¿Se puede mejorar los recursos?

por

Mikel Lezaun, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

En este artículo se presentan y comentan los tres grandes pilares del método Matemático e Informático en su más amplia acepción: La modelización matemática, el análisis y la simulación, el control o intervención en los sistemas. Se dan muchos ejemplos de aplicaciones de las matemáticas en otras ciencias o ingeniería, incidiendo en las situaciones en que conocemos que actualmente están contratando a matemáticos. Para terminar se presentan dos proyectos de colaboración con empresas que en último término suponen una mejor utilización de los recursos de la empresa.

1. Introducción

Se puede considerar que el proceso de matematización de la ciencia comienza en el siglo XVII. Para poder aplicar las matemáticas en otras ciencias, primero tuvieron que alcanzar un cierto grado de madurez, que podemos sintetizar en los siguientes logros: Álgebra simbólica (François Viète (1540-1603)), renacimiento de la Teoría de Números (Pierre Fermat (1601-1665)), Cálculo de Probabilidades (Blaise Pascal (1623-1662) y Fermat), Geometría Analítica (René Descartes (1596-1650)), Cálculo Infinitesimal (Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643-1726)).

Galileo (1564-1642) cree que el mundo actúa de acuerdo a leyes matemáticas simples e inmutables, y que los principios fundamentales de la física se deben descubrir de forma empírica, de la observación de la naturaleza, de la experimentación. La mecánica es la primera ciencia a la que se aplica el método matemático (axiomas, leyes generales, etc.) y durante siglos servirá de modelo a imitar. Así, las matemáticas se aplicarán progresivamente a las diversas ramas de la física (la óptica, el electromagnetismo,...) luego a la biología, a la economía, a las ciencias sociales, etc. y la naturaleza de la actividad científica se verá completamente alterada.

Con el tiempo se formula una cuestión de mucho calado: ¿Podrán ser descritos, comprendidos y regulados los mundos del inanimado y del ser vivo gracias al lenguaje matemático e informático?

Está claro que el objetivo de comprender lo inanimado y el ser vivo hace intervenir a todas las ciencias. Fruto de varios siglos de trabajos, las Matemáticas y la Informática han desarrollado un método universal sustentado en tres grandes pilares:

- La modelización matemática.
- El análisis y la simulación.
- El control o intervención sobre los sistemas.

2. Modelización matemática

Designaremos por modelo matemático toda forma de descripción matemática de una clase de fenómenos. Un modelo matemático es un fragmento de matemáticas aplicado a un fragmento de realidad. Los modelos permiten cálculos, y por tanto prever cualitativamente la apariencia de un fenómeno.

2.1 Mecánica

En el largo proceso de matematización de la mecánica celeste sobresalen cuatro grandes personalidades: Nicolás Copérnico (1473-1543), Tycho Brahe (1546-1601), Johanes Kepler (1571-1630) e Isaac Newton (1642-1727).

Las leyes de Kepler describen el movimiento de los planetas en torno al Sol. Kepler las obtuvo a partir de datos experimentales, principalmente de las observaciones de Tycho Brahe. El enunciado de las tres leyes de Kepler es:

Primera ley. Los planetas describen órbitas elípticas estando el Sol en uno de sus focos.

Segunda ley. El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol, barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.

Tercera ley. Los cuadrados de los periodos p de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de la elipse.

Estas leyes no constituyen un modelo matemático propiamente dicho, se limitan a describir cómo es el movimiento de los planetas alrededor del sol.

Isaac Newton formuló Ley de la gravitación universal y la escribió en forma matemática:

$$\vec{F} = G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}.$$

Esta formulación matemática, combinada con la primera Ley de Newton, *fuerza igual a masa por aceleración* ($\vec{F} = m\vec{a}$), es un modelo del movimiento de los planetas alrededor del sol, y a partir de ella se deducen las leyes de Kepler.

Gracias al desarrollo científico y técnico, en el siglo XIX se llega a disponer de un gran número de modelos. Como un hito importante citaremos a Urbain Le Verrier (1811-1877) que, basándose en las perturbaciones observadas en la órbita de Urano, predijo la existencia de Neptuno.

