

# Arte y Naturaleza en clave geométrica

por

**M<sup>a</sup> Encarnación Reyes Iglesias, Universidad de Valladolid**

## 1. Introducción

Desde antiguo, las disciplinas de Arte y Geometría han estado profundamente relacionadas, contribuyendo cada una de ellas al desarrollo de la otra. Por otra parte la Naturaleza se prodiga en ejemplos de seres vivos e inertes cuyas formas han sido representadas por modelos matemáticos creados por el hombre a lo largo de la historia del conocimiento.

Entre los tópicos de Matemáticas que tienen relación con el Arte cabe destacar:

- Teoría de la Proporción.
- Geometría de Polígonos y otras formas planas.
- Teselados (Mosaicos).
- Teoría de la Simetría:
  1. Grupos de Frisos.
  2. Grupos de Leonardo.
  3. Grupos Cristalográficos.
- Curvas y Superficies notables.
- Geometría de Poliedros y otros cuerpos en el espacio.

- Geometrías: Equiforme, Proyectiva, Hiperbólica, Diferencial, Descriptiva, Computacional, Fractal, etc.
- Teoría de Grafos.
- Perspectiva.
- Diseño geométrico asistido por ordenador.

En esta conferencia nos centraremos fundamentalmente en la Teoría de la Proporción aplicada a la Naturaleza y al Arte.

**Los sentidos se deleitan con las cosas  
que tienen las proporciones correctas.**

*(Santo Tomás de Aquino)*

## 2. Proporciones: breve reseña

La teoría de la Proporción forma hoy un cuerpo doctrinal importante, de carácter interdisciplinar, con gran relevancia en los estudios de Arte y Arquitectura, siendo uno de los elementos clave para conseguir la armonía entre las partes y el todo de una obra artística o arquitectónica.

La proporción se define como la igualdad de dos razones:  
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $b, d \neq 0$ .

La proporción se llama **racional, conmensurable o estática** si  $\frac{a}{b}$  es un número racional positivo.

Se denomina **irracional, inconmensurable o dinámica** a la proporción de valor irracional positivo.

<b>Proporciones Notables</b>	
<b>Estáticas</b>	<b>Dinámicas</b>
Cuadrada $\frac{a}{b} = 1$	Raíz de dos $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$
Dupla $\frac{a}{b} = 2$	Raíz de tres $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$
Sesquitercia $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$	Plata $\frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2}$
Sesquiáltera $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$	Áurea $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
Pentatercia $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$	Cordobesa $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$
⋮	⋮

Los números de oro  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , y plata,  $\theta = \frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2}$ , soluciones positivas de las ecuaciones  $x^2 - x - 1 = 0$ , y  $x^2 - 2x - 1 = 0$ , respectivamente, pertenecen a la “**familia de los números metálicos**” [16], que originan proporciones notables en arquitectura.

La ecuación  $x^2 - ax - 1 = 0$ ,  $a \in \mathbb{N}$  puede ser considerada como la ecuación característica de la ecuación en diferencias:

$$G(n+2) - aG(n+1) - G(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Cuando  $a = 1$ , se obtiene la sucesión de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, .... cuyos cocientes tienden al número de oro.

Si  $a = 2$ , se obtiene la sucesión de Pell, 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, ... cuyos cocientes tienden al número de plata.

Las sucesiones anteriores forman parte de la familia de las Sucesiones Secundarias de Fibonacci Generalizadas, que son de la forma:

$$a, b, pb + qa, p(pb + qa) + qb, \dots$$

O bien:

$$G(n+2) = pG(n+1) + qG(n), \quad p, q \in \mathbb{N}, G(0) = a, G(1) = b$$

Para estas sucesiones se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(n+2)}{G(n+1)} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Los números metálicos son límites de estas Sucesiones Secundarias Generalizadas de Fibonacci y, a partir de ellos, se generan sucesiones con el doble carácter aditivo y multiplicativo, lo que resulta muy útil en Arquitectura a la hora de generar medidas proporcionadas según determinados cánones. Destacamos por su relevancia las sucesiones basadas en los números de oro y plata, respectivamente:

$$1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots, \phi^n, \dots$$

$$1, \theta, \theta^2, \theta^3, \dots, \theta^n, \dots$$

En la siguiente tabla se resumen algunas características de los números de oro, plata y plástico, los dos primeros relacionados con proporciones en el plano y el último con proporciones en el espacio de tres dimensiones.

