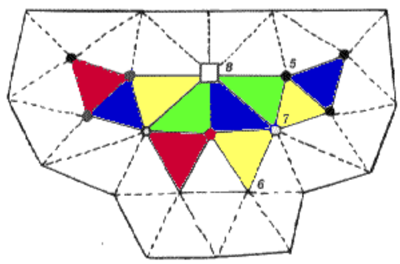
Si por ejemplo, se hace una transferencia de 1/5 de la carga unidad de cada vértice cargado positivamente hacia los vecinos cargados negativamente, entonces un vértice de grado 5 conserva una carga positiva sólo si tienen un vecino de grado 5 ó 6. Y se obtienen así dos configuraciones:
1) dos vértices de grado 5 relacionados
2) Un vértice de grado 5 y uno de grado 6 relacionados

Una vez obtenida la larga lista de configuraciones inevitables, si se demuestra que cualquiera de ellas es reducible, se obtiene finalmente una prueba inductiva del teorema.

La primera prueba de Appel, Haken y Koch usó un algoritmo de descarga muy complicado, que produjo una lista de 1936 configuraciones inevitables, cada una de las cuales se demostró reducible, con la ayuda de un ordenador. Se probó que 102 de estas configuraciones eran redundantes, así que el número requerido para la prueba era de solamente 1834.

Modificando consecutivamente el algoritmo de descarga (para producir un conjunto inevitable cada vez mejor), encontraron un algoritmo de descarga (con 300 reglas) que produjo un conjunto de 1468 configuraciones inevitables; se demostró que eran reducibles con la ayuda de un ordenador programado por Koch para buscar las extensiones requeridas del coloreado, que llevó 1200 horas de cálculo en un *IBM 360*. La demostración fue completada por Appel y Haken en 1976.

Para ilustrar la gran cantidad de datos con la que se trabaja, por ejemplo, en la prueba de reductibilidad de la configuración adjunta, se necesitan unos 199.000 coloreados diferentes...



En 1989, Appel y Haken dicen *"Kempe's argument was extremely clever, and although his "proof" turned out not to be complete, it contained most of the basic ideas that eventually led to the correct proof one century later"*.

En 1996, N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas del Georgia Institute of Technology, publican su trabajo *"A new proof of the four- colour theorem"* (ver [8]). ¿Qué aporta la nueva prueba respecto a la de Appel y Haken? Elimina complicaciones confirmando que la inevitabilidad de un conjunto reducible puede probarse sin explorar tantos ejemplos como en la demostración de 1976. El conjunto inevitable es de tamaño 633, trabajan con conjunto de 32 reglas de descarga, usan un algoritmo cuadrático y la comprobación a mano de la inevitabilidad se reemplaza por una prueba formal que puede verificarse por ordenador.

4. Conclusiones

Las dos características más importantes de la prueba de la conjetura de los cuatro colores son:

1) ha servido de estímulo en el desarrollo de teorías matemáticas como la teoría de grafos y de redes;

2) es el primer *gran* teorema probado usando un ordenador; aunque la corrección de la compilación no ha sido probada y la infalibilidad del hardware no ha sido demostrada.

Este último asunto levantó muchas controversias en el momento de la publicación de su demostración, aplacadas gracias a la aparición de otras pruebas realizadas con ayuda de ordenador, como la *clasificación de los grupos simples finitos* (que depende de cálculos imposibles de ejecutar con detalle a mano), o la solución de Hales del *problema de Kepler sobre el empaquetamiento óptimo de esferas*.

4.1 ¿Qué es una demostración?

La prueba de Appel y Haken ha suscitado muchos interrogantes *meta-matemáticos* sobre el papel asignado a la mente humana y a los ordenadores en las matemáticas: ¿se puede aceptar como válida una afirmación que sólo una máquina, y no una mente humana, puede comprobar?

¿Qué es realmente una demostración? Imre Lakatos da la siguiente definición:
"Es una sucesión finita de fórmulas de algún sistema dado, donde cada uno de los pasos de la sucesión es o bien un axioma del sistema, o bien una fórmula derivada por una regla del sistema a partir de una fórmula precedente."