Uno de los grandes modelizadores de la historia es James Clerk Maxwell (1831-1879), que formuló matemáticamente las Leyes de la electricidad y el magnetismo.

Como ejemplo de gran importancia práctica, me voy a detener en la evolución de la forma de predecir el tiempo.

- Para la predicción a corto plazo, uno de los primeros logros fue darse cuenta que determinados fenómenos naturales como el aspecto del cielo, los vientos, la migración de las aves... son indicativos del tiempo venidero. Estos indicios meteorológicos se expresaron en forma de refranes.

- Astrometeorología. Durante toda la edad media los astrólogos fueron los hombres del tiempo. La predicción meteorológica basada en los movimientos de los astros o de la luna sigue teniendo adeptos, pero carece de toda validez.

- Almanaques. A partir del siglo XVIII se hicieron muy populares en Europa y América distintas publicaciones que anunciaban el tiempo para todo el año. Herencia de esta tradición todavía hoy perdura el Calendario Zaragozano.

- Mapas del tiempo. A mediados del siglo XIX, el advenimiento del telégrafo permitió conocer el tiempo actual en una amplia zona geográfica. Se pudo así hacer mapas del tiempo de cada día. A partir de ellos, los meteorólogos estimaban como iban a evolucionar los distintos fenómenos meteorológicos, de acuerdo con esto conjeturaban cómo tenían que ser los mapas del tiempo del día siguiente, y con estos mapas hacían el pronóstico del tiempo.

- Modelos matemáticos. Predicciones numéricas. A comienzos del siglo XX se fijaron las ecuaciones de la dinámica atmosférica:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{g}^{\,*} + \frac{1}{\rho}\vec{F}_v\,,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\rho = -\rho\nabla\cdot\vec{v}\,,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla q = R\,,$$

$$p = \rho R_d T_v\,, \qquad T_v = T(1 + 0{,}608q)\,,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta = \frac{\theta}{c_{p,d} T_v} Q\,,$$

que son la base de las predicciones del tiempo que realizan todos los servicios meteorológicos.

La resolución de este problema matemático sólo es abordable en una forma aproximada, utilizando métodos numéricos con el concurso de ordenadores, tal como se comentará más adelante.

2.2 Modelos matemáticos de fenómenos biológicos

Las investigaciones en biología matemática se pueden dividir, grosso modo, en cuatro grandes grupos: la dinámica de las poblaciones, la genética de las poblaciones, la teoría matemática de las epidemias y la modelización matemática de la fisiología y de la patología de órganos o de procesos del cuerpo humano.

La dinámica de las poblaciones

- Modelo de crecimiento exponencial. T.R. Malthus (1766-1834):

$$\frac{dp}{dt} = ap\,.$$

- Ecuación logística. P.F. Verhulst (1804-1849):

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p - \beta p^2\,.$$

- Modelo depredador-presa. V. Volterra (1860-1940):

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy\,.$$

Dentro de este contexto, en Euskadi, la fundación AZTI (**http://www.azti.es**) *investiga en biología pesquera, en particular en la dinámica de la población de distintas especies de peces, como la anchoa, la merluza, el atún y el bacalao. En los últimos cinco años, al menos tres matemáticos han entrado a trabajar en esta fundación.*

Los avances de la Genética Molecular han propiciado la adaptación de esos mismos métodos al estudio de las enfermedades infecciosas, en las que los objetos son poblaciones de células. En un entorno celular, el depredador es una población de virus, y la presa una población de células humanas. Algunos de los resultados más sorprendentes se han obtenido en el estudio de la enfermedad del SIDA. Otro dominio muy importante es el estudio de la resistencia de los microbios a los medicamentos.

La difusión de una epidemia

D. Bernouilli (1700-1782) fue el primero que, al intentar resolver si una práctica sistemática de la inoculación humana de la viruela en determinadas condiciones resultaría beneficiosa o perjudicial para la población, aplicó las matemáticas a la difusión de una epidemia.

Modelo matemático básico de difusión de una epidemia (W.D. Kermack, A.G. McKendrick, 1920):

$$\frac{dS}{dt} = -rS(t)I(t),$$

$$\frac{dI}{dt} = rS(t)I(t) - \gamma I(t),$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t),$$

donde S es el contingente de los elementos susceptibles de contraer la enfermedad, I el de los infecciosos y R el de los retirados, ya sea por que son aislados, se mueren o por que adquieren la inmunidad.