Sucesión de Fibonacci	Sucesión de Pell	Sucesión de Padovan
$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$	$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$	$a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n-2}$
con $a_0 = a_1 = 1$	con $a_0 = a_1 = 1$	con $a_0 = a_1 = a_2 = 1$
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...	1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239,...	1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16,...
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = P$
$\phi$ es el número de oro	$\theta$ es el número de plata	$P$ es el número Plástico
1,618...	2,4142...	1,324...
Raíz real y positiva de: $x^2 - x - 1 = 0$	Raíz real y positiva de: $x^2 - 2x - 1 = 0$	Raíz real y positiva de: $x^3 - x - 1 = 0$

## 2.1 Proporción en un segmento

Desde el punto de vista geométrico, el elemento más sencillo al que se puede aplicar el concepto de proporción, es un segmento, dividiéndolo en dos partes. Entre las proporciones dinámicas aplicadas sobre él, consideramos la que resulta cuando se efectúa la división del mismo en **extrema y media razón** que da lugar a la proporción áurea [6,12]. Dado un segmento  $AB$  y un punto interior  $C$  que lo divide en dos partes  $AC$  y  $CB$ , con  $AC > CB$ , denotando por  $a$  y  $b$  con  $a > b$ , las medidas de  $AC$  y  $CB$  respectivamente, se plantea la proporción de tal forma que la relación entre la parte mayor  $a$  y la parte menor  $b$  sea igual a la relación entre la totalidad  $a + b$  y la parte mayor,  $a$ , es decir  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ . Operando y denotando por  $x = \frac{a}{b}$ , se obtiene la ecuación áurea  $x^2 - x - 1 = 0$ , cuya solución positiva

es el número de oro  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . La notación de este número por  $\phi$  es en honor a Fidias (Pheideas), escultor griego, uno de los decoradores del Partenón, quien utilizó esta proporción en sus obras.

La proporción sobre segmentos se considera constantemente en Arte y Arquitectura desde los ordenes clásicos hasta las obras del modernismo o más vanguardistas.

## 2.2 Proporción en un rectángulo

La siguiente figura geométrica susceptible de hallar su proporción es el rectángulo, definiendo su proporción como el cociente entre las longitudes mayor y menor de sus lados [1]. Si denotamos por  $R$  al rectángulo de lados  $a$  y  $b$ , su proporción  $p(R)$  es:

$$p(R) = \frac{\max(a, b)}{\min(a, b)}$$

En Arquitectura y Pintura se encuentran numerosos ejemplos de rectángulos notables tanto estáticos o de proporción racional, como dinámicos o de proporción irracional.

### 2.2.1 Rectángulos notables: Áureo

El arquitecto franco suizo Le Corbusier (1887-1965), firme convencido de que la proporción áurea dominaba el cuerpo humano y la Naturaleza concibió gran parte de su obra según esta proporción. Inventó un aparato de medida conocido como Modulor [9,13], basado en los rectángulos notables duplo y áureo, y en unas divisiones proporcionales de sus lados que darían lugar a las famosas series Roja y Azul, ambas sucesiones de Fibonacci.

En Pintura destacamos el Guernica, de Picasso, de dimensiones 771 x 345 cm. y por tanto de proporción es 2,2347.... Según el estudio de proporciones de Rudolf Arnheim [10]: el cuadro se descompone en un cuadrado central (lado 345 cm.) y dos rectángulos áureos laterales de 213 x 345 cm., por tanto, el tablero se subdivide en un rectángulo áureo horizontal 558 x 345 cm. y otro vertical de 213 x 345 cm. Aparecen otras divisiones armónicas sobre los lados relacionadas con el número de oro,  $\phi$ .

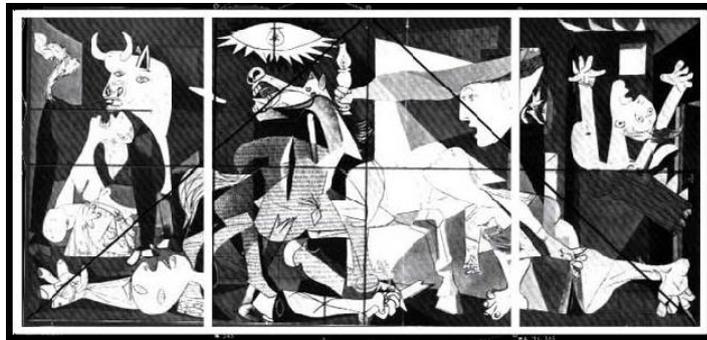
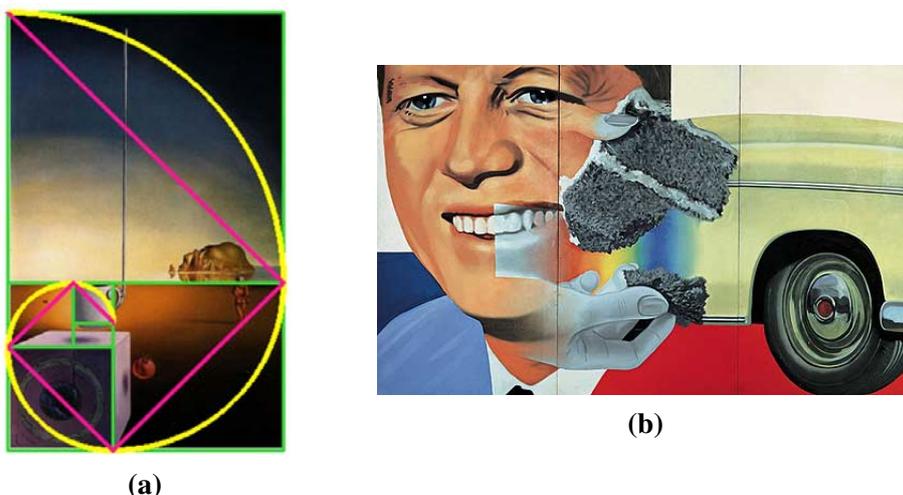