En [11], Thomas Tymoczko caracteriza una demostración como algo:

i) *convincente*: lo suficiente como para convencer incluso a los escépticos que duden de la veracidad del resultado,

ii) *formalizable*: la conclusión debería alcanzarse partiendo de sistemas axiomáticos, y

iii) *comprobable*.

Este último es el aspecto más controvertido en el caso del problema de los cuatro colores. La *comprobabilidad* se ilustra perfectamente por el acertijo del *árbol cayendo*: ¿puede el árbol caer si no se le oye?... ¿puede estar un teorema demostrado si no se puede leer su demostración?

¿Qué prueban las demostraciones? Teoremas.

Según E.R. Swart (ver [10]), no hay un tipo de teorema, sino cuatro:

i) teoremas cuya prueba puede realizarse en la cabeza de uno,

ii) teoremas que precisan lápiz y papel para demostrarse,

iii) teoremas que no sólo requieren lápiz y papel, sino también una gran cantidad de esfuerzo y tiempo, y

iv) teoremas que sólo pueden probarse con ayuda de un ordenador.

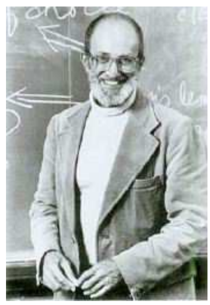
La división entre estas categorías no está clara y hay mucha mezcla entre ellas. Además, un teorema dado no tiene que estar permanentemente en una de las categorías. Muchos teoremas en la categoría **i)** no pueden hacerse sólo en nuestra cabeza y es conveniente usar lápiz y papel. Aunque los teoremas de **iii)** pueden probarse a mano, a menudo se usa un ordenador como ayuda. Incluso los de la categoría **ii)** necesitan a menudo la ayuda de un ordenador. El teorema de los cuatro colores se encuentra en la categoría **iv)**.

4.2 Las dos corrientes

Hay dos corrientes principales respecto a los conceptos anteriormente descritos:

1. Los escépticos, que afirman que el aspecto de la *comprobabilidad* es el que pone en duda la credibilidad de la prueba. Si las pruebas deben ser verificadas, parece que entonces automáticamente una persona (lo opuesto a una máquina) debe completar esta tarea, y esto no puede hacerse con la prueba del problema de los cuatro colores.

Paul Halmos opina que la demostración realizada con un ordenador tiene la misma credibilidad que si está hecha por un adivino, las máquinas tienen algunas propiedades físicas que aún tenemos que entender. *"No puedo aprender nada de la demostración. La prueba no indica la razón por la que sólo se necesitan cuatro colores ¿por qué no trece? ¿Qué tiene de especial el número cuatro?"*



De manera similar, Pierre Deligne (medalla Field en1978) opina: *"No creo en una prueba hecha con ordenador. En primer lugar, soy demasiado egocéntrico. Creo en una demostración si la entiendo, si está clara. Un ordenador puede también cometer errores, pero es mucho más difícil encontrarlos"*.

Tymockzo dice que usar un ordenador para establecer una verdad matemática es transformar pruebas en experimentos. Afirma que el problema de los cuatro colores ha sido *confirmado* a través de un experimento de física teórica, pero no probado de una manera formal. Aunque se tiene una pequeña idea de lo que el ordenador está *testando*, no se tiene el cien por cien de seguridad de lo que se está haciendo. Esto significa que la naturaleza de los resultados demostrados con ordenador es del tipo *"Simon dice"*, donde los matemáticos son invitados a *tener fe* y a creerse lo que una criatura *superior* afirma.

Swart reconcilia esta divergencia entre los teoremas convencionales y no convencionales, introduciendo un nuevo idioma, los *agnogramas*: se empieza con conjeturas cuando un nuevo problema se plantea, se pasa a los agnogramas (enunciados ciertos que se verifican *de la mejor manera posible*, pero cuya veracidad no se conoce con la misma seguridad que la de un teorema... y que no hay que creer) y entonces se termina con teoremas, que son los gobernantes absolutos del *mercado matemático*. Swart piensa que el problema de los cuatro colores está en esta categoría.