Este tipo de estudios ha adquirido un gran desarrollo y hoy en día se engloban en lo que se conoce como Epidemiología. En la epidemiología, la Estadística juega un papel fundamental. Aquí hay que resaltar que tanto el Instituto Nacional de Estadística como el Eustat en el País Vasco son dos instituciones que emplean a matemáticos.

La modelización matemática de la fisiología y la patología de órganos o de procesos del cuerpo humano es el sector más difícil de caracterizar en cuanto a los métodos y contenidos. Se tienen modelos del crecimiento de los tumores, modelos computacionales del riñón, del páncreas, oído y otros órganos. Por último, citaremos la modelización de la formación de patrones biológicos, es decir de la generación de una estructura compleja de un organismo vivo a partir de una situación inicialmente homogénea.

2.3 Economía

No podemos terminar estas notas sobre modelización matemática sin mencionar los sistemas económicos y sociales.

Uno de los campos más fructíferos para el empleo de matemáticos es el de los mercados financieros. La utilización de modelos matemáticos aplicados a los mercados financieros ha dado origen a lo que se denomina Matemáticas Financieras. Un ejemplo es la valoración de activos derivados, que en su forma más simple se reduce a resolver una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$\frac{dR(t)}{R(t)} = \mu(R, B, t)dt + \Sigma(R, B, t)dw\,.$$

Los pioneros de estos estudios son el matemático Fisher Black, Myron S. Scholes y Robert Merton (estos dos últimos P. Nobel de Economía 1997). Hoy en día todos los grandes bancos tienen un Departamento de Nuevos Mercados en el que la presencia de matemáticos es notable. En este orden de cosas, en la Facultad de Económicas de la UPV-EHU se imparte un Programa de Tercer Ciclo denominado Finanzas Cuantitativas. En él, cada año se matriculan dos o tres recién licenciados en matemáticas, y sus resultados suelen ser muy buenos.

Un campo emparentado con el anterior es el del mercado eléctrico, el Pool de la energía. Para transitar bien por él, es importante tener buenas predicciones del tiempo, ya que tanto en verano por el calor como en invierno por el frío, el consumo doméstico horario de electricidad depende del tiempo que hace. Todos sabemos que IBERDROLA, con sede en Bilbao, es una de las grandes empresas eléctricas españolas. IBERDROLA participa, tiene que participar en el mercado diario de la energía, y en el departamento que se encarga de este cometido recientemente han contratado a un par de antiguos alumnos de nuestra licenciatura.

3. El análisis y la simulación

Extraer la información de un modelo matemático no lineal no es tarea fácil. En el caso de las ecuaciones de Volterra

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy\,,$$

el estudio cualitativo de las soluciones muestra el comportamiento cíclico de las mismas, y que el valor medio de las dos poblaciones a lo largo de una trayectoria es

$$\overline{x} = \frac{c}{d}\,, \qquad \overline{y} = \frac{a}{b}\,.$$

De esto es inmediato deducir el efecto de la pesca en un sistema formado por una población de depredadores y otra de presas, que fue el problema que dio origen a este modelo de Volterra.

Un problema muchísimo más complejo es el de la predicción meteorológica, que hay que abordarlo mediante métodos numéricos. Sus cuatro grandes capítulos son:

- Condiciones iniciales. Asimilación de los datos de observación.
- Discretización del espacio. Por ejemplo, el Modelo ARPEGE de Météo France tiene una resolución de 37 km, lo que supone 4 millones de nodos.
- Discretización de las ecuaciones.
- Resolución de las ecuaciones.