Figura 1: Guernica

Otro cuadro interesante (figura 2(a)) desde el punto de vista de sus proporciones, es el realizado por el surrealista Salvador Dalí (1904-1989) cuyo título es: “Media taza gigante volante con anexo inexplicable de cinco metros de longitud” [7]. El lienzo tiene dimensiones 50 x 31 cm., por tanto su proporción es  $\frac{50}{31} \approx 1,613 \approx \phi$ . Además se observan las sucesivas descomposiciones de un rectángulo áureo en un cuadrado y otro rectángulo áureo para organizar los elementos pictóricos, es decir, Dalí conocía claramente la propiedad de los rectángulos áureos. “El gnomon de un rectángulo áureo es un cuadrado”.



**Figura 2:** Dos ejemplos de proporciones en Pintura

La obra denominada Presidente Electo (figura 2(b)) (365.8 x 228 cm.) de James Rosenquist del Pop Art americano es un ejemplo de uso de proporción áurea y de la descomposición de un rectángulo áureo en un cuadrado y otro rectángulo áureo.

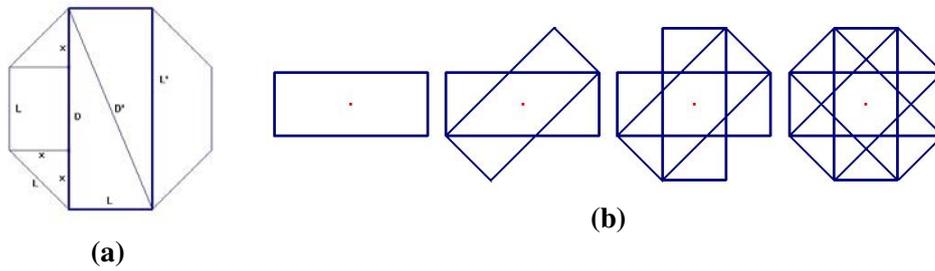
### 2.2.2 Rectángulos notables: Raíz de dos

Un rectángulo de uso común con esta proporción es el formato DIN A4 o cualquier otro rectángulo de la serie DIN. Es el único rectángulo con la propiedad de que al dividir su lado mayor en dos partes iguales se obtienen dos rectángulos de la misma proporción. Esta observación es la que sugirió al Dr. Porstaman la normalización de los formatos DIN.

Además, este rectángulo es de uso común en Arquitectura para el diseño de plantas y alzados, citamos por ejemplo a Le Corbusier, Meyer, Wright, Khan, etc., quienes, en muchas de sus obras, utilizan este rectángulo como extensión natural de un cuadrado a partir de su diagonal usando el compás.

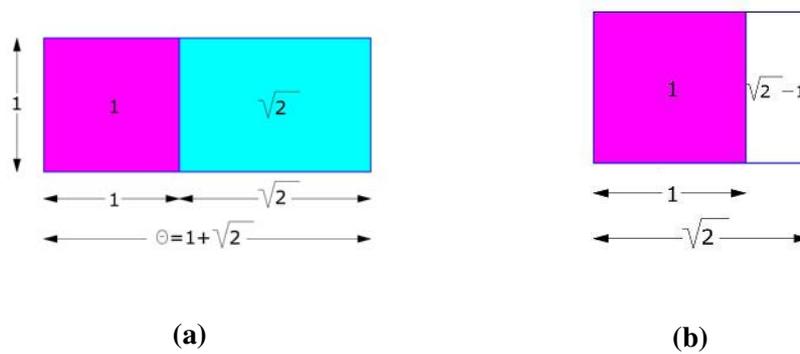
### 2.2.3 Rectángulos notables: Plata

Un rectángulo de plata, o rectángulo  $\theta$ , es aquel cuya proporción es el número de plata  $\theta = 1 + \sqrt{2}$ . Está relacionado con el octógono regular; en efecto, puede formarse un rectángulo de plata con el lado del octógono y una de sus diagonales (la perpendicular al lado de apoyo del octógono) [15,4]. Ver figura 3(a). Además puede generarse un octógono regular con la rotación de  $45^\circ$  de un rectángulo de plata en torno a su centro, figura 3(b). Cuatro rectángulos de plata dispuestos como se muestra en último panel de la figura 3(b), originan, además del octógono, la estrella  $8/2$  y el octagrama o polígono estrellado  $8/3$ , [15,4].