2. Los no escépticos argumentan que la queja de que los ordenadores tienen virus o producen errores, se puede aplicar de la misma manera a las personas, que se equivocan muy a menudo. Aunque los errores cometidos por los ordenadores son más difíciles de detectar, los humanos fallan con más frecuencia. Los ordenadores siguen un programa rígido predeterminado, y no tienen distracciones motivadas por los cambios de humor, el estrés u otros factores externos.

La longitud de algunas demostraciones está más allá de la capacidad de computación humana, pero es perfectamente aceptable por los estándares de las máquinas.

Además, la idea de que *no* pueden usarse ordenadores será cada vez más extraña para la siguiente generación: es una cuestión de aceptación y familiaridad; serán (¿son?) herramientas como el lápiz y el papel.

La prueba de Appel y Haken es en cierto sentido convencional, consiste en una serie de pasos lógicos, que conducen a una conclusión: la conjetura puede reducirse a una predicción sobre el comportamiento de unos 2.000 mapas diferentes.

J.L. Casti [*Mathematical Mountaintops*, Oxford University Press, 2001] afirma respecto a la prueba del teorema de los cuatro colores: *“Como el problema se ha obtenido por medios totalmente inapropiados, ningún matemático de primera fila debería trabajar más en ello y por lo tanto una demostración decente puede ser retrasada indefinidamente... Así que hemos hecho una cosa mala, muy mala y pienso que una cosa similar no debería cometerse nunca más”*.

En respuesta a esta opinión, D. Archdeacon responde *“hay muchas malas pinturas de jardines, pero eso no impidió a Van Gogh pintar sus girasoles”*...

Las personas buscan mejorar en todos los aspectos de la vida, y de manera similar, los matemáticos buscan demostraciones mejores, más elegantes, más cortas y más bellas. Este es precisamente el propósito del libro de M. Aigner y G.M. Ziegler [*El libro de las demostraciones*, Nivola, 2005], en el que los autores recopilan *treinta demostraciones perfectas* de varias áreas de la matemática, que son *candidatas para El Libro en el cual Dios registra las demostraciones perfectas de todos los teoremas y del que un matemático sólo llega a descubrir una parte a lo largo de su vida*, según afirmaba Paul Erdös.

Bibliografía

[1] K. Appel and W. Haken, *Every planar map is four colourable, Part I: discharging*, Illinois Journal of Maths 21, 429-490, 1977.

[2] K. Appel, W. Haken and J. Koch, *Every planar map is four colourable, Part II: reducibility*, Illinois Journal of Maths 21, 491-567, 1977.

[3] D. Barnette, *Map coloring, polyhedra, and the four-colour problem*, Math. Assoc. of America, 1983.

[4] A. Calude, *The journey of the four colour theorem through time*, Univ. Auckland, 2001.

[5] R. Fritsch and F. Fritsch, *The four-colour theorem*, Springer, 1998.

[6] O. Ore, *The four-color problem*, Academic Press, 1967.

[7] N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, *The four-colour theorem*, Journal of Combinatorial Theory 70, 1977.

[8] N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, *A new proof of the four-colour theorem*, Electronic Announcements of the AMS, vol. 2, 17-25, 1996.

[9] J.L. Saaty and P.C. Kainen, *The four colour problem: assaults and conquest*, Dover, 1986.

[10] E.R. Swart, *The philosophical implications of the four colour problem*, American Math. Monthly 87, 697-707, 1980.

[11] T. Tymocko, *The four colour problem and its philosophical significance*, Journal of Philosophy 76, 57-707, 1979.

[12] R.J. Wilson, *Four colors suffice*, Princeton Univ. Press, 2002.

[13] R.J. Wilson, *Graphs, colourings and the four-colour theorem*, Oxford Sci. Pub., 2002.

Marta Macho Stadler
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas
Barrio Sarriena s/n
48940 Leioa
e-mail: ***marta.macho@ehu.es***
http://www.ehu.es/ mtwmastm/