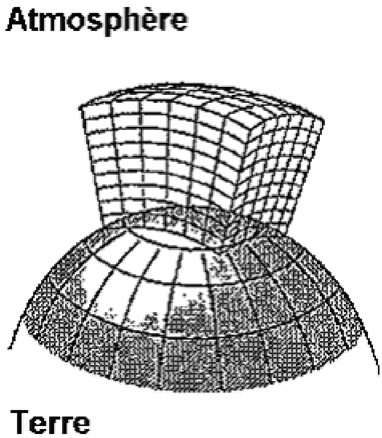

Figura 1: Discretización de la atmósfera

Una predición del tiempo para más de 36 horas requiere el tratamiento de toda la atmósfera. Teniendo en cuenta que en los modelos operativos se tiene del orden de 5 millones de nodos y seis variables, en cada paso de tiempo se tiene que resolver un problema muy grande. Esto, unido a que las predicciones se tienen que calcular de forma mucho más rápida que la propia evolución de la atmósfera, hace que los servicios meteorológicos se encuentren entre los utilizadores de los ordenadores más potentes.

En el joven Servicio Vasco de Meteorología trabajan matemáticos, lo mismo que en el Instituto Nacional de Meteorología.

Ingeniería

El enorme auge de la simulación numérica en ingeniería durante la segunda mitad del siglo XX se debe, sin ninguna duda, a la alianza de dos factores fundamentales: el método de elementos finitos como método de aproximación de las ecuaciones del modelo matemático, y el espectacular aumento de la capacidad de cálculo de los ordenadores. Hay una razón fundamental para ello: con esta herramienta es posible realizar simulaciones en ordenador que, o bien son imposibles en la práctica (meteorología, terremotos, centrales nucleares, dispersión de contaminantes...) o, en caso de ser realizables, su puesta en práctica necesita mucho más tiempo y dinero (túneles de viento, maquetas de puentes, cúpulas, prótesis...). En particular, todo esto está muy presente en la industria del automóvil, por ejemplo en la simulación de choques. Indicaremos también que desde hace ya algunos años se han diseñado herramientas de simulación de intervenciones quirúrgicas (corazón, hígado).

En Euskadi existe una desarrollada Red de Centros Tecnológicos en la que suelen contratar a matemáticos. También últimamente GAMESA se ha mostrado interesado en incorporar a su plantilla a algunos matemáticos

Validación del modelo

Los resultados deducidos rigurosamente a partir de los modelos a lo sumo pueden dar una aproximación del fenómeno real. En todos los casos, y esto es muy importante, la simulación debe ser validada.

Hemos mostrado algunos ejemplos y algunas ideas para la comprensión de los fenómenos que, gracias a los ordenadores, llegan a plasmarse en resultados cuantitativos. ¿Qué consecuencias se derivan a la hora de actuar? El papel de las matemáticas y de la Informática a la hora de actuar corresponde a la Teoría de Control, que abordaremos a continuación.

4. El control o intervención sobre los sistemas

De manera general, podría decirse que el objetivo central de la Teoría de Control es proporcionar estrategias para conducir el proceso que nos ocupe hacia un objetivo propuesto deseado. Refleja el esfuerzo humano para intervenir en el medio que le rodea, con vistas a garantizar su supervivencia y obtener una permanente mejora en la calidad de vida.

Como primer ejemplo podemos pensar en el complejo problema de enviar una misión tripulada a Marte.

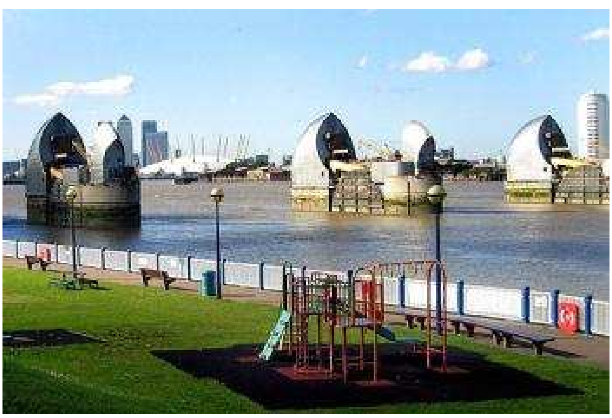

Figura 2: Barrera del Támesis

Un ejemplo medioambiental: la Barrera del Támesis para la prevención de inundaciones en la región de Londres. Como proyecto en estudio citaremos el que se está llevando a cabo sobre el sistema, muy complejo, de la laguna de Venecia (Proyecto Venecia Nueva).