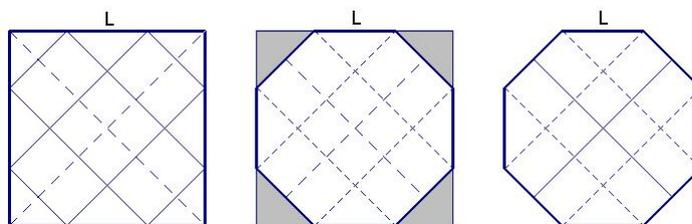
**Figura 3:** El rectángulo de plata y su relación con el octógono

Este rectángulo está formado por la yuxtaposición de un cuadrado y del rectángulo dinámico en proporción raíz de dos (ver figura 4(a)) y puesto que éste último admite la descomposición de la figura 4(b), el rectángulo de plata admite una nueva descomposición en dos cuadrados y un rectángulo de plata.



**Figura 4:** Algunas propiedades geométricas del número de plata

Una forma fácil de obtener un rectángulo de plata es extrayendo de un formato DIN, el cuadrado construido sobre su lado menor (figura 4(b)), [14,4]. Puesto que el formato DIN es un rectángulo en proporción  $\sqrt{2}$ , la tira resultante de la extracción del cuadrado tiene proporción  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = \theta$ . Además se puede generar el octógono regular partir de esta tira y del cuadrado como se muestra en la figura 5.



**Figura 5:** Construcción de un octógono a partir de un formato DIN

En el cuadro de Dalí de título “Hyperxiological sky”, [2], se combinan los rectángulos de proporción  $\sqrt{2}$  y su descomposición en cuadrados y rectángulos de plata. Ver figura 6.

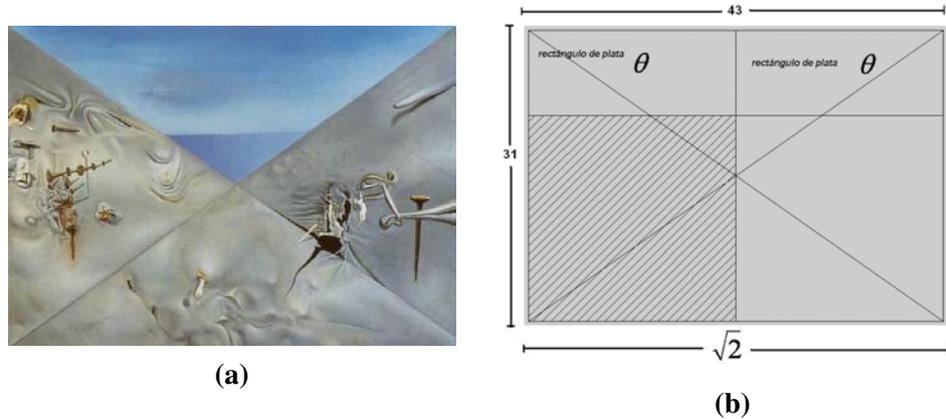


Figura 6: Hyperxiological sky

### 2.2.4 Rectángulos notables: Raíz de tres

Este rectángulo forma parte del hexágono regular, siendo sus lados una de las diagonales del hexágono y el lado del mismo (ver figura 7(a)).

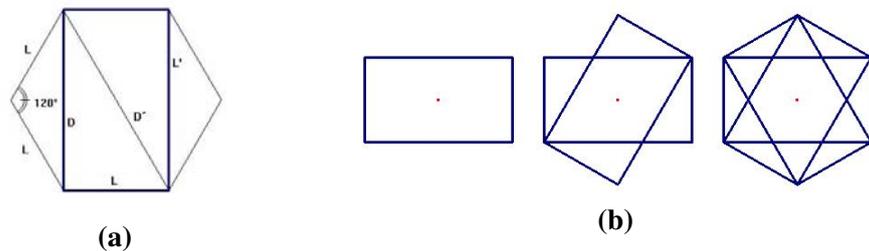


Figura 7: Rectángulo  $\sqrt{3}$  y su relación con el hexágono

Con este rectángulo puede generarse por rotación el hexágono regular y su estrella 6/2 (figura 7(b)), [15,4].

El rectángulo  $\sqrt{3}$  enmarca una de las figuras más importantes de la Geometría Sagrada conocida como “*vesica piscis*”. En el proceso de geometrización característico del gótico, jugó un papel fundamental la traducción de los Elementos de Euclides (siglo IV-III a. de C.). En la proposición primera del libro I, aparece la construcción de un triángulo equilátero a partir de un segmento dado. De aquí se obtiene la “*vesica piscis*” (vejiga de pez) llamada también *mandorla*. Dicha figura es utilizada en los periodos románico y gótico para pintar o esculpir un Pantocrátor, a veces una Virgen, sobre ella.

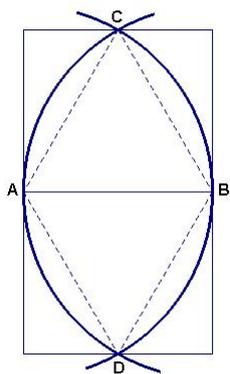
Podemos definir la *vesica piscis* como la figura plana comprendida entre dos arcos de circunferencia con centros en los puntos  $A$  y  $B$  de un segmento dado  $AB$ , y radio la longitud del mismo, [4]. Suponiendo que la longitud del segmento  $AB$  es 1, la altura del triángulo equilátero  $ABC$  mide  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  y por tanto la proporción del rectángulo circunscrito a la *vesica* es  $\sqrt{3}$ .

En el periodo gótico, los arcos ojivales de todo punto o equiláteros están formados por los arcos de media vesica piscis. También se utilizó el rectángulo  $\sqrt{3}$  para proporcionar las plantas de las catedrales góticas. La frase de O. Spengler “*Los templos dóricos y las Catedrales góticas son matemática petrificada*” resume la importancia de las Matemáticas en la Arquitectura de este periodo.

En las figuras siguientes, (figuras 8 y 9), podemos observar un esquema geométrico de una vesica piscis enmarcada en un rectángulo  $\sqrt{3}$ , (figura 8(a)) y algunos ejemplos de esta figura en el Arte y en la Arquitectura (figuras 8(b), 9(a) y 9(b)).

El interior de la iglesia románica de San Miguel de Aralar (Navarra) alberga un frontal de esmaltes cuya parte central está decorada con una vesica piscis que enmarca una Virgen. También en Navarra, en la Iglesia de San Nicolás de Bari de Tudela, se encuentra una bellísima vesica piscis labrada en piedra. En Deva (Guipúzcoa), en la Iglesia de Santa María la Real, hay otra mandorla, y así, podríamos citar muchos más ejemplos.

En la puerta de entrada y en las arquivoltas de la Catedral de Bilbao se pueden trazar medias vesicas piscis.

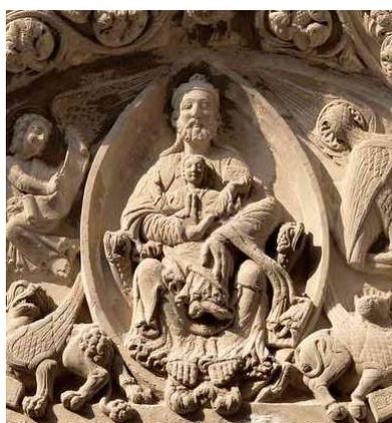


(a) Esquema de una Vésica Piscis



(b) Vésica en el retablo de San Miguel de Aralar. Navarra

**Figura 8:** Vesicas Piscis



(a) San Nicolás Bari. Tudela. Navarra



(b) Catedral de Bilbao. Pórtico de entrada

**Figura 9:** Ejemplos de vesicas en arte y arquitectura

### 2.3 Proporción poligonal

Al rectángulo le siguen en complejidad el resto de polígonos y su teoría de la proporción poligonal global.

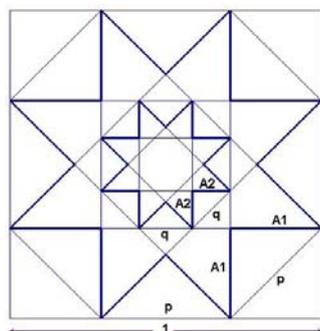
Dado un polígono convexo  $P_n$  de  $n$  lados  $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ , se define **proporción del polígono** como el cociente entre su área y el área del cuadrado construido sobre su lado menor [1]:

$$p(P_n) = \frac{A(P_n)}{(\text{mín}(L_1, L_2, \dots, L_n))^2}$$

No obstante, a pesar de la definición dada, en polígonos regulares se suelen hallar las proporciones entre sus elementos notables: razones entre diagonales y lados, radio de las circunferencia circunscrita y lado, apotema y lado, etc, obteniéndose valores de proporción característicos de cada polígono, así el número de oro caracteriza al pentágono, el raíz de tres al hexágono, el de plata al octógono, etc.