La cuestión más general que se puede imaginar en el marco del control es la del control del clima, cuestión que requiere gran audacia. Siempre se puede decir que el control del clima ya ha comenzado al limitar las emisiones de CO_2. En este caso el criterio de control es el de mantener al planeta Tierra en un estado aceptable. Ahora bien, para impulsar la puesta en práctica de medidas drásticas dirigidas a modificar la influencia humana sobre el clima, se deberá poder demostrar que los modelos simulan con exactitud los cambios climáticos pasados y presentes. Ello requiere contar con archivos y registros que cubran largos períodos de tiempo.

La gestión del agua de las cuencas hidrológicas. En este caso, de candente actualidad en España debido a los problemas derivados de la carencia de agua, el mayor problema consiste en la elección de los criterios a optimizar.

La robótica. No resulta difícil imaginar la complejidad del proceso de control que hace que un robot camine y que lo haga de manera estable, o que sea capaz de coger un objeto con sus “manos".

La Teoría de Control también está llamada a jugar un papel muy importante en el campo de la biomedicina. Como ejemplo se puede mencionar el diseño de mecanismos de suministro de insulina equipados con “chips"de control.

Control de las epidemias.

Unos últimos ejemplos son el control del tráfico aéreo, el de los sistemas de distribución y generación de energía y el de las redes informáticas.

5. Recogida semanal óptima de dos clases de residuos urbanos

UPV: Mikel Lezaun, Gloria Pérez, Eduardo Sáinz de la Maza.
CESPA: Alejandro Martínez

CESPA, S.A. es una empresa del grupo Ferrovial que ofrece servicios de

- Limpieza: urbana, industrial, química, playas, descontaminación de suelos.
- Recogida de residuos: sólidos urbanos, industriales, selectiva,...
- Selección, tratamiento, depósito de residuos.
- Diseño, construcción y mantenimiento de jardines, de parques infantiles.

CESPA está presente en más de 260 municipios españoles, tiene una flota de más de 4.800 vehículos, y su facturación anual supera los 700 millones de euros.

El proyecto consistió en confeccionar un programa software para la recogida diaria óptima de dos clases de residuos de una ciudad. Los datos de partida son:

- Residuos a recoger: orgánicos por un lado y resto.
- Frecuencia : 6 días a la semana, los domingos no se recoge.
- Datos de la ciudad: Habitantes, distancia de la nave a la ciudad, distancia del vertedero a la nave, distancia de la ciudad al vertedero, tiempo de espera y de descarga en el vertedero. Casco histórico: sólo transitan camiones monocompartimentados pequeños.
- Medios materiales:

  - 4 tipos de contenedores. Precio y coste de mantenimiento unitario.

  - 9 tipos de camión. Precio, seguro, consumos, mantenimiento, velocidades. Carga trasera monocompartimentados y bicompartimentados: conductor y dos peones. Carga lateral: conductor.
- Producción diaria de residuos urbanos por habitante en lunes y los demás días de la semana.

a.- ***Los residuos diarios se tienen que recoger en contenedores***

El número de contenedores de cada tipo necesarios para recoger los residuos diarios son siete variables no enteras Y_{ij}.
Cuatro restricciones del tipo

$$103680 \leq 90\,Y_{11} + 72\,Y_{21} + 224\,Y_{41}\,.$$

b.- ***Los residuos de los contenedores pasan a cargas de camión***

Tenemos veinte formas distintas de uso de camión atendiendo a su tipo, tamaño y forma de ir ocupado. El número de cargas de camión de cada tipo necesarias para recoger todos los residuos de los contenedores son cuarenta variables no enteras X_{ij}^{hk}.
Doce restricciones del tipo

$$\begin{aligned}
90\,Y_{11} + 90\,Y_{11}^{*} \leq{}& 0,5 \times 8000\,X_{11}^{1} + 0,5 \times 16000\,X_{12}^{1} + 0,5 \times 23000\,X_{13}^{1} + \\
& 2/3 \times 0,5 \times 15000\,X_{21}^{10} + 2/3 \times 0,5 \times 15000\,X_{21}^{13} + \\
& 2/3 \times 0,5 \times 23000\,X_{22}^{10} + 2/3 \times 0,5 \times 23000\,X_{22}^{13} + \\
& 2/3 \times 0,5 \times 17000\,X_{31}^{11} + 2/3 \times 0,5 \times 17000\,X_{31}^{13} + \\
& 2/3 \times 0,5 \times 23000\,X_{32}^{11} + 2/3 \times 0,5 \times 23000\,X_{32}^{13}\,.
\end{aligned}$$