En las siguientes ilustraciones (figura 10) se muestra un ejemplo de sucesión de octógonos estrellados  $|8/3|$  cuyos lados verifican  $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{\theta}$ . [15,4].

El Cimborrio de la Catedral de Burgos, (figura 10(b)), es un ejemplo en el que se combina un octógono, su estrella  $|8/3|$ , otra estrella inscrita en ésta y diversas formas geométricas que recubren la celosía.



(a) Sucesión de estrellas octogonales



(b) Cimborrio catedral de Burgos

**Figura 10:** Octógonos estrellados en Arte

(a) Cúpula del Santo Sepulcro. Torres del Río



(b) Santa María de Eunate

**Figura 11:** Estrellas y Polígonos en el Arte

La Iglesia de Torres del Río en Navarra, joya románica del Camino de Santiago, posee planta octogonal y una cúpula nervada, (figura 11(a)), donde se aprecia la conjunción de las estrellas  $8/2$  y  $8/3$  y por tanto proporciones relacionadas con los números raíz de dos y plata.

Por último, la enigmática iglesia de Santa María de Eunate, del siglo XII, (figura 11(b)), también de planta octogonal, ábside pentagonal y rodeada por una arquería múltiple, pone de manifiesto la presencia de proporciones dinámicas en su construcción.

### 3. Proporciones en la naturaleza

La Filotaxis, en inglés Phyllotaxis, palabra de origen griego (Phyllon, hoja, Taxis, ordenación), literalmente significa *ordenación de las hojas alrededor de un tallo*. En un sentido más amplio, es una parte de la Botánica que estudia las ordenaciones de los elementos de una planta: hojas, ramas, pétalos, flores, semillas, etc. La Ciencia de la Filotaxis nació como una rama de la Botánica cuando los

naturalistas trataron de describir la regularidad en las ordenaciones de las hojas en un tallo.

Actualmente, la Filotaxis ha alcanzado un alto grado de elegancia, representado por ejemplo por Prusinkiewicz y Lindenmayer quienes han conseguido reproducciones muy realistas de plantas usando los L-systems y gráficos por computadora.

Las primeras observaciones de Filotaxis se deben a Leonardo da Vinci (1452-1519) quién constató la disposición espiral de las hojas alrededor de un tallo.

Kepler (1571-1639), observó la frecuencia del número cinco en las plantas. Existe gran cantidad de flores que poseen cinco pétalos regularmente repartidos, formando un pentágono.

La descripción de la aquileña (figura 12(a)) en los libros de botánica repite el número 5 en todos los elementos que la componen.



(a)



(b)

**Figura 12:** Dos ejemplos de flores con simetría de orden cinco

La flor conocida como pasionaria posee dos niveles de cinco pétalos girados, además tiene cinco sépalos, tres pistilos,...

Al cortar una manzana transversalmente las semillas se distribuyen formando un pentágono estrellado.

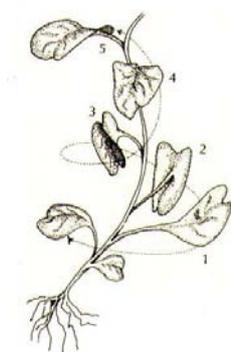
La filotaxis matemática comenzó con Schimper (1830) y Braun (1831), quienes establecieron la conocida serie en Filotaxis que lleva su nombre, la serie de Schimper-Braun. Los hermanos Bravais y Bravais (1837) fueron los primeros en presentar un tratamiento matemático al fenómeno de la filotaxis, [3,8]. Actualmente la filotaxis ha adquirido una gran relevancia debido a la aportación conjunta de botánicos y matemáticos, quienes complementan sus investigaciones. Uno de los resultados importantes de este estudio ha sido la constatación de la frecuencia de los números de Fibonacci. 1,1,2,3,5,8,13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, .....

Los números de Fibonacci en Botánica ocurren con gran regularidad. En 1968, Brousseau usó 4290 piñas de diez especies de pinos encontrados en California, de las cuales solo 74 piñas (1.7 por ciento) se desvió de los números de Fibonacci.

En 1992, Jean R.V. en su artículo “Model texting in phyllotaxis” publicó que de 12.750 observaciones en 650 especies encontradas en la literatura de Botánica de los últimos 150 años, la sucesión de Fibonacci aparecía en más del 92 por ciento de todos los posibles casos de plantas con disposición espiral de sus elementos. Entre los 12.750 casos, la sucesión de Lucas (Edouard A. Lucas, 1842- 1891) se encontró en un dos por ciento. Coxeter llama a la apariencia de los números de Fibonacci: “Fascinante tendencia”. Otros se refieren a la prevalencia de Fibonacci como: “El misterio de la Filotaxis” o “La obsesión o pesadilla de los botánicos.”