c.- ***Cada carga de camión supone un viaje al vertedero***

Los viajes al vertedero son cuarenta variables enteras T_{ij}^{hk}.
Cuarenta restricciones del tipo

$$X_{ij}^{hk} \leq T_{ij}^{hk} .$$

d.-***Número de camiones necesarios para realizar todos los viajes al vertedero***

El número de camiones necesarios para hacer el número de viajes que haya que hacer al vertedero dependerá del número de éstos, del tiempo en horas que tarda en llenarse una carga de camión y del tiempo en horas que dedica un camión a recoger y verter contenedores al día.

El número de camiones necesarios para recoger y verter las cargas con los residuos son dieciocho variables enteras X_{ij} (nueve para el lunes y otros nueve para el resto de los días de la semana).

Dieciocho restricciones del tipo

$$X_{11}^{1} + 1,917\, T_{11}^{1} + 1,541\, X_{11}^{3} + 1,917\, T_{11}^{3} \leq 6\, X_{11} .$$

El número de camiones de los martes tiene que ser menor o igual al de los lunes, que es el día que más residuos hay que recoger. Esto nos da nueve restricciones del tipo

$$S\, X_{ij} \leq X_{ij} .$$

e.- ***El problema de optimización***

El problema de optimización consiste en hallar los valores (no negativos) del número de contenedores, número entero de camiones los lunes, número de cargas de camión los lunes, número entero de viajes al vertedero los lunes, número entero de camiones los martes, número de cargas de camión los martes, número entero de viajes al vertedero los martes (105 variables de las cuales 58 son enteras), que hagan mínimo el coste, verificando las 83 restricciones como las descritas.

Este es un problema de optimización lineal mixto, ya que hay variables reales y variables enteras. Lo resolvemos utilizando el paquete de software comercial LINGO. Los resultados obtenidos se ajustan a la realidad de la recogida de los residuos de distintas ciudades realizada por CESPA.

6. Asignación de las jornadas de trabajo a los conductores de Metro Bilbao

UPV: Mikel Lezaun, Gloria Pérez, Eduardo Sáinz de la Maza
Metro Bilbao: Juan Carlos Mendoza, Fernando Quintanilla

DATOS: Vacaciones de los conductores; número de jornadas de mañana, tarde y noche a realizar en cada época del año; restricciones de obligado cumplimiento, preferencias.

OBJETIVO: Distribución equitativa del trabajo.

Este problema lo descomponemos en varios subproblemas. Describiremos con detalle el primero, los demás son del mismo tipo.

a.- ***Asignación de las semanas de reserva***

En toda esta sección el índice i corresponde a los conductores, que variará entre 1 y 64, y el índice l a las semanas, por lo que variará de 1 a 52. Las vacaciones están dadas. Por tanto, conocemos $V(i,l)$ tales que $V(i,l) = 1$ si el conductor i-ésimo está de vacaciones la semana l-ésima, y $V(i,l) = 0$ si no lo está.

Las incógnitas son $R(i,l)$, variables 0-1, de forma que $R(i,l) = 1$ si el conductor i-ésimo está de reserva la semana l-ésima, y $R(i,l) = 0$ si no lo está.