La disposición de las escamas de las piñas, frutos de diferentes especies de pinos, se organiza en torno a dos espirales de escamas: una dextrógira y otra levógira. Se ha constatado empíricamente que en un número muy elevado de estas especies, son números consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Otros ejemplos son las tortas de girasol, las cabezuelas de las margaritas, etc.

Las hojas de la mayor parte de plantas de tallo alto, están colocadas alrededor del mismo pudiendo ser recorridas siguiendo una espiral (figura 13). Mas concretamente, en Filotaxis se verifica la llamada ley de divergencia: **“para cada especie de plantas el ángulo que forman dos hojas consecutivas, llamado ángulo de divergencia, es constante”**.



(a)



(b)

**Figura 13:** Ejemplo de ángulo de divergencia

El ángulo de divergencia de una especie se expresa además de la forma habitual, en grados, como el cociente  $t/n$  donde  $t$  (turn) denota el número de vueltas desde una hoja fijada, hasta la siguiente que se encuentra situada sobre ella, y  $n$  (number) denota el número de hojas por las que se pasa [11].

La serie de Schimper-Braun nos proporciona una clasificación de numerosas especies atendiendo a su ángulo de divergencia.

Los números que componen las fracciones pertenecen a la sucesión de Fibonacci y el término general de la sucesión formada por estos cocientes es  $\frac{u_n}{u_{n+2}}$  que converge al número irracional  $\frac{1}{\phi^2}$ .

Calculando el correspondiente límite en la sucesión de los grados se obtiene el valor aproximado de  $137,5^\circ$  que se llama **Ángulo ideal o Ángulo de Fibonacci**.

<b>SERIE DE SCHIMPER-BRAUN</b>		
<b>Fracción</b>	<b>Angulo de divergencia</b>	<b>Familia</b>
1/2	$180^\circ$	Poáceas; olmo, tilo, lima
1/3	$120^\circ$	Ciperáceas; haya, avellano, mora
2/5	$144^\circ$	Roble, manzano, acebo, albaricoque
3/8	$135^\circ$	Aster, brassica, chopo, álmo, peral
5/13	$138^\circ 27'$	Sauce, piñas del pinus Strobus, sauce, almen-dro
8/21	$137^\circ 8'$	Piñas del Pinus Sylvestris, Pinus ni-gra
13/34	$138^\circ 4'$	Picea Abies
21/55	$137^\circ 27'$	Algunos capítulos de compuestos. Ejemplo: Torta de girasol de 55/89.
34/89	$137^\circ 31'$	
⋮	⋮	⋮
$\frac{u_n}{u_{n+2}} \rightarrow \frac{1}{\phi^2}$	$\frac{1}{\phi^2} \cdot 360^\circ \approx 137^\circ 30'$	

La Naturaleza usa estas distribuciones de hojas para proveer la cantidad adecuada de luz y de protección para cada planta. Una planta obtendrá la máxima exposición a la luz del sol y un mínimo solapamiento de las hojas si cada hoja está separada de la siguiente el ángulo de divergencia ideal (figura 14). Con este ángulo, supuesto el tallo completamente recto, nunca dos hojas pueden estar exactamente una sobre otra.

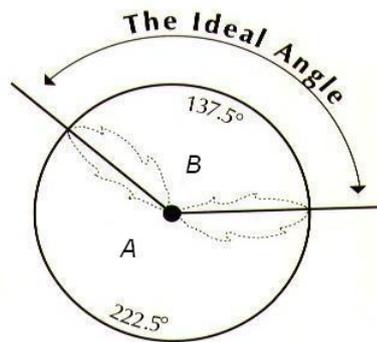
La máxima exposición a la luz del sol y a la lluvia no es siempre la condición más saludable para alguna planta, por tanto, el ángulo de divergencia ideal, puede no ser el más óptimo en algunas especies, de ahí, la variedad de ángulos de

divergencia.

El ángulo de divergencia límite corresponde al sector menor B de la división de un círculo en dos partes A y B, siguiendo la proporción áurea:

$$\frac{A}{B} = \frac{A+B}{A}$$

Operando y teniendo en cuenta que  $A + B = 360^\circ$ , se deduce que  $A = 222,5^\circ$  y por tanto  $B = 137,5^\circ$



**Figura 14:** Esquema del ángulo ideal

Ya Leonardo da Vinci, al respecto de la disposición de las hojas alrededor de un tallo decía:

*“La hoja vuelve siempre su cara superior hacia el cielo porque pueda así recibir con toda su superficie el rocío que lentamente desciende del árbol. Las hojas se distribuyen sobre sus plantas de modo que se incomoden lo menos posible: terciándose unas de otras, tal como podemos ver en la hiedra que cubre los muros. Esta alternancia sirve a dos fines, a saber: dejar intervalos por los que el aire y el sol puedan penetrar y, una segunda razón, permitir que las gotas caídas de la primera hoja puedan caer sobre la cuarta, o en otros árboles, sobre la sexta.”*

La naturaleza nos ofrece una infinidad de vegetales, que poseen proporciones notables tanto en su estructura de conjunto, como en sus partes.

En la planta equiseto, conocida más comúnmente como cola de caballo, aparecen proporciones áureas en los segmentos verticales que recorren la planta y obviamente, cualquier forma pentagonal convexa o estrellada de hojas o flores lleva consigo este tipo de proporción.

La proporción  $\sqrt{2}$  aparece como módulo en el tamaño de algunos frutos: El cacahuete, avellana, hoja de roble etc., pueden inscribirse en un rectángulo con esta proporción.



**Figura 15:** Naturaleza, Arte y Geometría

En la fotografía de la izquierda, (figura 15(a)), puede observarse la variadísima morfología de las algas silíceas llamadas diatomeas, donde podemos reconocer formas singulares como óvalos, elipses, deltoides, triángulos de Reuleaux, etc. También en el Arte y Arquitectura se utilizan estas formas, vemos por ejemplo un ventanal de la Catedral de Bilbao, (figura 15(b)), en el que aparecen, además de círculos y cuadrilóbulos, tres triángulos de Reuleaux en su decoración. Estamos hablando del maravilloso mundo de las curvas cerradas, naturales y matemáticas y sus aplicaciones en el Arte y la Arquitectura, que dejamos para otra ocasión.

Concluyo esta conferencia con la siguiente cita del ya mencionado arquitecto Le Corbusier, quien decía al respecto de lo recién comentado la siguiente frase:

**“La naturaleza es matemática, las obras de arte están en consonancia con ella y expresan y utilizan leyes naturales. En consecuencia la obra de arte es matemática a la que el sabio puede aplicar el razonamiento implacable y las fórmulas impecables.”**

Con ella estoy plenamente de acuerdo.

## Bibliografía

- [1] C. Alsina y E. Trillas, *Lecciones de Álgebra y Geometría*, Gustavo Gili, 1984.
- [2] R. Descharnes y G. Neret, *Dalí. La obra pictórica*, Taschen, 2001.
- [3] S. Douady, and Y. Couder, *Phyllotaxis as a Dynamical Self Organizing Process*, J. theor. Biol. 178, Part I, II and III, 255-274, 275-294, 295-312, 1996.
- [4] I. Fernández y E. Reyes, *Geometría con el hexágono y el octógono*, Proyecto Sur, 2003.
- [5] I. Fernández y E. Reyes, *Polígonos y formas estrelladas*, SUMA 49, 7-14, 2005.
- [6] M. Ghyka, *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*, Poseidón, 1977.

- [7] I. Gómez de Liaño, *Dalí*, Polígrafa S.A., 1992.
- [8] R.V. Jean, *Phyllotaxis*, Cambridge University Press, 1994.
- [9] Le Corbusier, *El Modulor I y II*, Poseidón, 1980.
- [10] G. Mazziotti, *La ricerca della Forma mediante l'adozione dei rapporti armonici*, Edizioni Scientifiche Italiane, 1983.
- [11] R. Newman and M. Boles, *Universal Patterns*, Pithagorean Press, 1992.
- [12] E. Reyes, *Proportions mathématiques et leurs applications à l'architecture*, Bulletin IREM-APMEP, 1996.
- [13] E. Reyes y P. Rio, *Estudio y desarrollo geométrico del Modulor de Le Corbusier*, VIII JAEM, 1997.
- [14] E. Reyes, *Paper folding and proportions in polygons*, Mathematics and Informatics Quartely 12(4), 124-127, 2002.
- [15] E. Reyes, *Proportions and dissections in polygons*, The Quaterly of the International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry 2, 357-363, 2002.
- [16] V. Spinadel, *The metallic means family and multifractal spectra*, Nonlinear Analysis 36, 721-745, 1999.

**M<sup>a</sup> Encarnación Reyes Iglesias**  
Universidad de Valladolid  
E.T.S. Arquitectura  
Departamento de Matemática Aplicada  
Avda Salamanca s/n, 47014 Valladolid  
e-mail: [ereyes@maf.uva.es](mailto:ereyes@maf.uva.es)