Restricciones:

1.- Si se está de vacaciones no se está de reserva:

$$\text{Si} \quad V(i,l) = 1 \quad \text{entonces} \quad R(i,l) = 0\,.$$

2.- Cada semana, según sea de invierno, verano 1 o verano 2, el número de conductores de vacaciones o reserva está fijado:

$$\sum_{i=1}^{64} (V(i,l) + R(i,l)) = \alpha_l\,.$$

3.- Cada conductor tiene que tener 7 u 8 semanas de reserva:

$$7 \leq \sum_{l=1}^{52} R(i,l) \leq 8\,.$$

4.- Ningún conductor tendrá más de tres semanas seguidas de reserva:

$$R(i,l) + R(i,l+1) + R(i,l+2) + R(i,l+3) \leq 3\,.$$

5.- Ningún conductor tendrá una semana de reserva aislada:

$$R(i,l+1) \leq R(i,l) + R(i,l+2)\,.$$

6.- Ningún conductor puede tener una semana aislada de trabajo entre vacaciones y/o reserva:

$$R(i,l) + V(i,l) + R(i,l+2) + V(i,l+2) \leq 1 + R(i,l+1) + V(i,l+1)\,.$$

7.- Ningún conductor puede tener solo dos semanas de trabajo entre vacaciones y/o reserva:

$$R(i,l)+V(i,l)+R(i,l+3)+V(i,l+3) \leq 1+R(i,l+1)+V(i,l+1)+R(i,l+2)+V(i,l+2).$$

Función objetivo: Con el fin de agrupar reservas delante o detrás de vacaciones hallaremos el máximo de semanas de reserva pegadas a vacaciones.

Este problema lineal de optimización tiene 2880 variables binarias y 12479 restricciones. El máximo es 412, por lo que solo hay 52 semanas de reserva no pegadas a vacaciones.

b.- *Lista cíclica* *de tantos patrones semanales como conductores con trabajo programado, de forma que un mismo conductor los pueda hacer de forma consecutiva. Hay que hacer una para cada época del año.*

c.- *Asignación anual de los patrones semanales* *de forma consecutiva, según sea la época del año, de forma que al final del año todos los conductores tengan igual carga de trabajo.*

Los problemas de optimización se resuelven con LINGO, y los resultados obtenidos son plenamente satisfactorios para la empresa.

Bibliografía

[1] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, 2nd ed. Springer-Verlag, New-York, 1978.

[2] P.A. Griffihs, *Las matemáticas ante el cambio de milenio*, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, vol 3, nº 1, 23-41, 2000.

[3] J.P. Gouteaux, M. Artzrouni, M. Jarry, *Une épidémie mise en équations*, La Recherche, 34-39, Octubre 2000.

[4] K. Howard, *La fiebre bioinformática*, Investigación y Ciencia, 42-47, Septiembre 2000.

[5] G. Israel, *La mathématisation du réel*, Éditions du Seuil, París, 1996.

[6] T.R. Karl, K.E. Trenberth, *Influencia del hombre sobre el clima*, Investigación y Ciencia, 54-59, Enero 2000.

[7] M. Lezaun, *Modelos matemáticos en las ciencias*, capítulo del libro “Las Ciencias experimentales y el progreso social”, Real Sociedad Bascongada de los Amigos del País – Universidad del País Vasco, Bilbao, 2002.

[8] M. Lezaun, *Predicciones del Tiempo y Matemáticas*, Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, número 22, 59-98, 2002.

[9] J.L. Lions, *El Planeta Tierra. El papel de las matemáticas y los superordenadores*, Espasa Calpe, Madrid, 1990.

[10] J.L. Lions, *¿Es posible describir el mundo de lo inanimado y del ser vivo con los lenguajes matemático e informático?*, Jornada Matemática celebrada el 21/02/200 en el Congreso de los Diputados, Publicaciones del Congreso de los Diputados, Madrid, 2000.

[11] E. Lorenz, *The Essence of Chaos*, University of Washington Press, Seattle, 1993. (Traducción en español *La esencia del caos*, Debate, Madrid, 2000).

[12] Méteo-France, ***http://www.meteo.fr***

[13] G. Musser, M. Alpert, *Cómo ir a Marte*, Investigación y Ciencia, 48-55, Mayo 2000.

[14] S. Thomke, M. Holzner, T. Gholami, *Estrellarse en automóvil*, Investigación y Ciencia, 72-77, Mayo 1999.

[15] E. Zuazua, *Teoría Matemática del Control: Notas históricas, avances recientes y perspectivas*, Notas del Curso de Verano de San Sebastián 2000.

Mikel Lezaun
Universidad del País Vasco – Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa
Barrio Sarriena s/n
48940 Leioa
e-mail: ***mikel.lezaun@ehu.es***